MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther Dyck
in München

Adolph Mayer
in Leipzig.

47. Band.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Inhalt des siebenundvierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Vier Briefe von Arthur Cayley über elliptische Modulfunctionen.

Herausgegeben und erläutert

von

H. Weber in Strassburg.

Als kostbares Andenken an Arthur Cayley bewahre ich vier Briefe des grossen Mathematikers an mich aus seinem letzten Lebensjahr, die eine mit den elliptischen Modulfunctionen in nahem Zusammenhang stehende Frage aus der Reihenlehre in Anregung bringen, die, so interessant und wichtig sie ist, bis jetzt noch wenig behandelt worden ist. Ich glaube den Mathematikern einen Dienst zu erweisen, wenn ich diese Briefe, aus denen zu ersehen ist, mit welchen Fragen und Gedanken Cayley in der letzten Zeit seines Lebens beschäftigt war, in wortgetreuem Abdruck veröffentliche.

Wie aus dem zweiten Briefe zu ersehen ist, bestand schon vor einem Jahre die Absicht, die Briefe in den Annalen zu publiciren, und Cayley war damit einverstanden. Die Herausgabe hat sich etwas verzögert, weil ich über einige der in den folgenden Briefen angeregten Fragen noch mehr ins klare zu kommen suchte und darüber ist Cayley gestorben. Ich will aber jetzt nicht mehr länger damit zurückhalten. Meine Antworten lasse ich nicht mit abdrucken. Ihr Inhalt ist aber in den am Schlusse zugefügten Bemerkungen enthalten.

Strassburg, Juli 1895.

I.

1. Dear Sir:

I have obtained with respect to the functions $f(\omega)$, $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$*) some results possibly requiring correction and which I do not well understand, but which seem noticeable. I find by a process such as in my last paper in the Comptes Rendus**)

*) Vgl. H. Weber, elliptische Functionen und algebraische Zahlen, S. 63, 85 u. f.

**) Comptes Rendus 1893, Bd. 161.

$$\log f(\omega) = \qquad i\pi\left\{-\frac{\omega}{24}+\frac{1}{24\omega}-\frac{1}{12}S_1+\frac{1}{24}S_2+\frac{1}{24}S_3\right\}.$$

$$\log f_1(\omega) = \qquad i\pi\left\{-\frac{\omega}{24}-\frac{1}{12\omega}+\frac{1}{24}S_1+\frac{1}{24}S_2-\frac{1}{24}S_3\right\},$$

$$\log f_2(\omega) = \log\sqrt{2} + i\pi\left\{\ \frac{\omega}{12}+\frac{1}{24\omega}+\frac{1}{24}S_1-\frac{1}{12}S_2+\frac{1}{24}S_3\right\}$$

giving as they should do

$$f f_1 f_2 = \sqrt{2}.$$

Here $S_1 = \sum \frac{\omega}{\nu^2\omega^2-\mu^2}$,	$\frac{\mu}{\nu}$ a positive fraction in its least terms		μ odd	ν odd
$S_2 =$	do	do	odd,	even
$S_3 =$	do	do	even,	odd

with I think the Condition that altho μ, ν may be each as large as we please or say each infinte we must have $\frac{\mu}{\nu} = \infty$.

Writing $-\frac{1}{\omega}$ for ω, suppose that S_1 becomes S_1', S_2 becomes S_2'; S_3 becomes S_3': we have

$$\log f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \qquad i\pi\left\{\frac{1}{24\omega}+\frac{\omega}{12}+\frac{1}{24}S_1'+\frac{1}{24}S_3'-\frac{1}{12}S_2'\right\},$$

$$\log f_2(\omega) \quad = \log\sqrt{2} + i\pi\left\{\frac{\omega}{12}+\frac{1}{24\omega}+\frac{1}{24}S_1-\frac{1}{12}S_2+\frac{1}{24}S_3\right\}$$

and we should have

$$\log f_1\left(-\frac{1}{\omega}\right) = \log f_2(\omega),$$

that is

$$\log\sqrt{2} + \frac{i\pi}{24}\left\{S_1 - S_1' - 2(S_2 - S_2') + (S_3 - S_3')\right\} = 0$$

S_1', S_2', S_3' are the same functions as S_1, S_2, S_3, except only it would seem that instead of $\frac{\mu}{\nu} = \infty$. But I am not able to verify this equation I have ventured to submit to you these results: the formulae for $\log f(\omega)$, $\log f_1(\omega)$, $\log f_2(\omega)$ seem to me to be in so far interesting, as they put in evidence the infinities of these functions.

Cambridge, 9. Jan. 1894.

II.

Cambridge, 24. Jan. 1894.

I have to thank you very much indeed for your answer to my letter: I did not have in my mind your section 113, and the formula (27) p. 462 gives exactly the clue which I wanted viz. this is the precise form of an expression for $\log \eta(\omega)$, which I investigate roughly in a different manner. You in fact have

$$\log \eta(\omega) = \frac{1}{4(s-1)} - \frac{1}{2}\Gamma'(1) + \frac{1}{4}\log\left(\frac{-1}{4\omega^2}\right)$$
$$+ \frac{i\pi\omega}{12} - \frac{i\pi}{12\omega} + \frac{i}{\pi}\lim_{s=1}\sum^{x,y}\frac{\omega}{(x^2-\omega^2y^2)^s}$$

x and y positive integers.

I find the second line of this expression thus:

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}}(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\cdots$$

whence

$$\begin{aligned}\log\eta(\omega) = \frac{i\pi\omega}{12} &+ \log(1-q^2) = -q^2 - \tfrac{1}{2}q^4 - \tfrac{1}{3}q^6\cdots\\ &+ \log(1-q^4) = -q^4 - \tfrac{1}{2}q^8 - \tfrac{1}{3}q^{12}\cdots\\ &+ \log(1-q^6) = -q^6 - \tfrac{1}{2}q^{12} - \tfrac{1}{3}q^{18}\cdots\\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ = \frac{i\pi\omega}{12} &- \frac{q^2}{1-q^2} - \frac{1}{2}\frac{q^4}{1-q^4} - \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6}\cdots\\ = \frac{i\pi\omega}{12} &+ \Sigma Q_m\end{aligned}$$

where

$$Q_m = \frac{1}{m}\frac{q^{2m}}{q^{2m}-1} = \frac{1}{m}\frac{e^{2mi\pi\omega}}{e^{2mi\pi\omega}-1}.$$

Q_m has an infinity $= 0$, giving e term

$$\frac{1}{m}\frac{1}{2mi\pi\omega}, \quad = \frac{1}{2i\pi\omega}\frac{1}{m^2}$$

and the whole series of these is

$$\frac{1}{2i\pi\omega}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right), \quad = \frac{1}{2i\pi\omega}\frac{\pi^2}{6} = \frac{-i\pi}{12\omega}.$$

Q_m has also an infinity $m\omega - n = 0$ (n a positiv or negative integer). Say the corresponding term is $\frac{A}{m\omega - n}$, we have

$$A = \frac{1}{m}\left(\frac{e^{2mi\pi\omega}(m\omega - n)}{e^{2mi\pi\omega} - 1}\right)_{\omega=\frac{n}{m}} = \frac{1}{m}\ \frac{e^{2ni\pi}m}{2mi\pi e^{2ni\pi}} = \frac{1}{2mi\pi}$$

$$= \frac{-i}{2\pi}\ \frac{1}{m}.$$

Or the term is

$$-\frac{i}{2\pi}\ \frac{1}{m}\ \frac{1}{m\omega - n},$$

and uniting with this the term

$$-\frac{i}{2\pi}\ \frac{1}{m}\ \frac{1}{m\omega + n}$$

for $-n$, the two together are

$$-\frac{i}{2\pi}\ \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m\omega + n} + \frac{1}{m\omega - n}\right) = -\frac{i}{\pi}\ \frac{\omega}{m^2\omega^2 - n^2}$$

thus $\log \eta(\omega)$ has the terms

$$\frac{i\pi\omega}{12} - \frac{i\pi}{12\omega} - \frac{i}{\pi}\sum \frac{\omega}{m^2\omega^2 - n^2},$$

or for n, m writing x, y the terms

$$\frac{i\pi\omega}{12} - \frac{i\pi}{12\omega} + \frac{i}{\pi}\sum^{x,y} \frac{\omega}{x^2 - \omega^2 y^2},$$

(x, y positive integers)

which is the result in question. I shall be very glad if you will as you propose send the correspondence to the math. Annalen . . .

III.

Cambridge, 7. Febr. 1894.

Dear Sir:

I have just received your last letter and return here with that of the 15. Jan. I cannot help thinking that there should be some more simple proof than the one you have given of the formula (16) p. 459 of your book

$$\sum_{-\infty,\infty}^{n} W = \varphi(0) + \sum_{1,\infty}^{\nu}\{\varphi_+(\nu) + \varphi_-(\nu)\},$$

or of the form which this assumes in regard to the double sum

$$\sum\sum \frac{1}{(x^2 - \omega^2 y^2)^3} \text{ viz. } \sum_{-\infty,\infty}^{n} W = \varphi(0) + 2\sum_{1,\infty}^{\nu}\varphi(\nu).$$

Starting from this form the remainder of the investigation for the limite of the double sum is very straight forward and satisfactory . . .

IV.

Dear Sir:

Thanks for your letter just received. There is I think an analogous point in the theory of Weierstrass function $\sigma(u)$. I start from the definition

$$\sigma(u) = u\,\Pi'_w\left(1-\frac{u}{w}\right)e^{\frac{u}{w}+\frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$

μ, μ' integer values lying within a symmetrical closed curve of *arbitrary form* which ultimately becomes infinite.

We may write

$$\sigma(u) = -\frac{\Pi(w-u)}{\Pi'(w)}\,e^{\frac{1}{2}u^2\Sigma'\frac{1}{w^2}} \qquad \left(\Sigma'\frac{1}{w}=0\right)$$

$$\sigma(u+2\omega) = -\frac{\Pi(w-2\omega-u)}{\Pi'(w)}\,e^{\frac{1}{2}(u+2\omega)^2\Sigma'\frac{1}{w^2}}$$

and thence

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = \frac{\Pi(-u-2\omega+w)}{\Pi(-u+w)}\,e^{(u+\omega)2\omega\Sigma'\frac{1}{w^2}}.$$

I do not see how, the boundary curve being arbitrary it can be directly shown, but it is necessary to assume that the Π-factor is of the form $-e^{(u+\omega)M}$, where the value of M depends on the form of the boundary curve: this being so we have

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = -e^{(u+\omega)\left(M+2\omega\Sigma'\frac{1}{w^2}\right)} = -e^{2\eta(u+\omega)},$$

whence

$$2\eta = M + 2\omega\,\Sigma'\frac{1}{w^2}$$

for $\Sigma'\frac{1}{w^2}$ depends on the form of the boundary curve — and it is only in this way, that we can obtain for η a value independent of the form of the boundary curve. We can directly calculate M for the two cases $w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$, $\frac{\mu}{\mu'} = 0$ and $\frac{\mu}{\mu'} = \infty$ respectively — but not I think, or at any rate not *easily* for any other form of the boundary curve.

Bemerkungen zu den vorstehenden Briefen.

Von

H. Weber in Strassburg.

I.

Was ich zu der im ersten Brief angeregten Frage beizubringen habe, beruht auf einer Kronecker'schen Formel, von der ich im § 113 meines Buches: „Elliptische Functionen und algebraische Zahlen" (Braunschweig 1890) eine Ableitung gegeben habe. Ich führe diese Formel hier an:

Es sei $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ eine positive quadratische Form mit beliebigen reellen Coefficienten A, B, C, deren Determinante $AC - B^2$ mit m bezeichnet werde. x, y sollen alle ganzzahligen Werthe durchlaufen mit Ausnahme des Werthepaares $x = 0$, $y = 0$. Dann ist

$$\text{I.} \qquad \lim_{s=1} \left[\sum^{x,y} \frac{1}{(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^s} - \frac{\pi}{(s-1)\sqrt{m}} \right]$$
$$= -\frac{2\pi\Gamma'(1)}{\sqrt{m}} + \frac{\pi}{\sqrt{m}} \log \frac{A}{4m} - \frac{2\pi}{\sqrt{m}} \log \eta(\omega_1)\eta(\omega_2),$$

worin

$$\omega_1 = \frac{B + i\sqrt{m}}{A}, \quad \omega_2 = \frac{-B + i\sqrt{m}}{A},$$

$\sqrt{m}$ positiv und die Logarithmen alle reell zu nehmen sind und $\eta(\omega)$ die aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannte durch das unendliche Product

$$(1) \qquad \eta(\omega) = e^{\frac{\pi i \omega}{12}} \prod_{1,\infty}^{\nu} (1 - e^{2\pi i \nu \omega})$$

dargestellte Function ist, die hierdurch nur so lange definirt ist, als ω einen positiven imaginären Theil hat.

Ich setze nun wie in § 29 meines oben erwähnten Buches

$$(2) \quad f(\omega) = e^{-\frac{\pi i}{24}} \frac{\eta\left(\frac{\omega+1}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_1(\omega) = \frac{\eta\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\eta(\omega)}, \quad f_2(\omega) = \sqrt{2}\, \frac{\eta(2\omega)}{\eta(\omega)},$$

woraus die Relationen folgen

$$f(\omega)^8 = f_1(\omega)^8 + f_2(\omega)^8, \tag{3}$$
$$\sqrt{2} = f(\omega)\, f_1(\omega)\, f_2(\omega),$$

die in dem ersten Briefe vorkommen.

Man setze nun

$$\omega_1 = \alpha + \beta i, \qquad \omega_2 = -\alpha + \beta i$$

also

$$A = 1, \quad B = \alpha, \quad m = C - \alpha^2 = \beta^2$$

wodurch sich aus I. ergiebt

$$(4) \qquad S = \sum^{x,y} \frac{1}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2)^s} = \sum^{x,y} \frac{1}{(x-\omega_1 y)^s (x+\omega_2 y)^s}$$
$$= \frac{\pi}{(s-1)\beta} - \frac{2\pi\Gamma'(1)}{\beta} - \frac{\pi}{\beta}\log 4\beta^2 - \frac{2\pi}{\beta}\log \eta(\omega_1)\,\eta(\omega_2),$$

worin, wie in der Folge immer, solche Glieder weggelassen sind, die mit $s-1$ zugleich verschwinden.

Wenn wir in dieser Formel α, β durch 2α, 2β ersetzen, so hat dies auf der linken Seite denselben Erfolg, als wenn wir y durch $2y$ ersetzen, d. h. die Summationsbuchstaben y auf geradzahlige Werthe beschränken. Demnach ergiebt sich

$$(5) \quad 2S^{(2)} = \sum \frac{2}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2)^s} \qquad \big(y \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2)\big)$$
$$= \frac{\pi}{(s-1)\beta} - \frac{2\pi\Gamma'(1)}{\beta} - \frac{\pi}{\beta}\log 4\beta^2 - \frac{2\pi}{\beta}\log 2.\eta(2\omega_1)\,\eta(2\omega_2).$$

Ersetzt man in (4) α, β durch $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{2}\beta$, und multiplicirt mit

$$\frac{1}{4^s} = \frac{1}{4} - \frac{s-1}{2}\log 2 \ldots$$

so folgt

$$(6) \quad 2S^{(1)} = \sum \frac{2}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2)^s} \qquad \big(x \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ 2)\big)$$
$$= \frac{\pi}{(s-1)\beta} - \frac{2\pi\Gamma'(1)}{\beta} - \frac{\pi}{\beta}\log 4\beta^2 - \frac{2\pi}{\beta}\log \eta\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\eta\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

und wenn man endlich α, β durch $\frac{1}{2}(1+\alpha)$, $\frac{1}{2}\beta$ also ω_1, ω_2 durch $\frac{1+\omega_1}{2}$, $\frac{-1+\omega_2}{2}$ ersetzt, so findet man in ähnlicher Weise durch Benutzung der Formel

$$\log \eta\left(\frac{-1+\omega_2}{2}\right) = \log \eta\left(\frac{1+\omega_2}{2}\right) - \frac{\pi i}{12},$$

$$(7)\quad 2S^{(0)} = \sum \frac{2}{((x-\alpha x)^2+\beta^2 y^2)^s} \qquad \left(x \equiv y \pmod{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{(s-1)\beta} - \frac{2\pi\Gamma'(1)}{\beta} - \frac{\pi}{\beta}\log 4\beta^2 - \frac{2\pi}{\beta}\log \eta\left(\frac{1+\omega_1}{2}\right)\eta\left(\frac{1+\omega_2}{2}\right)$$

$$+ \frac{i\pi^2}{6\beta}.$$

Aus (4) bis (7) ergieht sich nun nach (2)

$$(8)\quad \begin{aligned} S - 2S^{(0)} &= \frac{2\pi}{\beta}\log f(\omega_1)\, f(\omega_2), \\ S - 2S^{(1)} &= \frac{2\pi}{\beta}\log f_1(\omega_1) f_1(\omega_2), \\ S - 2S^{(2)} &= \frac{2\pi}{\beta}\log f_2(\omega_1) f_2(\omega_2). \end{aligned}$$

Betrachtet man die Summe $S_0 + S_1 + S_2$, so kommen darin alle Glieder der Summe S vor, darunter aber die Glieder dreifach, in denen x, y beide gerade sind.

Demnach ist

$$S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)} = \left(1 + \frac{2}{4^s}\right) S$$

und wenn man also

$$1 + \frac{2}{4^s} = \frac{3}{2} - (s-1)\log 2$$

setzt mit Rücksicht auf (4)

$$(9)\quad 2(S^{(0)} + S^{(1)} + S^{(2)}) = 3S - \frac{2\pi}{\beta}\log 2.$$

Demnach ergiebt sich durch Addition der drei Formeln (8) in Uebereinstimmung mit (2) rechts und links der Werth $\frac{2\pi}{\beta}\log 2$.

Die linken Seiten der Formeln (8) lassen sich in je eine einzige Summe zusammenfassen, nämlich

$$(10)\quad \begin{aligned} 2S^{(0)} - S &= \sum \frac{(-1)^{x+y}}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2)^s}, \\ 2S^{(1)} - S &= \sum \frac{(-1)^{x}}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2))^s}, \\ 2S^{(2)} - S &= \sum \frac{(-1)^{y}}{((x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2)^s}. \end{aligned}$$

Darin ist die Summation nach x, y zuerst für $s > 1$ auszuführen, und dann der Grenzwerth für $s = 1$ zu nehmen.

Es lässt sich aber zeigen, dass, wenn man die Glieder der Reihen so anordnet, dass die $(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2$ in *wachsender Grössenordnung*

aufeinanderfolgen, dieser Grenzwerth auch so erhalten werden kann, dass man in den Summen ohne Weiteres $s = 1$ setzt.

Man hat dann die Summation so auszuführen, dass man zunächst alle Glieder der Summen nimmt, in denen x, y für ein beliebiges positives n der Bedingung

$$(11)\qquad (x - \alpha y)^2 + \beta^2 y^2 < n$$

genügen, und dann n ins Unendliche wachsen lässt.

Um dies für die erste Summe (19) nachzuweisen, bezeichnen wir mit Z_n', Z_n'' die Anzahl der der Bedingung (11) genügenden ganzzahligen Werthepaare, in denen $x + y$ gerade oder ungerade ist. Man kann diese Werthepaare dadurch abzählen, dass man in einem rechtwinkligen Coordinatensystem ξ, η die Punkte mit den Coordinaten

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{n}}, \qquad \eta = \frac{y}{\sqrt{n}},$$

(Gitterpunkte) bestimmt, die innerhalb der Ellipse

$$(\xi - \alpha\eta)^2 + \beta^2\eta^2 = 1$$

liegen. Diese Gitterpunkte zerfallen in zwei Arten, je nachdem $x + y$ gerade oder ungerade ist. Durch die Gitterpunkte der ersten Art ist ein unter 45 Grad gegen die Coordinatenaxen geneigtes rechtwinkliges Gitter bestimmt, dessen Maschen den Flächeninhalt $\frac{2}{n}$ haben.

Die Anzahl aller dieser Maschen, deren linker unterer Eckpunkt in der Ellipse liegt, ist dann Z_n' und ihr Gesammtflächeninhalt $2 Z_n' : n$. Achtet man auf die Maschen, die auf dem Rande der Ellipse liegen, so ergiebt sich, dass der Flächeninhalt $2 Z_n' : n$ bis auf einen Fehler von der Ordnung $1 : \sqrt{n}$ mit der Fläche der Ellipse $\pi : \beta$ übereinstimmt, und dass also

$$Z_n' = \frac{n\pi}{2\beta} + \gamma' \sqrt{n},$$

$$Z_n'' = \frac{n\pi}{2\beta} + \gamma'' \sqrt{n},$$

und folglich

$$Z_n' - Z_n'' = \gamma \sqrt{n},$$

worin $\gamma, \gamma', \gamma''$ mit unendlich wachsendem n nicht unendlich werden.

Wir setzen nun

$$(12)\qquad 2S^{(0)} - S = \frac{a_1}{k_1^s} + \frac{a_2}{k_2^s} + \frac{a_3}{k_3^s} + \cdots -$$

worin

$$(13)\qquad k_1 \leqq k_2 \leqq k_3 \ldots$$

die der Grösse nach geordneten Werthe von

$$(x - \alpha y)^2 + \beta^2 y^2$$

sind, und $a_1, a_2, a_3, \ldots$ den Werth ± 1 haben.

Ist k_ν die letzte der Bedingung (11) genügende Zahl der Reihe (13), so ist

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_\nu = Z_n' - Z_n'' = A_\nu \sqrt{k_\nu}$$

worin A_ν mit unendlich wachsendem ν nicht unendlich wird, und es ist

$$a_\nu = A_\nu \sqrt{k_\nu} - A_{n-1} \sqrt{k_{\nu-1}},$$

woraus

$$2S^{(0)} - S = A_1 \sqrt{k_1} \left(\frac{1}{k_1^s} - \frac{1}{k_2^s}\right) + A_2 \sqrt{k_2} \left(\frac{1}{k_2^s} - \frac{1}{k_3^s}\right) + \cdots$$

Wir betrachten den Rest dieser Reihe

$$R_\nu = A_\nu \sqrt{k_\nu} \left(\frac{1}{k_\nu^s} - \frac{1}{k_{\nu+1}^s}\right) + A_{\nu+1} \left(\frac{1}{k_{\nu+1}^s} - \frac{1}{k_{\nu+2}^s}\right) + \cdots,$$

und wenn nun die A_ν sämmtlich kleiner als A bleiben, so ergiebt sich

$$R_\nu < A \left(\frac{1}{k_\nu^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{k_{\nu+1}^{s-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{k_{\nu+1}^{s-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{k_{\nu+2}^{s-\frac{1}{2}}} + \cdots\right)$$

oder

$$R_\nu < \frac{A}{k_\nu^{s-\frac{1}{2}}}.$$

Es bleibt also die Convergenz und Stetigkeit von $2S_0 - S$ bestehen, so lange $s > \frac{1}{2}$ ist, und besteht daher sicher für $s = 1$. Ebenso können wir für die beiden anderen Summen schliessen, und finden, wenn die Summation in dem durch die Formel (11) ausgedrückten Sinne verstanden wird

$$(14)\quad \begin{aligned}
\frac{2\pi}{\beta} \log f(\omega_1)\, f(\omega_2) &= -\sum \frac{(-1)^{x+y}}{(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2},\\
\frac{2\pi}{\beta} \log f_1(\omega_1)\, f_1(\omega_2) &= -\sum \frac{(-1)^{x}}{(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2},\\
\frac{2\pi}{\beta} \log f_2(\omega_1)\, f_2(\omega_2) &= -\sum \frac{(-1)^{y}}{(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2}.
\end{aligned}$$

Dies ist die strenge Form der Cayley'schen Formeln. Um dies nachzuweisen, setzen wir immer unter der Voraussetzung (11)

$$\begin{aligned}
\sum \frac{1}{(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2} &= S_{0,0} && x,\ y \text{ gerade},\\
&= S_{0,1} && x \text{ gerade},\ y \text{ ungerade},\\
&= S_{1,0} && x \text{ ungerade},\ y \text{ gerade},\\
&= S_{1,1} && x,\ y \text{ ungerade}.
\end{aligned}$$

Dann geben die Formeln (14) für unendliches n

$$\frac{2\pi}{\beta}\log f(\omega_1)\, f(\omega_2) = -S_{0,0} + S_{1,0} + S_{0,1} - S_{1,1},$$

$$\frac{2\pi}{\beta}\log f_1(\omega_1) f_1(\omega_2) = -S_{0,0} + S_{1,0} - S_{0,1} + S_{1,1},$$

$$\frac{2\pi}{\beta}\log f_2(\omega_1) f_2(\omega_2) = -S_{0,0} - S_{1,0} + S_{0,1} + S_{1,1}$$

und nach (3)

$$\frac{2\pi}{\beta}\log 2 = -3S_{0,0} + S_{1,0} + S_{0,1} + S_{1,1}$$

woraus durch Elimination von $S_{0,0}$

$$\frac{2\pi}{\beta}\log f(\omega_1)\, f(\omega_2) = \frac{2\pi}{3\beta}\log 2 + \frac{2}{3}S_{1,0} + \frac{2}{3}S_{0,1} - \frac{4}{3}S_{1,1},$$

$$(15)\qquad \frac{2\pi}{\beta}\log f_1(\omega_1)\, f_1(\omega_2) = \frac{2\pi}{3\beta}\log 2 + \frac{2}{3}S_{1,0} - \frac{4}{3}S_{0,1} + \frac{2}{3}S_{1,1},$$

$$\frac{2\pi}{\beta}\log f_2(\omega_1)\, f_2(\omega_2) = \frac{2\pi}{3\beta}\log 2 - \frac{4}{3}S_{0,1} + \frac{2}{3}S_{0,1} + \frac{2}{3}S_{1,1}.$$

Jede einzelne der Summen $S_{1,0}$, $S_{0,1}$, $S_{1,1}$ wird mit n zugleich unendlich, aber die in (15) vorkommende Verbindung derselben bleibt endlich.

Wir wollen noch die Summen $S'_{1,0}$, $S'_{0,1}$, $S'_{1,1}$ einführen, die aus $S_{1,0}$, $S_{0,1}$, $S_{1,1}$ dadurch entstehen, dass für x, y nur solche Zahlenpaare gesetzt werden, die *keinen gemeinschaftlichen Theiler haben.*

Setzen wir für den Augenblick, wenn $(x-\alpha y)^2 + \beta^2 y^2 < n$ ist

$$S_{1,0} + S_{0,1} - 2S_{1,1} = T_n, \qquad \lim_{n=\infty} T_n = T$$

und bezeichnen mit $T_n^{(p)}$ die Summe, die aus T_n entsteht, wenn alle die Glieder ausgeschieden werden, in denen x, y beide durch die ungerade Primzahl p theilbar sind, so ist

$$T_n^{(p)} = T_n - \frac{1}{p^2}\, T_{\frac{n}{p^2}}$$

und für $n = \infty$

$$T^{(p)} = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) T.$$

Ist q eine zweite Primzahl, so schliesst man ebenso

$$T^{(pq)} = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{q^2}\right) T,$$

und folglich, wenn

$$S'_{1,0} + S'_{0,1} - 2S'_{1,1} = T'$$

gesetzt wird,

$$T' = \Pi\left(1 - \frac{1}{p^2}\right) T,$$

worin sich das Productzeichen Π auf *alle* ungeraden Primzahlen p bezieht.

Nun ist, wie man durch Entwicklung nach steigenden Potenzen von p^{-2} findet

$$\frac{1}{\Pi\left(1-\frac{1}{p^2}\right)} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}$$

und mithin

$$T = \frac{\pi^2}{8}\, T'.$$

Hiernach gehen die Formeln (15) in folgende über

$$\begin{aligned}
&\log f(\omega_1)\, f(\omega_2) = \tfrac{1}{3}\log 2 + \tfrac{\beta\pi}{24}(S'_{1,0} + S'_{0,1} - 2S'_{1,1}),\\
(16)\qquad &\log f_1(\omega_1)\, f_1(\omega_2) = \tfrac{1}{3}\log 2 + \tfrac{\beta\pi}{24}(S'_{1,0} - 2S'_{0,1} + S'_{1,1}),\\
&\log f_2(\omega_1)\, f_2(\omega_2) = \tfrac{1}{2}\log 2 + \tfrac{\beta\pi}{24}(-2S'_{1,0} + S_{0,1} + S'_{1,1}).
\end{aligned}$$

Setzt man $\alpha = 0$, so wird

$$\omega_1 = \omega_2 = \beta i = \omega.$$

Es wird

$$S'_{1,0} = \sum \frac{1}{x^2 - \omega^2 y^2} \qquad x \text{ ungerade, } y \text{ gerade}$$

und dafür kann man, wenn man die zwei Glieder $y = 0$, $x = \pm 1$ absondert, setzen

$$S'_{1,0} = 2 + 4\sum \frac{1}{x^2 - \omega^2 y^2},$$

worin jetzt x, y nur noch *positive* Werthe annehmen. Ebenso verfährt man mit $S'_{0,1}$, $S'_{1,1}$, und erhält in der Bezeichnung des ersten Cayley'schen Briefes:

$$\begin{aligned}
\beta S'_{1,0} &= -2i\omega + 4i\sum \frac{\omega}{y^2\omega^2 - x^2}\\
&= -2i\omega + 4i\, S_2,\\
\beta S'_{0,1} &= +\ \frac{2i}{\omega}\ + 4i\, S_3,\\
\beta S'_{1,1} &= \phantom{-2i\omega +{}} 4i\, S_1,
\end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
&\log f(\omega) = \tfrac{1}{3}\log\sqrt{2} + \tfrac{\pi i}{24}\left(-\omega + \tfrac{1}{\omega} - 4S_1 + 2S_2 + 2S_3\right),\\
(17)\qquad &\log f_1(\omega) = \tfrac{1}{3}\log\sqrt{2} + \tfrac{\pi i}{24}\left(-\omega - \tfrac{2}{\omega} + 2S_1 + 2S_2 - 4S_3\right),\\
&\log f_2(\omega) = \tfrac{1}{3}\log\sqrt{2} + \tfrac{\pi i}{24}\left(\ 2\omega + \tfrac{1}{\omega} + 2S_1 - 4S_2 + 2S_3\right).
\end{aligned}$$

Diese Formeln gelten aber nur für reelle $i\omega$ und die Summen sind ausserdem so zu verstehen, dass x, y an die Bedingung

$$x^2 - y^2\omega^2 < n$$

gebunden sind, und dann n ins Unendliche wächst.

Diese Formeln unterscheiden sich von den Cayley'schen durch das Glied $\frac{1}{3}\log\sqrt{2}$. Wenn man aber andere Arten des Grenzüberganges wählt, so können natürlich ganz andere Werthe herauskommen.

Aus den Formeln (17) lassen sich nun die Relationen

$$f(\omega) f_1(\omega) f_2(\omega) = \sqrt{2},$$

$$f(\omega) = f\left(-\frac{1}{\omega}\right), \quad f_1(\omega) = f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right)$$

ohne weiteres verificiren, weil durch die Vertauschung von ω mit $-\frac{1}{\omega}$ die Summen S_2 und S_3 in einander übergehen, während S_1 ungeändert bleibt.

Da die Art des Grenzüberganges von ω abhängt, so wird man die Formeln (17) wohl nicht als eine „Darstellung" der Functionen $\log f(\omega)$ bezeichnen dürfen.

II.

Man kann die Frage, von denen die Cayley'schen Briefe handeln, noch aus einem anderen Gesichtspunkte betrachten.

Wenn wir in der Formel (4) gleich von vorn herein $\alpha = 0$, $\omega_1 = \omega_2 = i\beta = \omega$ annehmen, so ergiebt sich für $s = 1$

$$\text{II.} \quad \sum^{x,y} \frac{1}{(x^2 - \omega^2 y^2)^s} = \frac{i\pi}{(s-1)\omega} - \frac{2\pi i\, \Gamma'(1)}{\omega} - \frac{\pi i}{\omega}\log(-4\omega^2) - \frac{4\pi i}{\omega}\log\eta(\omega),$$

eine Formel, die zunächst nur für ein rein imaginäres ω abgeleitet ist, und uns die Resultate (17) direct liefern würde.

Man sieht aber leicht, worauf hier der Kürze wegen nicht näher eingegangen werden soll, dass die Formel II. auf demselben Wege, auf dem an der erwähnten Stelle meines Buches die Formel I. für reelle A, B, C bewiesen ist, für complexe ω bewiesen werden kann, wenn der imaginäre Theil von ω positiv ist.

Die Logarithmen sind nach dem Princip der Stetigkeit dadurch eindeutig bestimmt, dass sie für ein rein imaginäres ω reell werden sollen.

Es ergeben sich dann die Formeln (14) in der Gestalt

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
\frac{4\pi i}{\omega}\log f(\omega) &= -\operatorname*{Lim}_{s=1}\sum\frac{(-1)^{x+y}}{(x^2-\omega^2y^2)^s},\\
\frac{2\pi i}{\omega}\log f_1(\omega) &= -\operatorname*{Lim}_{s=1}\sum\frac{(-1)^{x}}{(x^2-\omega^2y^2)^s},\\
\frac{2\pi i}{\omega}\log f_2(\omega) &= -\operatorname*{Lim}_{s=1}\sum\frac{(-1)^{y}}{(x^2-\omega^2y^2)^s},
\end{aligned}
$$

wo die linke Seite so zu verstehen ist, dass zunächst für $s > 1$ über alle ganzzahligen Werthpaare x, y (mit Ausnahme von 0,0) zu summiren und dann $s = 1$ zu setzen ist. Die weitere Aufgabe würde dann die sein: man soll in der x, y-Ebene eine nach einem bestimmten Gesetz sich ins Unendliche vergrössernde geschlossene Curve abgrenzen (boundary curve, nach Cayley), derart, dass man eine bis $s = 1$ einschliesslich stetige Function von s erhält, wenn man die in (18) vorkommenden Summen so nimmt, dass zunächst nur die Werthe x, y genommen werden, deren repräsentirende Punkte *im Innern* jener Curve liegen, und dann die Curve ins Unendliche ausdehnt.

Diese Curve wird, wenn sie überhaupt existirt, von ω abhängig sein, und für den Fall eines rein imaginären ω ist es eben die Ellipse $x^2 - \omega^2 y^2 = n$, die sich selbst ähnlich ins Unendliche rückt. Für ein complexes ω bin ich nicht im Stande, die Frage zu beantworten.

III.

Eine andere Art der Auffassung dieser Summen, die mit der ursprünglichen Cayley'schen im Wesentlichen übereinkommen dürfte, ergiebt sich aus den bekannten Formeln:

$$
\begin{aligned}
\sum_{1,\infty}^{x}\frac{\omega}{\omega^2y^2-x^2} &= -\frac{1}{2\omega y^2}+\frac{\pi i}{2y}\,\frac{q^{2y}+1}{q^{2y}-1}\\
&= -\frac{1}{2\omega y^2}-\frac{\pi i}{y}\left(\frac{1}{2}+\sum_{1,\infty}^{n} q^{2ny}\right),\\
\sum_{1,\infty}^{x}\frac{(-1)^x\omega}{\omega^2y^2-x^2} &= -\frac{1}{2\omega y^2}-\frac{\pi i}{y}\sum_{1,\infty}^{n} q^{(2n-1)y},
\end{aligned}
$$

worin wie gewöhnlich

$$q = e^{\pi i \omega}$$

gesetzt ist. Wenn wir diese Ausdrücke abermals über alle positiven ganzzahligen y summiren, so findet sich, wenn man von den bekannten Formeln

$$\sum \frac{1}{y^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \sum \frac{(-1)^y}{y^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Gebrauch macht,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1,\infty}^{y} \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(-1)^{x+y}\omega}{\omega^2 y^2 - x^2} = \frac{\pi^2}{24\omega} - \frac{\pi^2\omega}{24} + \pi i \log f(\omega),\\
(18)\qquad &\sum_{1,\infty}^{y} \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(-1)^{x}\omega}{\omega^2 y^2 - x^2} = -\frac{\pi^2}{12\omega} - \frac{\pi^2\omega}{24} + \pi i \log f_1(\omega),\\
&\sum_{1,\infty}^{y} \sum_{1,\infty}^{x} \frac{(-1)^{y}\omega}{\omega^2 y^2 - x^2} = \frac{\pi^2}{24\omega} + \frac{\pi^2\omega}{12} + \pi i \log f_2(\omega).
\end{aligned}$$

Die Doppelsummen auf der linken Seite dieser Formeln sind so zu verstehen, dass zuerst die Summation in Bezug auf x, dann die in Bezug auf y auszuführen ist. Betrachtet man aber den Rest dieser Summen, in der Form

$$\sum_{n,\infty}^{y} \sum_{1,\infty}^{x} + \sum_{1,n-1}^{y} \sum_{m,\infty}^{x},$$

so ergiebt eine einfache Betrachtung, dass die Doppelsummen auf der linken Seite der Formeln (18) auch so genommen werden können, dass man für x, y alle positiven ganzen Zahlen setzt, die den Bedingungen

$$(19)\qquad 0 < x < m, \qquad 0 < y < n$$

genügen, und dann m und n so ins Unendliche wachsen lässt, dass auch $m : n$ unendlich wird.

Wir setzen nun, indem wir x, y an die Bedingung (19) binden, wie im ersten Brief

$$\begin{aligned}
\sum^{x,y} \frac{\omega}{\omega^2 y^2 - x^2} &= S_0, &&x \text{ gerade}, y \text{ gerade},\\
&= S_1, &&x \text{ ungerade}, y \text{ ungerade},\\
&= S_2, &&x \text{ ungerade}, y \text{ gerade},\\
&= S_3, &&x \text{ gerade}, y \text{ ungerade},
\end{aligned}$$

und erhalten aus (18)

$$\begin{aligned}
&S_0 + S_1 - S_2 - S_3 = \frac{\pi^2}{24\,\omega} - \frac{\pi^2\,\omega}{24} + \pi i \log f(\omega),\\
(20)\qquad &S_0 - S_1 - S_2 + S_3 = -\frac{\pi^2}{12\,\omega} - \frac{\pi^2\,\omega}{24} + \pi i \log f_1(\omega),\\
&S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = \frac{\pi^2}{24\,\omega} + \frac{\pi^2\,\omega}{12} + \pi i \log f_2(\omega),
\end{aligned}$$

woraus durch Addition mit Rücksicht auf (3)

$$3S_0 - S_1 - S_2 - S_3 = \pi i \log \sqrt{2}\,^{*}),$$

und wenn man hierdurch S_0 eliminirt:

$$\frac{4}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2 - \frac{2}{3}S_3 = \frac{\pi^2}{24\,\omega} - \frac{\pi^2\,\omega}{24} - \frac{\pi i}{3}\log\sqrt{2} + \pi i \log f(\omega),$$

$$-\frac{2}{3}S_1 - \frac{2}{3}S_2 + \frac{4}{3}S_3 = \frac{\pi^2}{12\,\omega} - \frac{\pi^2\,\omega}{24} - \frac{\pi i}{3}\log\sqrt{2} + \pi i \log f_1(\omega),$$

$$-\frac{2}{3}S_1 + \frac{4}{3}S_2 - \frac{2}{3}S_3 = \frac{\pi^2}{24\,\omega} + \frac{\pi^2\,\omega}{12} - \frac{\pi i}{3}\log\sqrt{2} + \pi i \log f_2(\omega).$$

Ebenso, wie wir oben die Summe T' auf T zurückgeführt haben, können wir auch hier, wenn wir links den Factor $\pi^2 : 8$ hinzufügen, bei den Summen S_1, S_2, S_3 die Zahlenpaare x, y auf *relative Primzahlen* beschränken. Wenn wir also die S jetzt in diesem Sinne verstehen, so erhalten wir

$$\log f(\omega) = \frac{1}{3}\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{24}\left(-\omega + \frac{1}{\omega} - 4S_1 + 2S_2 + 2S_3\right),$$

$$\text{(12)} \quad \log f_1(\omega) = \frac{1}{3}\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{24}\left(-\omega - \frac{2}{\omega} - 2S_1 + 2S_2 - 4S_3\right),$$

$$\log f_2(\omega) = \frac{1}{3}\log\sqrt{2} + \frac{\pi i}{24}\left(2\omega + \frac{1}{\omega} + 2S_1 - 4S_2 + 2S_2\right).$$

Dies System stimmt der Form nach auffallender Weise vollständig mit dem System (17) überein, mit den Cayley'schen Formeln nicht ganz.

IV.

Die Weierstrass'sche σ-Function ist durch ein unendliches Product definirt, deren einzelne Factoren

$$\left(1 - \frac{u}{w}\right) e^{\frac{u}{w} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{w^2}},$$

$$(w = 2\mu\omega + 2\mu'\omega')$$

sind, und welches in diesem Sinne unbedingt convergent ist, und eine ganze analytische Function von u definirt.**) Nimmt man aber die Exponentialfactoren für sich und die binomischen Factoren $1 - \frac{u}{w}$ für

---

*) Diese Formel kann auch direct aus der Betrachtung der Summen abgeleitet werden, ohne die Eigenschaften der Functionen $f(\omega)$ zu verwenden.

**) Vgl. Schwarz, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen nach Weierstrass. Zweite Ausgabe. Berlin 1893.

sich, so erhält man divergente, oder wenigstens nur bedingt convergente Producte.

Stellt man die Zahlenpaare μ, μ' als Gitterpunkte in einer Coordinatenebene dar, so kann man nach Cayley in dieser Ebene eine geschlossene Curve ziehen, von der zur Vereinfachung angenommen wird, dass sie durch die Coordinatenaxen in vier symmetrische und congruente Theile getheilt wird (etwa eine Ellipse) und dann das Product aller der Factoren nehmen, deren repräsentirende Punkte in dem von dieser Curve umschlossenen Flächenraum liegen. Man erhält so, da jetzt $\Sigma' \frac{1}{w} = 0$ ist,

$$-\frac{\Pi(w-u)}{\Pi'(w)}\, e^{\frac{1}{2} u^2 \Sigma' \frac{1}{w}},$$

wo der Accent bei Summen- oder Productzeichen die Bedeutung hat, dass das Werthepaar $\mu = 0$, $\mu' = 0$ auszulassen ist. Die Function $\sigma(u)$ kann dann als der Grenzwerth dieses Productes definirt werden, den man erhält, wenn die begrenzende Curve sich allseitig ins Unendliche ausdehnt.

Man erhält dann, wenn jetzt η die Bedeutung wie bei Weierstrass hat*)

$$\frac{\sigma(u+2\omega)}{\sigma(u)} = \frac{\Pi(-u-2\omega+w)}{\Pi(-u+w)}\, e^{(u+\omega)2\omega\Sigma'\frac{1}{\omega^2}} = -e^{2\eta(u+w)},$$

und wenn man mit Cayley den Productfactor $= -e^{(u+\omega)M}$ setzt,

$$2\eta = M + 2\omega\Sigma'\frac{1}{w^2}. \tag{22}$$

Hiernach ist für jede besondere Art der Grenzcurve die Grenze M zu bestimmen, was demnach, ausser von der Natur dieser Grenzcurve, nur von ω und ω', nicht von u abhängt.

Diese Grenze M lässt sich in der folgenden bemerkenswerthen Weise darstellen:

Ich bezeichne mit ω wie früher eine Grösse mit positiv imaginärem Bestandtheil. Dann ist

$$\lim_{s=1} \sum\sum \frac{1}{(x+\omega y)^{2s}} = \frac{\pi^2}{3} + 2\,\mathrm{Lim} \sum_{1,\infty}^{y} \sum_{-\infty,\infty}^{x} \frac{1}{(x+y\omega)^{2s}}. \tag{23}$$

Und mit Hilfe der Formel

$$\frac{\Gamma(2s)}{((-2\pi i(x+\omega y))^{2s}} = \int_0^\infty e^{2\pi i(x+y\omega)\xi}\, \xi^{2s-1}\, d\xi,$$

und nach der Fourier'schen Reihe:

*) S. Formeln und Lehrsätze Art. 7, 8.

$$(24)\quad \frac{\Gamma(2s)}{(-2\pi i)^{2s}} \sum^{x} \frac{1}{(x+\omega y)^{2s}} = \sum^{x} \int_0^1 e^{2\pi i \xi x} \sum_{0,\infty}^{n} e^{2\pi i \omega y(\xi+n)} (\xi+n)^{2s-1} d\xi$$

$$= \sum_{1,\infty}^{n} e^{2\pi i \omega y n}\, n^{2s-1}\ ^{*)},$$

wenn die Summation in Bezug auf x *gleichmässig* zu positiven und negativen unendlichen Werthen von x auszudehnen ist.

Führt man in (24) noch die Summation in Bezug auf y aus, so ergiebt sich

$$\frac{\Gamma(2s)}{(-2\pi i)^{2s}} \sum_{1,\infty}^{y} \sum^{x} \frac{1}{(x+\omega y)^{2s}} = \sum_{1,\infty}^{n} \frac{e^{2\pi i \omega n}}{1-e^{2\pi i \omega n}}\, n^{2s-1}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{1,\infty}^{n} \frac{d \log(1-e^{2\pi i \omega n})}{d\omega}\, n^{2s-2},$$

und wenn man nun den Grenzwerth für $s = 1$ aufsucht,

$$\operatorname{Lim} \sum_{1,\infty}^{y} \sum^{x} \frac{1}{(x+\omega y)^{2s}} = -2\pi i \frac{d \log \eta(\omega)}{d\omega} + \frac{\pi^2}{6},$$

so dass die Formel (23) ergiebt

$$(25)\quad \operatorname{Lim} \sum \sum \frac{1}{(x+\omega y)^{2s}} = -4\pi i \frac{d \log \eta(\omega)}{d\omega}.$$

Nun ist, wenn die Perioden 2ω, $2\omega'$ der σ-Function mit ω_1, ω_2 und ihr Verhältniss $\omega_2 : \omega_1$ mit ω bezeichnet wird, nach § 32 meines Buches über elliptische Functionen

$$\eta = -\frac{2\pi i}{\omega_1} \frac{d \log \eta(\omega)}{d\omega},$$

worin η dieselbe Bedeutung hat wie in der Formel (22), und hiernach ergiebt sich aus (25)

---

*) Dedekind hat mich in einem Briefe vom 27. Februar 1894 auf folgenden eigenthümlichen Umstand aufmerksam gemacht. Auf der rechten Seite der Formel (24) steht eine durchaus stetige Function von s, die für $s = \frac{1}{2}$ in den Werth

$$\sum_{1,\infty}^{n} e^{2\pi i \omega y n} = \frac{1}{e^{-2\pi i \omega y} - 1}$$

übergeht, während sich aus der in Nr. III angewandten elementaren Formel ergiebt

$$\sum \frac{1}{-2\pi i (x+\omega y)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{-2\pi i \omega y - 1}}.$$

Die Summe $\Sigma (x+\omega y)^{-2s}$ ist also eine bei $s = \frac{1}{2}$ unstetige Function von s.

$$2\eta = \omega_1 \lim_{s=1} \sum{}' \frac{1}{(\omega_1 x + \omega_2 y)^{2s}}.$$

Setzt man dies in (22) ein, so ergiebt sich, wenn man ω_1 wieder durch 2ω ersetzt,

$$M = 2\omega\left(\lim_{s=1} \sum{}' \frac{1}{w^{2s}} - \sum{}' \frac{1}{w^2}\right).$$

M würde sich also dann $= 0$ ergeben, wenn man die Glieder der Reihe $\Sigma' w^{-2s}$ durch die Wahl der Grenzcurve so anordnen könnte, dass man eine bis $s - 1$ stetige Function von s erhält.

Alle diese Resultate sind aber bis jetzt nicht, wie zu wünschen wäre, direct aus dem Ausdruck der σ-Function durch das Doppelproduct abgeleitet, sondern mit Hilfe anderweit bekannter Periodeneigenschaften der σ-Function, die in Art. 6 der „Formeln und Lehrsätze“ durch Umwandlung der σ-Function in ein einfach unendliches Product abgeleitet werden.

Für besondere Arten des Grenzüberganges würde die directe Untersuchung wohl durchzuführen sein.

Sur quelques propriétés des ensembles d'ensembles et leurs applications à la limite d'une ensemble variable.

Par

C. Burali-Forti à Turin.

Nous nous proposons d'exposer quelques propriétés remarquables de la limite d'un ensemble variable. Ces propriétés, qui se trouvent réunies dans le § 3, s'obtiennent assez facilement par des propriétés générales des ensembles d'ensembles que nous avons exposées au § 2. Dans le § 3 nous nous servirons seulement d'une partie de ce que contient le § 2 mais nous avons cru utile d'indiquer les groupes complets de propositions 1—7, 13—18, 19—22, qui expriment des propriétés pas encore connues des ensembles d'ensembles. Dans le § 1 nous rappelons la définition de la limite selon l'acception moderne,*) et nous rapportons, pour commodité du lécteur, quelques-unes de nos formules (voir la note*)) dont nous nous servirons au § 3.

Les ouvrages que nous avons cités, sont les seuls, du moins nous le croyons, que l'on a sur la limite d'une fonction selon l'acception moderne de la limite.

Pour énoncer et démontrer tous les théorèmes, nous ferons usage des symboles de la logique mathématique, aujourd'hui assez connus pour pouvoir omettre l'explication de leur signification et de leur emploi. Pour les éclaircissements ultérieurs nous renvoyons le lécteur à l'«Introduction au formulaire de mathématique» et au «Formulario di matematica» publiés par la Rivista di Matematica.**) Nous indiquerons ces deux ouvrages avec les abréviations «Int Form», «Form». —

---

*) G. Peano. Sulla definizione del limite di una funzione, Rivista di Matematica. Vol II, pag. 77. — Sur la définition de la limite d'une fonction. American Journal Vol. XVII, pag. 38.

R. Bettazzi. Sui punti di discontinuità delle funzioni di variabili reale. (Rendiconti Circolo Matematico di Palermo VI). — Parte VII del «Formulario» publié par la Rivista di Matematica.

C. Burali-Forti. Sul limite di una classe variabile. Atti Accademia di Torino Vol XXX.

**) On peut aussi consulter: Logica Matematica. Manuali Hoepli (C. Burali-Forti).

§ 1.

La limite d'une classe se présente en plusieurs questions de géométrie différentielle.*) La sphère qui passe par quatre points d'une ligne est une classe (de points) variable selon les variations du groupe des quatres points sur la ligne; lorsque ceux-ci tendent vers un point A de la ligne, la sphère tend vers une limite qui est la sphère osculatrice en A.

Suivant les méthodes de Grassmann,**) nous pouvons considérer un point P fonction de deux variables u, v qui peuvent prendre toutes les valeurs des classes a, b. Si $P(u, v)$ est la fonction que nous considérons, $P(a, v)$ est une classe (de points) variable avec la variation de v; pour chaque valeur speciale de v, $P(a, v)$ représente une ligne, faisant tendre v à une valeur v_0 de b il faut considérer la position limite de la ligne (classe de points) variable.***)

Dans plusieurs questions de Physique et de Mécanique il faut considérer des quantités qui dépendent de toutes les valeurs qu'une fonction acquiert dans un intervalle donné.†)

Il est par conséquent nécessaire de considérer une fonction d'une classe. Si la classe est variable la limite de la fonction dépend de la limite de la classe.***)

La limite d'une classe variable a été présentée aussi dans le théorème de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires.††) —

Nous avons défini la limite d'une classe variable suivant l'acception moderne de la limite, et nous avons démontré comment une telle définition peut se réduire à celle qui a été donnée par M. Peano (Math. Ann. vol. 37 § e P pag. 197) et comme, de même, toutes les prop. du § e de M. Peano continuent à subsister. Nous retrouverons quelques-unes de ces prop: (§ 3 P 2, 3, 7) comme conséquences immédiates d'autres propriétés générales.

La définition que nous avons donnée de la limite d'une classe variable est la suivante:

$$m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{K}\mathrm{q}_m \,.\, f \,\varepsilon\, (\mathrm{K}\mathrm{q}_n)\mathrm{f}u \,.\, x_0 \,\varepsilon\, Du \,.\, \supset \therefore$$

$$1.\quad \lim_u f x_0 = \mathrm{q}_n \cap \overline{y\,\varepsilon}\{h, k \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, \supset_{h,k} : z \,\varepsilon \left(u \cap (x_0 + \Theta\overline{\mathrm{m}}h)\right) . fz \cap (y + \Theta\overline{\mathrm{m}}k) \\ - = \Lambda \cdot - =_z \Lambda\}.$$

*) G. Peano. Applicazioni geometriche del calcolo, pag. 302 et suivantes.

**) Grassmann, Ausdehnungslehre. 1844.

***) Ascoli. Le curve limiti di una varietà. Memorie Acc. Lincei Vol. XVIII Serie 3e (Parte 2e pag. 525 et suivantes).

†) V. Volterra. Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni. Rendiconti Acc. Lincei Vol III. — Sur une généralisation de la théorie des fonctions Acta Mathematica Vol. 12.

††) G. Peano. Démonstrations de l'integrabilité. Math. Ann. Band XXXVII.

C'est-à-dire «Si m, n sont des nombres entiers, u est une classe de nombres complexes d'ordre m, f est un signe de fonction qui fait correspondre à chaque u une classe de nombres complexes d'ordre n et x_0 est un élément de la classe dérivée, selon Cantor, de u (Form V), alors: nous dirons que y est une valeur de la limite de fx, lorsque x en variant dans la classe u tend à x_0, lorsque y est un q_n et quelque soient les nombres réels et positifs h, k il existe un élément z de u à l'intérieur de la sphère du centre x_0 et du rayon h (le centre exclus) tel qu'il existent des valeurs de fz à l'intéreur de la sphère du centre y et du rayon k.»

Remarquons que nous indiquons dans la P1 l'ensemble des nombres 0 à 1, (0 et 1 exclus), avec Θ. De plus avec la notation $\lim_u fx_0$, ou bien $\lim_{x,u.x_0} fx$ nous indiquons la phrase «limite de fx lorsque x changeant en u tend à x_0». Dans le signe $\lim_u fx_0$, $\lim_u f$ est un signe de fonction qui, à chaque élément de Du fait correspondre une classe de q_n (Sul limite .. Atti Acc. Torino. l. c. pag. 10).

A la P1 on peut donner la forme (Sul limite . . . pag. 9)

2. $$\lim_u fx_0 = q_n \cap \overline{x\varepsilon}\,\{h\varepsilon Q\,.\supset_h.\, y\varepsilon C\,[\cup' f(u \cap (x_0+\Theta \overline{m} h))]\}$$

et l'hypothèse de la P1 reste sousentendue.

En celle-ci paraît le signe $\cup'$ (Form V) dont la signification est amplement expliquée au §2. Quant au signe C il faut rappeler que Cu indique la classe u «fermée», c'est-à-dire, $(Cu = u \cup Du)$, Cu est la somme logique de u et de sa classe dérivée (Form V §7).

Nous mettons maintenant la P2 sous une autre forme dont nous nous servirons dans le §3. Quel que soit le nombre réel et positif h nous mettons

(1) $$\psi h = C[\cup' f(u \cap (x_0+\Theta \overline{m} h))]$$

c'est-à-dire nous indiquons par ψ le signe de fonction qui à chaque h de Q fait correspondre la classe

$$C[\cup' f(u \cap (x_0+\Theta \overline{m} h))].$$

En transportant h dans le second membre de (1) (Int Form — pag. 33) on a

(2) $$\psi = C[\cup' f(u \cap (x_0+\Theta \overline{m} h))]\,\overline{h}$$

et donc ψ résulte exprimé par f.

Pour la (1) la P2 prend la forme

$$\lim_u fx_0 = q_n \cap \overline{y\varepsilon}\,\{h\varepsilon Q\,.\supset_h.\, y\varepsilon \psi h\}.$$

Or la partie située entre { } reste indiquée par $\cap'$ (ψQ), (voir §2 P(4)), et la proposition précédente devient

$$\lim_u fx_0 = q_n \cap \{\cap' (\psi Q)\}.$$

Or, comme $\cap'(\psi Q)$ est une classe de q_n, on peut dans la formule précédente supprimer q_n (Form I §1 P33) et l'on a

$$\lim_u f x_0 = \cap'(\psi Q).$$

En substituant à ψ le signe indiqué par la (2) on a

3. $$\lim_u f x_0 = \cap' \, C[\cup' f(u \cap (x_0 + \Theta \, \overline{\mathrm{m}} h))] \bar{h} Q.$$

Nous avons donné à la P1 aussi la forme suivante

4. $$\lim_u f x_0 = \lim_{h, Q, 0} [\cup' f(u \cap (x_0 + \Theta \, \overline{\mathrm{m}} h))].$$

Enfin étant r un nombre entier et x_0 un élément de la classe $D^r u$ nous avons démontré que

5. $$r \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x_0 \varepsilon D^r u \,.\, \supset \,.\, \lim_u^r f x_0 \supset \lim_u f x_0$$

ou, p. ex. $$\lim_u^2 f x_0 = \lim_{x, Du, x_0} \lim_u f x, \ldots$$

Nous nous servirons des P2—5 au §3.

§ 2.

(a)

Soit u un ensemble d'ensembles ($u \varepsilon \mathrm{KK}$). C'est-à-dire, soit u une classe dont les éléments sont d'ensembles. Avec $\cup' u$ — que l'on peut lire «somme logique des u» — nous indiquons (Form. V §1 P10) la moindre classe qui contient tous les ensembles qui forment u. Avec $\cap' u$ — qu'on peut lire «produit logique des u» —, nous indiquons (Form. V §1 P9) la plus grand classe commune à toutes les classes qui forment u.

En d'autres termes nous disons que «x est un élément de la classe $\cup' u$ lorsqu'il existe au moins un élément y de u à qui x appartient»; que «x est un élément de la classe $\cap' u$ lorsque x appartient à chaque élément de u».

Nous exprimons cela en écrivant

$$\left.\begin{array}{l} u \varepsilon \mathrm{KK} \cdot \supset \cdot \cup' u = \overline{x \varepsilon} \{ y \varepsilon u \cdot x \varepsilon y \cdot - =_y \Lambda \} \\ \cdot \cdot \cdot \cdot \supset \cdot \cap' u = \overline{x \varepsilon} \{ y \varepsilon u \cdot \supset_y \cdot x \varepsilon y \} \end{array}\right\} \text{(Form. V §1 P10,9).}$$

On peut remarquer que les signes $\cup'$, $\cap'$ placés au devant d'un ensemble d'ensembles produisent une classe.

Nous avons pour les signes $\cup'$, $\cap'$ les propositions suivantes

$$u, v \varepsilon \mathrm{KK} \,.\, \supset \therefore$$

1. $\cup'(u \cup v) = (\cup' u) \cup (\cup' v)$

[Hp. Form. V § 1 P10 $: \supset : \cup'(u \cup v) = \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon (u \cup v) \cdot x \varepsilon y \cdot -=_y \Lambda\} \cdot$
Form. I § 4 P4, § 2 P22 $: \supset : \cup'(u \cup v)$
$= \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon u \cdot x \varepsilon y : \cup : y \varepsilon v \cdot x \varepsilon y : -=_y \Lambda\} \cdot$ Form. I § 3 P10 $: \supset :$
$\cup'(u \cup v) = \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon u \; x \varepsilon y \cdot -=_y \Lambda : \cup : y \varepsilon v \cdot x \varepsilon y \cdot -=_y \Lambda\} \cdot$
Form. I § 4 P4, V § 1 P10 $: \supset :$ Ts],

2. $\cap'(u \cup v) = (\cap' u) \cap (\cap' v)$

[Hp. Form. V § 1 P9 $: \supset : \cap'(u \cup v) = \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon (u \cup v) \cdot \supset_y \cdot x \varepsilon y\}$.
Form. I § 4 P4, § 2 P17 $: \supset : \cap'(u \cup v)$
$= \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon u \cdot \supset_y \cdot x \varepsilon y : y \varepsilon v \cdot \supset_y \cdot x \varepsilon y\}$ · Form. I § 4 P3, V § 1 P9
$: \supset :$ Ts],

3. $u \supset v \,.\, \supset .\, \cup' u \supset \cup' v$

[Hp. Form. I § 2 P16 $: \supset : v = u \cup v$. P1 $: \supset : \cup' v = (\cup' v) \cup (\cup' v)$.
Form. I § 2 P16 $: \supset :$ Ts].

4. $u \supset v \,.\, \supset .\, \cap' v \supset \cap' u$

[Hp $: \supset : v = u \cup v$. P2 $: \supset : \cap' v = (\cap' u) \cap (\cap' v)$.
Form. I § 1 P33 $: \supset :$ Ts],

5. $\cup'(u \cap v) \supset (\cup' u) \cap (\cup' v)$,

[Hp. Form. I § 1 P5 $: \supset : u \cap v \supset u \,.\, u \cap v \supset v$. P3 $: \supset : \cup'(u \cap v) \supset \cup' u$.
$\cup'(u \cap v) \supset \cup' v$. Form. I § 1 P36 $: \supset :$ Ts],

6. $(\cap' u) \cup (\cap' v) \supset \cap'(u \cap v)$

[Hp $: \supset : u \cap v \supset u \,.\, u \cap v \supset v$. P4 $: \supset : \cap' u \supset \cap'(u \cap v) \,.\, \cap' v \supset \cap'(u \cap v)$.
Form. I § 2 P17 $: \supset :$ Ts],

7. $\cap' \Lambda = - \Lambda$

[Form. V § 1 P9 $: \supset : \cap' \Lambda = \overline{x\varepsilon}\{y \varepsilon \Lambda \cdot \supset_y \cdot x \varepsilon y\}$.
Form. I § 3 P3 $: \supset :$ P7],

7'. $\cap'(-\Lambda) = \Lambda \cdot \cup' \Lambda = \Lambda \cdot \cup'(-\Lambda) = -\Lambda$.

(b)

Soit u une classe quelconque et f, φ de classes fonctions dès u, ($f, \varphi \,\varepsilon\, \mathrm{K} \, \mathrm{f}\, u$). Quelque soit l' x de u, fx et φx sont des classes; les signes $fx \cup \varphi x$, $fx \cap \varphi x$ ont une signification, et représentent des classes. — C'est-à-dire nous avons

(1) $$x \varepsilon u \,.\, \supset_x .\, fx \cup \varphi x, \; fx \cap \varphi x \;\varepsilon\, \mathrm{K}.$$

De plus; si x, y sont des éléments de u et $x = y$, alors $fx = fy$, $\varphi x = \varphi y$, et les sommes et les produits des classes fx, φx, fy, φy sont égaux. C'est-à-dire

(2) $x . \varphi \varepsilon u . x = y . \supset_{x,y} . fx \cup \varphi x = fy \cup \varphi y . fx \cap \varphi x = fy \cap \varphi y.$

On sait bien que (Form. I §5 P1,2) nous disons, p. ex., f est une correspondance (*univoque*) parmi les u et des classes, ou, f est une classe fonction des u, lorsque: quelque soit l' x de u, fx est une classe déterminée, et lorsque aux éléments égaux entre eux de u correspondent de classes égales».

Les hypothèses précédentes restent, si quel que soit l' x de u nous écrivons à la place de $fx \cup \varphi x$ le signe $(f \cup \varphi)x$, alors il suit: 1., par la (1) que $(f \cup \varphi)x$ est une classe quelque soit l' x de u; 2., par la (2) que $(f \cup \varphi)x = (f \cup \varphi)y$ quel que soient les éléments égaux x, y de u.

Donc on peut considérer $f \cup \varphi$ comme un signe de correspondance univoque entre les u et des classes.

Nous pouvons faire des considérations semblables en écrivant $(f \cap \varphi)x$ à la place de $fx \cap \varphi x$ quel que soit l' x de u.

Nous exprimons en symboles les choses précédentes en écrivant

$u \varepsilon \mathrm{K} . f, \varphi \varepsilon \mathrm{K}fu . \supset \therefore$

8. $x \varepsilon u . \supset_x . (f \cup \varphi)x = fx \cup \varphi x,$ Def

9. $f \cup \varphi \varepsilon \mathrm{K}fu$

[(α). Hp. P8. Form. I §1 P30 $\therefore \supset \therefore x \varepsilon u . \supset_x : (f \cup \varphi)x = fx \cup \varphi x . fx \cup \varphi x \varepsilon \mathrm{K}$. Form. I §4 P10 $\therefore \supset \therefore x \varepsilon u . \supset_x . (f \cup \varphi)x \varepsilon \mathrm{K},$

(β). Hp. P8. Form. I §2 P9,12; §4 P10 $\therefore \supset \therefore x, y \varepsilon u . x = y . \supset_{x,y} . (f \cup \varphi)x = (f \cup \varphi)y$

Hp. (α). (β). Form. I §5 P1,2 : $\supset$: Ts],

10. $x \varepsilon u . \supset_x . (f \cap \varphi)x = fx \cap \varphi x,$ Def

11. $f \cap \varphi \varepsilon \mathrm{K}fu.$

Nous conviendrons encore d'exprimer que, quel que soit l' x de u, la classe fx est contenue dans la classe φx, $(fx \supset \varphi x)$, en écrivant $f \supset \varphi$. C'est-à-dire nous mettons, en sousentendant l'hypothèse commune aux P8—11,

12. $f \supset \varphi . = : x \varepsilon u . \supset_x . fx \supset \varphi x.$ Def

Conservons à u, f la signification précédente. Nous avons établi d'indiquer (Form. I §5 P3) avec fu la classe dont les éléments sont les valeurs que fx prend lorsque x prend toutes les valeurs de la classe u. Etant f une classe fonction des u, fu est un ensemble d'ensembles

et donc $\cup' fu$ est une classe. Nous avons démontré (Sul limite ... Atti. Accademia. Torino. l. c. pag. 7) que

(3) $$\cup' fu = \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u \cdot x\varepsilon fy \cdot - =_x \Lambda\}\,.$$

Également pour la classe $\cap' fu$ on a

(4) $$\cap' fu = \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u \,.\, \supset_y .\, x\varepsilon fy\}\,.$$

Nous omettons la démonstration de cette proposition puisqu'elle est tout à fait semblable à celle de la proposition (3).

Ayant u, f, φ la signification indiquée dans l'Hp. commune aux P8—12, nous nous proposons d'établir les relations qui existent entre les classes $\cup'(f\cup\varphi)u$, $\cap'(f\cup\varphi)u$, ... $\cup' fu$, $\cup'\varphi u$, ... ayant pour les P8—11 les prémiers de ces signes, reçu une exacte signification. —

$u\varepsilon\mathrm{K} \,.\, f,\, \varphi\varepsilon\mathrm{K}fu \,.\supset \therefore$

13. $\cup'(f\cup\varphi)u = (\cup' fu) \cup (\cup'\varphi u)$

[Hp. P9, (3) $:\supset: \cup'(f\cup\varphi)u = \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u \cdot x\varepsilon(f\cup\varphi)y \cdot - =_y \Lambda\}\,.$
P8. Form I §4 P4 $:\supset: \cup'(f\cup\varphi)u$
$= \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u . x\varepsilon fy : \cup : y\varepsilon u . x\varepsilon\varphi y : - =_y \Lambda\}$. Form. I §3 P10 $:\supset:$
$\cup'(f\cup\varphi)u = \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u . x\varepsilon fy . - =_y \Lambda : \cup : y\varepsilon u . x\varepsilon\varphi y . - =_y \Lambda\}\,.$
P (3) $:\supset:$ Ts],

14. $\cap'(f\cap\varphi)u = (\cap' fu) \cap (\cap'\varphi u)$

[Hp. P11, (4) $:\supset: \cap'(f\cap\varphi)u = \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u . \supset_y . x\varepsilon(f\cap\varphi)y\}$. P10.
Form. I §1 P36 $:\supset: \cap'(f\cap\varphi)u$
$= \overline{x\varepsilon}\,\{y\varepsilon u . \supset_y . x\varepsilon fy : y\varepsilon u . \supset_y . x\varepsilon\varphi y\}$. P (4) $:\supset:$ Ts].

15. $f \supset \varphi \,.\supset.\, \cup' fu \supset \cup'\varphi u$

[Hp. P8, 12. Form. I §2 P16 $:\supset: \varphi = f\cup\varphi$. P13 $:\supset: \cup'\varphi u$
$= (\cup' fu) \cup (\cup'\varphi u)$. Form. I §2 P16 $:\supset:$ Ts],

16. $f \supset \varphi \,.\supset.\, \cap' fu \supset \cap'\varphi u$

[Hp. P10, 12. Form. I §1 P33 $:\supset: f = f\cap\varphi$. P14 $:\supset: \cap' fu$
$= (\cap' fu) \cap (\cap'\varphi u) :\supset:$ Ts],

17. $\cup'(f\cap\varphi)u \supset (\cup' fu) \cap (\cup'\varphi u)$

[Hp. P10, 12. Form. I §1 P5 $:\supset: f\cap\varphi \supset f \,.\, f\cap\varphi \supset \varphi$. P15.
Form. I §1 P36 $:\supset:$ Ts],

18. $(\cap' fu) \cup (\cap'\varphi u) \supset \cap'(f\cup\varphi)u$

[Hp. P8, 12. Form. I §2 P15 $:\supset: f \supset f\cup\varphi \,.\, \varphi \supset f\cup\varphi$. P16.
Form. I §2 P17 $:\supset:$ Ts].

Entre les P 13—18 que nous venons de démontrer et les P 1—6 de la partie (a) (de ce § 2), il y a de l'analogie mais non pas d'identité. Le manque d'identité est produit par le fait que la classe, p. ex., $(f \cup \varphi)u$, n'est pas égale à la classe $fu \cup \varphi u$. En effet si y est un élément de u, alors x est un élément de $(f \cup \varphi)u$ lorsque $x = fy \cup \varphi y$, tandis que x est un élément de $fu \cup \varphi u$ lorsque $x = fy$ ou $x = \varphi y$.

(c)

Soient u, v, w des classes quelconques. Soit f une correspondance univoque entre les u et les v; et φ une correspondance entre les v et les w, $(f \varepsilon v f u . \varphi \varepsilon w f v)$. Si x est un élément de u, fx est un élément de v, et $\varphi(fx)$ un élément de w. Il est aisé de reconnaître qu'au moyen des correspondances univoques f, φ on établit une correspondance, pareillement univoque, entre les u et les w telle qu'à chaque élément x de u elle fait correspondre l'élément $\varphi(fx)$ de w. Nous indiquons (Form. I §5) par φf le signe d'une telle fonction, c'est-à-dire nous admettons que les notations $\varphi(fx)$, $(\varphi f)x$, $\varphi f x$ ont une même signification.

Soit à présent u une classe de nombres complexes d'ordre m, $(u \varepsilon \mathrm{K}\mathrm{q}_m)$, et f une classe de nombres complexes d'ordre n fonction des u, $\big(f \varepsilon (\mathrm{K}\mathrm{q}_n) \mathrm{f} u\big)$. Si x est un élément quelconque de la classe u, fx est une classe de q_n, dont la classe dérivée, selon Cantor, est indiquée par $D(fx)$, (Form. V §5 P 1). $D(fx)$ indique aussi une classe de q_n; à des classes égales de q_n correspondent des classes dérivées égales; et donc D est un signe de correspondance univoque entre des classes de q_n et des classes de q_n. D'après tout ce qu'on a dit précédemment, nous pouvons affirmer que Df est une classe fonction des u, c'est-à-dire Df est un signe de correspondance univoque entre les u et les classes de q_n. Les mêmes hypothèses subsistant, il est connu que nous indiquons par $C(fx)$ la classe fx fermée, (Form. V §7 P 1,2) et précisément la classe $fx \cup D(fx)$. De ce qui précède il résulte que Cf est une classe de q_n fonction des u. De plus, étant $Cfx = fx \cup Dfx$, pour tout ce que nous avons dit dans la partie (b) de ce §, le signe Cf est identique au signe $f \cup Df$.

Subsistant encore les hypothèses précédentes, fu est un ensemble d'ensembles; et Dfu est aussi un ensemble d'ensembles. En Dfu nous entendons que les signes D, f, u sont séparés ainsi $(Df)u$. Le signe $D(fu)$ a-t-il quelque signification?

D'après sa définition, le signe D est une classe fonction de classe, et pour cette raison D est aussi un ensemble d'ensembles, fonction d'ensembles d'ensembles. En effet étant a, b des classes quelconques et f un b fonction des a, selon la signification donnée à fa (Form. I §5 P 3), et expliquée déjà plusieurs fois, f indique aussi une classe de b fonction de classe de a $\big(f \varepsilon (\mathrm{K}b) \mathrm{f} (\mathrm{K}a)\big)$, et aussi ensemble d'en-

sembles de b fonction d'ensemble d'ensembles de a, $\big(f \varepsilon \mathrm{K}(\mathrm{K}b)\mathrm{f}\mathrm{K}(\mathrm{K}a)\big)$, et ainsi de suite.

Donc $D(fu)$ indique l'ensemble dont les éléments sont les classes dérivées de chaque classe de fu, et donc par les signes Dfu $\big($ou $(Df)u\big)$, $D(fu)$ nous indiquons le même ensemble d'ensembles de q_n. Pour les fonctions Df, Cf on a les propriétés suivantes

$$m, n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, u \varepsilon \mathrm{Kq}_m \,.\, f \varepsilon (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}u \,.\, \supset \therefore$$

19. $\cup'(Dfu) \supset D(\cup' fu)$

$[(\alpha)$. Hp. Form. V §1 P10 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon fy \,.\, -=_y \Lambda : \supset_x : x \varepsilon \cup' fu$.
Int Form. §18 P10. Form I §1 P39 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y : x \varepsilon fy$
$. \supset_x . \, x \varepsilon \cup' fu$. Form. I §4 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, fy \supset \cup' fu$.
Hp. (α). Form. V §5 P9 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, Dfy \supset D(\cup' fu)$.
Form. I §4, §1 P39 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon Dfy \,.\, \supset_{x,y} . \, x \varepsilon D(\cup' fu)$.
Int Form. §18 P10 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon Dfy \,.\, -=_y \Lambda$
$: \supset_x : x \varepsilon D(\cup' fu)$. Form. V §1 P10 $\therefore \supset \therefore x \varepsilon \cup'(Dfu)$
$. \supset_x . \, x \varepsilon D(\cup' fu) \therefore \supset \therefore$ Ts],

20. $D(\cap' fu) \supset \cap'(Dfu)$

$[(\alpha)$. Hp. Form. V §1 P9 $\therefore \supset \therefore x \varepsilon (\cap' fu) \,.\, \supset_x : y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, x \varepsilon fy$.
Form. I §1 P39 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y : x \varepsilon (\cap' fu) \,.\, \supset_x . \, x \varepsilon fy$.
Form. I §4 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, \cap' fu \supset fy$.
Hp. (α). Form. V §5 P9 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, D(\cap' fu) \supset Dfy$.
Form. I §4, §1 P39 $\therefore \supset \therefore y \varepsilon u \,.\, x \varepsilon D(\cap' fu) \,.\, \supset_{x,y} . \, x \varepsilon Dfy$
$\therefore \supset \therefore x \varepsilon D(\cap' fu) \,.\, \supset_x : y \varepsilon u \,.\, \supset_y . \, x \varepsilon Dfy$. Form. V §1 P9
$\therefore \supset \therefore x \varepsilon D(\cap' fu) \,.\, \supset_x . \, x \varepsilon \cap'(Dfu) \therefore \supset \therefore$ Ts],

21. $\cup'(Cfu) \supset C(\cup' fu)$

$[(\alpha)$. Hp. Form. I §5 P12, V §7 P2. P8 $: \supset : Cf = f \cup Df$
Hp. P19 $: \supset : (\cup' fu) \cup (\cup' Dfu) \supset (\cup' fu) \cup D(\cup' fu)$. P13.
Form. V §7 P2 $: \supset : \cup'(f \cup Df)u \supset C(\cup' fu) \,.\, (\alpha) : \supset :$ Ts],

22. $C(\cap' fu) \supset \cap'(Cfu)$

[Hp. P20 $: \supset : (\cap' fu) \cup D(\cap' fu) \supset (\cap' fu) \cup (\cap' Dfu)$. P18.
Form. V §7 P2 $: \supset : C(\cap' fu) \supset \cap'(f \cup Df)u$. (α) P21 $: \supset :$ Ts].

§ 3.

(a)

Appliquons à la limite des classes variables les propriétés des ensembles d'ensembles démontrées dans le § précédent.

Soit u une classe de nombres complexes d'ordre m, et f, φ des classes de nombres complexes d'ordre n fonction des u. Moyennant les conventions faites dans le § 2, $f \cup \varphi$, $f \cap \varphi$ sont des classes de nombres complexes d'ordre n fonction des u. Etant x_0 un élément de la classe dérivée de u nous pouvons considérer les classes

$$\lim_u (f \cup \varphi) x_0, \quad \lim_u (f \cap \varphi) x_0 .$$

Nous nous proposons d'établir les relations entre ces classes et les classes $\lim_u f x_0$, $\lim_u \varphi x_0$.

$$m, n \,\varepsilon\, \mathrm{N} \,.\, u \,\varepsilon\, \mathrm{Kq}_m \,.\, f, \varphi \,\varepsilon\, (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}u \,.\, x_0 \,\varepsilon\, Du \,.\, \supset \therefore$$

1. $\lim_u (f \cup \varphi) x_0 = \lim_u f x_0 \cup \lim_u \varphi x_0$

[(α). Hp. $\psi \,\varepsilon\, (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}u \,.\, h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset : A_\psi = \cup ' \psi \big(u \cap (x_0 + \Theta \overline{\mathrm{m}} h)\big)$ (Def)

(β). Hp. Form V §5 P4. $h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} : \supset : f, \varphi \,\varepsilon\, (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f} \big(u \cap (x_0 + \Theta \overline{\mathrm{m}} h)\big) \cdot$ §2 P13. (α) $\cdot \supset : A_{f \cup \varphi} = A_f \cup A_\varphi$. Form. V §7 P4 $: \supset : C A_{f \cup \varphi} = C A_f \cup A_\varphi$

(γ). Hp. $\psi \,\varepsilon\, (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}u$. (α) $\therefore \supset \therefore B_\psi . = : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y - \varepsilon\, C A_\psi . =_h \Lambda$ (Def)

(δ). Hp. (α). (β). (γ). Form. I §2 P7 $:: \supset :: B_{f \cup \varphi} . = : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y - \varepsilon\, C A_f \,.\, y - \varepsilon\, C A_\varphi . =_h \Lambda$. Int Form. §18 P9 $:: \supset :: B_{f \cup \varphi} . = \therefore h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y - \varepsilon\, C A_f . =_h \Lambda : \cup : h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y - \varepsilon\, C A_\varphi . =_h \Lambda \cdot$ (γ) $:: \supset :: B_{f \cup \varphi} = B_f \cup B_\varphi$,

(ε). Hp. (α). (α). Form. I §3 P8. §1 P2 $: \supset : \lim_u \psi x_0 = \mathrm{q}_n \cap \overline{y \varepsilon} \{ h \,\varepsilon\, \mathrm{Q} \,.\, y - \varepsilon\, C A_\psi . =_h \Lambda \} \cdot$ (γ) $: \supset : \lim_u \psi x_0 = \mathrm{q}_n \cap \overline{y \varepsilon} (B_\psi)$.

Hp. (ε) $: \supset : \lim_u (f \cup \varphi) x_0 = \mathrm{q}_n \cap \overline{y \varepsilon} (B_{f \cup \varphi})$. ($\delta$) $: \supset : \lim_u (f \cup \varphi) x_0 = \big(\mathrm{q}_n \cap \overline{y \varepsilon}(B_f)\big) \cup \big(\mathrm{q}_n \cap \overline{y \varepsilon}(B_\varphi)\big)$. ($\varepsilon$) $: \supset :$ Ts],

2*. $f \supset \varphi \cdot \supset \cdot \lim_u f x_0 \supset \lim_u \varphi x_0$ (Peano. Math. Ann. §e P5)

[Hp. §2 P8, 12 $: \supset : \varphi = f \cup \varphi$. P1 $: \supset : \lim_u \varphi x_0 = \lim_u f x_0 \cup \lim_u \varphi x_0 : \supset :$ Ts],

3*. $\lim_u (f \cap \varphi) x_0 \supset \lim_u f x_0 \cap \lim_u \varphi x_0$ (Peano. Math. Ann. §e P6)

[Hp. §2 P10, 12 $: \supset : f \cap \varphi \supset f \cdot f \cap \varphi$. P2* $: \supset :$ Ts].

D'autres propriétés nombreuses, dont nous allons exposer les principales, sont des conséquences de la P1 et des formules du §2.

(b)

Soit u une classe de nombres complexes d'ordre m, f une classe de nombres complexes d'ordre n fonction des u, et x_0 un élément de la classe dérivée de u. Nous nous proposons d'établir les relations entre les classes $\lim_u fx_0$, $\lim_u Dfx_0$, $\lim_u Cfx_0$, $D \lim_u fx_0$, ...

$$m, n \varepsilon \mathrm{N} \,.\, u \varepsilon \mathrm{K}\, \mathrm{q}_m \,.\, f \varepsilon (\mathrm{Kq}_u)\mathrm{f}u \,.\, x_0 \varepsilon Du \,.\, Ɔ \therefore$$

4. $\lim_u Dfx_0 \,Ɔ\, \lim_u fx_0$

[(α). Hp. Form. V §7 P2 : $Ɔ : Cu = u \cup Du$. Form. V §7 P3,4 $: Ɔ : Cu = Cu \cup CDu : Ɔ : CDu \,Ɔ\, Cu$.

(β). Hp. $h \varepsilon \mathrm{Q} : Ɔ : u_h = u \cap (x_0 + \Theta \overline{\mathrm{m}}\, h) . \psi_f h = C(\cup' f u_h)$. (Def)

(γ). Hp(β). (β) : $Ɔ : \psi_{Df} h = C[\cup' (Dfu_h)]$. §2 P19 : $Ɔ : \psi_{Df} h \,Ɔ\, CD(\cup' fu_h)$. ($\alpha$) : $Ɔ : \psi_{Df} h \,Ɔ\, C(\cup' fu_h)$. ($\beta$) : $Ɔ : \psi_{Df} h \,Ɔ\, \psi_f h$.

(δ). Hp. (γ) : $Ɔ : h \varepsilon \mathrm{Q} \,.\, Ɔ_h \,.\, \psi_{Df} h \,Ɔ\, \psi_f h$. §2 P12 : $Ɔ : \psi_{Df} \,Ɔ\, \psi_f$. §2 P16. ($\beta$) : $Ɔ : \cap' \psi_{Df} \mathrm{Q} \,Ɔ\, \cap' \psi_f \mathrm{Q}$.
Hp. (β). §1 P3 : $Ɔ : \lim_u Dfx_0 = \cap' \psi_{Df} \mathrm{Q} \,.\, \lim_u fx_0 = \cap' \psi_f \mathrm{Q}$. (δ) : $Ɔ$: Ts].

5. $\lim_u Cfx_0 = \lim_u fx_0$

[Hp. §2 P10,12. Form. V §7 P2 : $Ɔ : Cf = f \cup Df$. P1 : $Ɔ : \lim_u Cfx_0 = \lim_u fx_0 \cup \lim_u Dfx_0$. P4 : $Ɔ$: Ts].

6. $f \,Ɔ\, Df \,.\, Ɔ \,.\, \lim_u fx_0 = \lim_u Dfx_0$

[Hp. Form, V §7 P2 : $Ɔ : Cf = Df$. P5 : $Ɔ$: Ts].

7*. $C \lim_u fx_0 = \lim_u fx_0$ (Peano. Math. Ann. §e P8)

[Hp (β). P4. §1 P3 : $Ɔ : C \lim_u fx_0 = C(\cap' \psi_f \mathrm{Q})$. §2 P22 $: Ɔ : C \lim_u fx_0 \,Ɔ\, \cap' (C\psi_f \mathrm{Q})$. Form. V §7 P3. ($\beta$) P4 $: Ɔ : C \lim_u fx_0 \,Ɔ\, \cap' \psi_f \mathrm{Q}$. §1 P3 : $Ɔ : C \lim_u fx_0 \,Ɔ\, \lim_u fx_0$. Form. V §7 P2 : $Ɔ$: Ts].

$$r \varepsilon \mathrm{N} \,.\, x_0 \varepsilon D^r u \,.\, Ɔ :$$

8. $\lim_u{}^r Dfx_0 \,Ɔ\, \lim_u fx_0$

[Hp. §1 P5 : $Ɔ : \lim_u{}^r Dfx_0 \,Ɔ\, \lim_u Dfx_0$. P4 : $Ɔ$: Ts].

9. $\lim_u{}^r Cfx_0 \supset \lim_u fx_0$

$[\mathrm{Hp}.\ \S 1\ \mathrm{P}5 : \supset : \lim_u{}^r Cfx_0 \supset \lim_u Cfx_0 .\ \mathrm{P}5 : \supset : \mathrm{Ts}].$

10. $C \lim_u{}^r fx_0 \supset \lim_u fx_0$

$[\mathrm{Hp}.\ \S 1\ \mathrm{P}5 : \supset : \lim_u{}^r fx_0 \supset \lim_u fx_0 .\ \mathrm{Form.V}\ \S 7\ \mathrm{P}5.\ \mathrm{P}7 : \supset : \mathrm{Ts}].$

(c)

Soient u, v des classes de nombres complexes d'ordre m et f une classe de nombres complexes d'ordre n fonction des $u \cup v$.

Celà admis, il résulte (Form.I §5 P4,8) que f est une classe de q_n fonction des u et des v. Si alors x_0 est un élément de la classe dérivée de u et de v nous pouvons considérer les classes $\lim_{u \cup v} fx_0$, $\lim_{u \cap v} fx_0$, $\lim_u fx_0$, $\lim_v fx_0$. Nous nous proposons maintenant de déterminer des relations entre ces classes

$$m, n \varepsilon \mathrm{N} .\ u, v \varepsilon \mathrm{Kq}_m .\ f \varepsilon (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}(u \cup v) .\ x_0 \varepsilon Du \cap Dv . \supset \therefore$$

11. $\lim_{u \cup v} fx_0 = \lim_u fx_0 \cup \lim\ fx_0$

$[(\alpha).\ \mathrm{Hp}.\ w \varepsilon \mathrm{Kq}_m \cdot f \varepsilon (\mathrm{Kq}_n)\mathrm{f}w .\ x_0 \varepsilon Dw .\ h \varepsilon \mathrm{Q} : \supset : A_w$
$= w \cap (x_0 + \Theta \overline{\mathrm{m}} h)$ (Def)

$(\beta).\ \mathrm{Hp}.\ (\alpha) : \supset : A_{u \cup v} = A_u \cup A_v .\ \mathrm{Form.I}\ \S 5\ \mathrm{P}9 : \supset : fA_{u \cup v}$
$= fA_u \cup fA_v .\ \S 2\ \mathrm{P}1 : \supset : \cup' fA_{u \cup v} = (\cup' fA_u) \cup (\cup' fA_v).$

$(\gamma).\ \mathrm{Hp}\ (\alpha).\ (\alpha).\ \S 1\ \mathrm{P}4 : \supset : \lim_w fx_0 = \lim_{h, \mathrm{Q}, 0} \cup' fA_w .$
$\mathrm{Hp}.\ (\alpha).\ (\beta).\ (\gamma) : \supset : \lim_{u \cup v} fx_0 = \lim_{h, \mathrm{Q}, 0} \cup' fA_{u \cup v} .\ (\beta) :$
$\supset : \lim_{u \cup v} fx_0 = \lim_{h, \mathrm{Q}, 0} \big((\cup' fA_u) \cup (\cup' fA_v)\big) .\ \mathrm{P}1 : \supset : \lim_{u \cup v} fx_0$
$= (\lim_{h, \mathrm{Q}, 0} \cup' fA_u) \cup (\lim_{h, \mathrm{Q}, 0} \cup' fA_v) .\ (\gamma) : \supset : \mathrm{Ts}].$

12. $u \supset v . \supset . \lim_u fx_0 \supset \lim_v fx_0$

$[\mathrm{Hp}. : \supset : v = u \cup v .\ \mathrm{P}11 : \supset : \mathrm{Ts}].$

13. $\lim_{u \cap v} fx_0 \supset \lim_u fx_0 \cap \lim_v fx_0$

$[\mathrm{Hp}. : \supset : u \cap v \supset u .\ u \cap v \supset v .\ \mathrm{P}12 : \supset : \mathrm{Ts}].$

14. $\lim_u fx_0 -\!= \Lambda .\ \lim_v fx_0 -\!= 0 .\ a \varepsilon \mathrm{q}_n . \supset \therefore \lim_{u \cup v} fx_0 = \iota a .$
$= : \lim_u fx_0 = \iota a .\ \lim_v fx_0 = \iota a$

$[(\alpha).\ r, s \varepsilon \mathrm{K} .\ r -\!= \Lambda .\ s -\!= \Lambda . \supset \therefore r \cup s = \iota x . = : r = \iota x$
$. s = \iota x$

$\mathrm{Hp}.\ (\alpha) \therefore \supset \therefore \lim_u fx_0 \cup \lim_v fx_0 = \iota a . = : \lim_u fx_0$
$= \iota a .\ \lim_v fx_0 = \iota a .\ \mathrm{P}11 \therefore \supset \therefore \mathrm{Ts}].$

Nous allons faire quelques observations sur la P14. En écrivant, par exemple, $\lim_u fx_0 = \iota a$ nous exprimons que la classe $\lim_u fx_0$

contient le seul élément a; en effet, si nous opérons dans les deux membres avec $x\,\varepsilon$, et si nous nous souvenons que $\varepsilon\iota$ est équivalent au signe $=$, nous avons $x\,\varepsilon\,\lim_a fx_0 \,.=.\, x = a$, qui exprime « dire que x est un élément de la classe $\lim_u fx_0$ c'est la même chose que dire que x est égal à a». Par la P14 nous exprimons que: «Si les classes $\lim_u fx_0$, $\lim_v fx_0$ contiennent des éléments et a est un nombre complexe d'ordre n, alors dire que la classe $\lim_{u\cup v} fx_0$ contient le seul élément a c'est la même chose que dire que chacune des classes $\lim_u fx_0$, $\lim_v fx_0$ contient le seul élément a».

Voilà quelques conséquences de cette proposition que nous mentionnons rapidement. Soient u, v des classes de nombres réels c'est-à-dire mettons $m = 1$) et f une classe de nombres réels fonction des $u \cup v$ (c'est-à-dire mettons $n = 1$). Si la classe p. ex. $\lim_u fx_0$ est définie de manière qu'elle puisse contenir aussi $+\infty$ et $-\infty$, alors

$$\lim_u fx_0 -= \Lambda,$$

c'est-à-dire la classe contient toujours des éléments. (Peano. Am. Jour. pag. 59).

Alors d'après la P14 nous avons

$$u, v\,\varepsilon\,\mathrm{Kq} \,.\, f\,\varepsilon\,\mathrm{qf}\,(u \cup v) \,.\, x_0\,\varepsilon\, u \cap v \cap Du \cap Dv \,.\supset:$$
$$\lim_{u\cup v} fx_0 = \iota fx_0 \,.=.\, \lim_u fx_0 = \iota fx_0 \,.\, \lim_v fx_0 = \iota fx_0 \,.$$

Si à la place de, p. ex, $\lim_u fx_0 = \iota fx_0$ nous lisons «la fonction fx définie en u est *continue* dans le point x_0» la proposition précédente exprime: «Dire que la fonction fx définie en $u \cup v$ est continue dans le point (non isolé) x_0 commun à u et v c'est la même chose que dire que la fonction fx est continue en x_0 soit qu'on la considère définie en u ou en v».

Plus particulièrment encore, si p. ex. la fx est une fonction réelle définie dans un intervalle $a \vdash\!\dashv b$ (ou $a\,b\,\varepsilon\,\mathrm{q}$), alors, nous avons: «Dire que la fonction réelle fx définie dans l'intervalle $a \vdash\!\dashv b$ est continue dans le point x_0 (interne à $a \vdash\!\dashv b$) c'est la même chose que dire qu'elle est continue à droite de x_0 et continue à gauche de x_0».

Les propositions que nous avons exposées dans ce memoir donnent lieu à de nombreuses applications, que nous exposerons ailleurs.

Turin Février 1895.

Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode, welche zu den nämlichen Lösungen führt.

Von

B. Turksma in Amsterdam.

Die Beweise, welche man für die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung gewöhnlich giebt, sind nicht entscheidend*), weil man bloss zeigt, dass die gefundenen Lösungen den Forderungen des Problems genügen, nicht aber dass sie die einzigen sind. Der Vergleich der Lagrange'schen Methode mit einer im Folgenden entwickelten neuen Methode wird aber zeigen, dass sie wirklich alle Lösungen des Problems liefert.

Die Lagrange'sche Methode.

1. Man kann bekanntlich immer voraussetzen, dass sowohl in dem gegebenen Integrale als auch in den Bedingungsgleichungen von den unbekannten Functionen keine höheren Differentialquotienten als die ersten auftreten. Kommen nämlich ursprünglich höhere Differentialquotienten vor, so braucht man nur die niederen Differentialquotienten einer jeden unbekannten Function neuen abhängigen Variabeln gleichzusetzen und dafür diese Definitionsgleichungen dem Problem als neue

*) Indessen müssen wir A. Mayer's „Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung" Math. Ann. Bd. 26, S. 74 (1886) ausnehmen. Seine völlig befriedigende Begründung war uns unbekannt als wir, von der Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Behandlungsweise der Lagrange'schen Methode überzeugt, den auch von ihm angestrebten Zweck zu erreichen versuchten. Weil uns das nun auf so ganz verschiedenem Wege gelungen ist, halten wir es nicht für nutzlos, auch unsere Methode der Oeffentlichkeit zu übergeben. So wie wir, hat Mayer erkannt, dass es darauf ankommt, die Bedingung, dass nicht allein die $n-m$ unabhängigen Variationen, sondern auch die m übrigen an den Grenzen Null werden sollen, in Rechnung zu bringen, und er hat das wirklich mittelst seiner Gleichungen (10) und (12) gethan.

Bedingungsgleichungen hinzuzufügen. Dann erhält man wieder den früheren Fall. Wir stellen daher das Problem also:

Gegeben ist

$$(1)\qquad V=\int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')\, dx,$$

wo die Accente Differentiationen nach x bezeichnen und die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ m gegebenen Gleichungen:

$$(2)\qquad \Phi_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n')=0, \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

unterworfen sind. Die Grenzen x_1 und x_2, sowie die Anfangs- und Endwerthe der Functionen y sind entweder fest gegeben oder veränderlich. Im letzteren Falle sind in der Regel auch diesen Grössen gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschrieben.

Es fragt sich, welche Functionen von x hat man für die y zu setzen, damit V stationär werde?

Nach der Lagrange'schen Methode bildet man:

$$(3)\qquad V=\int_{x_1}^{x_2}\left(F+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\Phi_i\right)dx$$

und

$$(4)\qquad \delta V=\left|\left(F+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\Phi_i\right)dx+\right|_{x_1}^{x_2}\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k'}\right)\delta y_k$$

$$+\int_{x_1}^{x_2}dx\sum_{k=1}^{k=n}\delta y_k\left\{\frac{\partial F}{\partial y_k}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k'}\right)\right\},$$

und sagt nun gewöhnlich: Damit V stationär sei, muss es es auch sein, wenn man die Grenzen festhält, in welchem Falle δV sich auf das letzte Integral von (4) reducirt. Man kann dann die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ so bestimmen, dass die Coefficienten von m von den Variationen δy verschwinden. Das Integral enthält dann nur $n-m$ Variationen, und weil zwischen den n Variationen nur diejenigen m Bedingungen bestehen, welche durch Variation aus den Gleichungen (2) entspringen, kann man die $n-m$ übrigen als ganz willkürlich betrachten. Man erhält so die n Gleichungen

$$(5)\qquad \frac{\partial F}{\partial y_k}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k'}\right)=0 \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

welche mit den m Gleichungen (5) zusammen $n+m$ simultane Differentialgleichungen bilden.

2. Die also gefundenen Lösungen werden gewiss den Forderungen des Problems genügen, weil man dafür gesorgt hat, dass sie δV zum Verschwinden bringen, so dass die durch die Lagrange'sche Methode erhaltenen Lösungen ohne Zweifel richtig sind. Die Beweisführung giebt aber keine Sicherheit, dass sie die einzig möglichen Lösungen sind. Denn, wenn man die Grenzen festhalten will, hat man kein Recht zu sagen, dass die $n-m$ übrigen Variationen ganz willkürlich genommen werden können, da nicht bloss diese Variationen selbst an den Grenzen Null werden müssen, sondern auch die m übrigen Variationen, welche mit ihnen durch die, aus der Variation von (2) entspringenden Gleichungen verbunden sind, von dem Werthe *Null* an der einen Grenze zum Werthe *Null* an der zweiten Grenze gehen müssen. Es ist klar, dass dies im Allgemeinen nicht erreicht werden kann, wenn die $n-m$ Variationen vollkommen willkürlich gewählt sind; denn die variirten Gleichungen (2) sind bei gegebenen Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \ldots, \delta y_{n-m}$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $\delta y_{n-m+1}, \ldots, \delta y_n$. Ihre Lösung enthält also nur m Constanten, welche Zahl nicht hinreichend ist, den $2m$ Bedingungen (dass die Anfangs- und Endwerthe der Variationen $\delta y_{n-m+1}, \ldots, \delta y_n$ Null sein sollen) zu genügen.

Da also diese Variationen nicht ganz willkürlich genommen werden können, so hat man auch keine Sicherheit, dass ihre Coefficienten einzeln Null sein müssen. Es wäre ja möglich, dass es Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ gäbe, für welche

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n-m} \delta y_k \left\{\frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k'}\right)\right\}$$

Null wäre, wenn man diese zwischen den Variationen $\delta y_1, \ldots, \delta y_n$ bestehende Abhängigkeit berücksichtigt, aber nicht Null, wenn dieselbe ausser Acht gelassen wird, und diese Lösungen wären mit der Lagrange'schen Methode nicht zu finden.

3. Bevor wir an eine genauere Behandlung des Problems gehen, aus der erhellen wird, dass solche Lösungen nicht existiren, wollen wir im einfachsten Falle, d. h. bei zwei unbekannten Functionen mit einer Bedingungsgleichung

$$\Phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0, \tag{6}$$

zeigen, wie wenig Freiheit man in der Wahl der Variation δy_1 hat, wenn die Anfangs- und Endwerthe von δy_1 und δy_2 Null sein sollen. Nehmen wir nämlich an, dass nur zwischen zwei nahe an einander liegenden Werthen ξ_1 und ξ_2 von x variirt wird, indem der übrige Theil des Integrals ungeändert bleibt, so darf man bekanntlich in der variirten Gleichung (6)

$$(7) \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial y_2}\delta y_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial y_1'}\delta y_1' + \frac{\partial\Phi}{\partial y_2'}\delta y_2'$$
$$\equiv A_1\delta y_1 + A_2\delta y_2 + B_1\delta y_1' + B_2\delta y_2' = 0$$

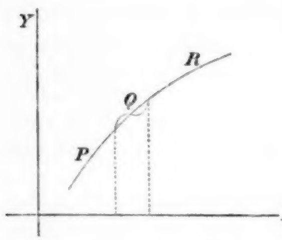
in erster Annäherung δy_1 und δy_2 vernachlässigen gegen $\delta y_1'$ und $\delta y_2'$, und A_1, A_2, B_1 und B_2 als Constanten betrachten. Man hat dann in erster Annäherung

$$\delta y_2' = -\frac{B_1}{B_2}\delta y_1',$$

also

$$\delta y_2' = -\frac{B_1}{B_2}\delta y_1 + \eta$$

(wobei η eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist). Durch Substitution dieses Werthes von δy_1 in (7) erhält man zur Bestimmung von η, weil auch der Anfangs- und Endwerth von η Null sein muss und also η wieder klein ist gegen η',



$$B_2\eta' + \frac{A_1B_2 - A_2B_1 - B_2\dfrac{d}{dx}\dfrac{B_1}{B_2}}{B_2}\,\delta y_1 = 0,$$

oder

$$\eta = -\int_{\xi_1}^{x}\frac{A_1B_2 - A_2B_1 - B_2\dfrac{d}{dx}\dfrac{B_1}{B_2}}{B_2^2}\,\delta y_1\,dx,$$

also ist für $\xi_1 < x \leqq \xi_2$ angenähert:

$$(8) \qquad \delta y_2 = -\frac{B_1}{B_2}\delta y_1 - \frac{A_1B_2 - A_2B_1 - B_2\dfrac{d}{dx}\dfrac{B_1}{B_2}}{B_2^2}\int_{\xi_1}^{x}\delta y_1\,dx.$$

Damit daher δy_2 ebenso wie δy_1 Null sei für $x = \xi_2$, muss δy_1 so genommen werden, dass annähernd $\int_{\xi_1}^{\xi_2}\delta y_1\,dx = 0$, d. h. dass der Inhalt des Stückchens über der ursprünglichen Curve PQR gleich demjenigen wird, welches darunter liegt*). (Siehe Figur.)

*) Diese Bedingung zeigt zugleich den Fehler in der folgenden Entwicklung, welche beim ersten Anblick richtig erscheint.

Man soll die Functionen y_1 und y_2 bestimmen, für welche, bei festen Grenzwerthen,

$$(1) \qquad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,dx$$

stationär wird unter der Bedingung

$$(2) \qquad \Psi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0.$$

Man bringt in der üblichen Weise δV auf die Form:

Die neue Methode und die Identität ihrer Resultate mit denen der Lagrange'schen Methode.

4. Anstatt dass wir nun, wie es Herrn A. Mayer gelungen ist, auf directem Wege die Richtigkeit der Lagrange'schen Methode zu beweisen versuchen, gehen wir dazu über, eine neue von der Lagrange'schen unabhängigen Methode zu entwickeln, die uns zu Lösungen desselben Problems führt. Indem man bei der Lagrange'schen Methode, wie wir zeigten, freier variirt als eigentlich erlaubt ist, sodass richtige Lösungen entschlüpfen können, schränken wir bei der neuen Methode die Variationen mehr als nöthig ein (wenigstens fehlt der Beweis, dass alle erlaubten Arten von Variationen auf diese Weise erhalten werden können) wodurch à priori die Möglichkeit entsteht, dass man Lösungen erhalten könnte, welche wegfallen würden, wenn man die Variationen

---

$$\delta V = \int_{x_1}^{x_2} (P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2)\, dx = 0$$

oder, wenn man die Variationen beschränkt auf ein kleines Stückchen zwischen x und $x + \Delta x$, annähernd

$$\delta V = P_1 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_1\, dx + P_2 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_2\, dx = 0. \tag{3}$$

Man erhält weiter aus (2) durch Variation und Integration

$$\int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx = 0$$

und bringt durch partielle Integration auch dieses Integral auf die Form

$$\int_x^{x+\Delta x} (Q_1 \delta y_1 + Q_2 \delta y_2)\, dx = 0$$

oder annähernd

$$Q_1 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_1\, dx + Q_2 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_2\, dx = 0. \tag{4}$$

Damit (3) und (4) gleichzeitig erfüllt seien, muss nothwendig

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

sein, woraus zusammen mit (2) y_1 und y_2 zu bestimmen wären.

Dieses Resultat ist nicht richtig, eben weil in diesem Falle $\int \delta y_1\, dx$ und $\int \delta y_2\, dx$ in erster Annäherung Null sein müssen.

Man sieht hieraus, dass die Auffassung, die $n - m$ Variationen könnten ganz willkürlich genommen werden, zu falschen Resultaten führen kann, wenn dies auch bei der Ableitung der Lagrange'schen Methode nicht der Fall ist.

nicht so sehr einschränkte. Unter den erhaltenen Lösungen müssen aber die richtigen gewiss vorkommen. Aus dem nachträglichen Beweise, dass die durch die neue Methode erhaltenen Lösungen dieselben sind, welche die Lagrange'sche uns giebt, ergiebt sich dann schliesslich die Richtigkeit von beiden.

Der Grundgedanke der neuen Methode besteht darin, die Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \ldots . \delta y_n$ durch Hülfsfunctionen so auszudrücken dass den variirten Bedingungsdifferentialgleichungen genügt und zugleich die Variation des gegebenen Integrals zum Verschwinden gebracht wird.

Bevor wir die Methode für den allgemeinen Fall von n Functionen und m Bedingungsgleichungen auseinandersetzen, erscheint es uns wünschenswerth, zuerst einige besondere Fälle zu behandeln.

Einfachster Fall, zwei unbekannte Functionen und eine Bedingungsgleichung.

5. Wir haben in diesem Falle die Functionen y_1 und y_2 so zu bestimmen, dass

$$V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\, dx \tag{9}$$

stationär wird unter der Bedingung

$$\Phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0. \tag{10}$$

Schreibt man hier und im Folgenden zu Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial y_k'} = Q_k, \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_k'} = P_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = A_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k'} = B_k,$$

so hat man

$$\delta V = \Big|_{x_1}^{x} F dx + \Big|_{x_1}^{x_2} (Q_1 \delta y_1 + Q_2 \delta y_2) + \int_{x_1}^{x_2} (P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2)\, dx, \tag{11}$$

während die Variation der Gleichung (13) giebt

$$\begin{aligned} & A_1 \delta y_1 + A_2 \delta y_2 + B_1 \delta y_1' + B_2 \delta y_2' \\ & \equiv (A_1 - B_1')\delta y_1 + (A_2 - B_2')\delta y_2 + \frac{d B_1 \delta y_1}{dx} + \frac{d B_2 \delta y_2}{dx} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir setzen jetzt

$$\delta y_1 = \alpha_1 z + \frac{d\beta_1 z}{dx}, \quad \delta y_2 = \alpha_2 z + \frac{d\beta_2 z}{dx} \tag{13}$$

und versuchen die Grössen α und β so zu bestimmen, dass die Gleichung (12) durch die Werthe (13) identisch erfüllt werde.

Durch Substitution dieser Werthe von δy_1 und δy_2 in (12) findet man nach einfachen Reductionen

$$(14)\quad \left\{(A_1-B_1')\alpha_1-(A_1'-B_1'')\beta_1+(A_2-B_2')\alpha_2-(A_2'-B_2'')\beta_2\right\}z$$
$$+\frac{d\,\{B_1\alpha_1+(A_1-2B_1')\beta_1+B_2\alpha_2+(A_2-2B_2')\beta_2\}z}{dx}$$
$$+\frac{d^2(B_1\beta_1+B_2\beta_2)z}{dx^2}=0.$$

Welchen Werth daher z auch habe, wir werden (14) und damit (12) genügen, wenn gleichzeitig

$$(15)\quad (A_1-B_1')\alpha_1-(A_1'-B_1'')\beta_1+(A_2-B_2')\alpha_2-(A_2'-B_2'')\beta_2=0,$$
$$(16)\quad B_1\alpha_1+(A_1-2B_1')\beta_1+B_2\alpha_2+(A_2-2B_2')\beta_2=0,$$

und

$$(17)\quad B_1\beta_1+B_2\beta_2=0$$

ist. Durch dieselbe Substitution (13) nimmt aber (11) die folgende Gestalt an

$$(18)\quad \delta V=\Big|_{x_1}^{x_2} F\,dx+\Big|_{x_1}^{x_2}\left\{Q_1\left(\alpha_1 z+\frac{d\beta_1 z}{dx}\right)+Q_2\left(\alpha_2 z+\frac{d\beta_2 z}{dx}\right)\right\}$$
$$+\int_{x_1}^{x_2} z\,(P_1\beta_1+P_2\beta_2)$$
$$+\int_{x_1}^{x_2} z\,(P_1\alpha_1+P_2\alpha_2-P_1'\beta_1-P_2'\beta_2)\,dx.$$

Damit nun δV verschwinde für alle Variationen (13), deren Coefficienten den Bedingungen (15), (16) und (17) genügen, muss es auch verschwinden, wenn wir die Grenzwerthe fest halten, in welchem Falle δV sich reducirt auf

$$\int_{x_1}^{x_2} z\,(P_1\alpha_1+P_2\alpha_2-P_1'\beta_1-P_2\beta_2)\,dx.$$

Da z über den ganzen Integrationsweg willkürlich genommen werden kann, ausgenommen, dass es an den beiden Grenzen zugleich mit seiner ersten Ableitung Null werden muss, so muss also, damit V stationär sei,

$$(19)\quad P_1\alpha_1+P_2\alpha_2-P_1'\beta_1-P_2'\beta_2=0$$

sein. Sind (15), (16) und (17) erfüllt, so muss (19) es von selbst sein, dies führt zu der Gleichung:

$$(20)\quad \begin{vmatrix} P_1, & P_2, & -P_1', & -P_2', \\ A_1-B_1', & A_2-B_2', & -(A_1'-B_1''), & -(A_2-B_2''), \\ B_1, & B_2, & A_1-2B_1', & A_2-2B_2', \\ 0, & 0, & B_1, & B_2, \end{vmatrix}=0$$

welche mit (10) verbunden y_1 und y_2 bestimmt.

Diese Bedingung (20) kommt nun aber darauf hinaus, dass es 3 Functionen λ, λ_1 und λ_2 giebt, welche den 4 Gleichungen

$$(21)\qquad P_1 + (A_1 - B_1')\lambda + B_1\lambda_1 = 0,$$

$$(22)\qquad P_2 + (A_2 - B_2')\lambda + B_2\lambda_1 = 0,$$

$$(23)\qquad -P_1' - (A_1' - B_1'')\lambda + (A_1 - 2B_1')\lambda_1 + B_1\lambda_2 = 0,$$

$$(24)\qquad -P_2' - (A_2' - B_2'')\lambda + (A_2 - 2B_2')\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 0$$

genügen. Differenzirt man (21), so erhält man

$$P_1' + (A_1' - B_1'')\lambda + (A_1 - B_1')\lambda' + B_1'\lambda_1 + B_1\lambda_1' = 0$$

und hieraus durch Addition von (23)

$$(A_1 - B_1')(\lambda' + \lambda_1) + B_1'(\lambda_1' + \lambda_2) = 0,$$

ebenso ergiebt sich aus (22) und (24)

$$(A_2 - B_2')(\lambda' + \lambda_1) + B_2'(\lambda_1' + \lambda_2) = 0,$$

also folgt, ausser in ganz besonderen Ausnahmefällen,

$$\lambda_1 = -\lambda', \quad \lambda_2 = -\lambda_1' = \lambda'',$$

d. h. die Gleichungen (21) und (22) sind die nämlichen wie die, welche die Lagrange'sche Methode liefert, während aus ihrer Differentiation die Gleichungen (23) und (24) hervorgehen*).

Der Fall von n unbekannten Functionen und einer Bedingungsgleichung.

6. Man hat

$$(25)\qquad \delta V = \Big|_{x_1}^{x_2} F\,dx + \Big|_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta y_k + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n} P_k \delta y_k,$$

und die Bedingungsgleichung

$$(26)\qquad \Phi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') = 0$$

ergiebt:

$$(27)\qquad \sum_{k=1}^{k=n} A_k \delta y_k + \sum_{k=1}^{k=n} B_k \delta y_k' = 0.$$

Wiederum setzen wir

$$(28)\qquad \delta y_k = \alpha_k z + \frac{d\beta_k z}{dx} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und versuchen wieder die Grössen α und β so zu bestimmen, dass der Gleichung (27) genügt werde, welchen Werth z auch habe. Dies fordert

*) Der Gedanke auf diese Weise die Identität der beiden Lösungen zu beweisen, verdanken wir Herrn A. Mayer. Ursprünglich hatten wir einen anderen Weg dazu eingeschlagen.

(29) $$\sum_{k=1}^{k=n}(A_k - B_k')\alpha_k - \sum_{k=1}^{k=n}(A_k' - 2B_k') = 0,$$

(30) $$\sum_{k=1}^{k=n}B_k\alpha_k + \sum_{k=1}^{k=n}(A_k - 2B_k')\beta_k = 0$$

und

(31) $$\sum_{k=1}^{k=n}B_k\beta_k = 0$$

während die Forderung, dass δV gleich Null sei, verlangt

(32) $$\sum_{k=1}^{k=n}P_k\alpha_k - \sum_{k=1}^{k=n}P_k'\beta_k = 0.$$

Sind also (29), (30) und (31) erfüllt, so muss, nach den Bedingungen des Problems, (32) es von selbst sein; dies führt zur Matrixbedingung

(32) $$\left\| \begin{matrix} P_1, & P_2, & \cdots, & -P_1', & \cdots, & -P_n', \\ A_1 - B_1', & A_2 - B_2', & \cdots, & -(A_1' - B_1''), & \cdots, & -(A_n' - B_n''), \\ B_1, & B_2, & \cdots, & A_1 - 2B_1', & \cdots, & A_n - 2B_n', \\ 0, & 0, & \cdots, & B_1, & \cdots, & B_n, \end{matrix} \right\| = 0$$

welche wieder mit (26) zur Bestimmung von $y_1, \ldots, y_n$ genügt.

Um die Identität mit der Lagrange'schen Lösung zu beweisen, bemerken wir wieder, dass diese Matrixbedingung aussagt, dass es 3 Functionen λ, λ_1 und λ_2 giebt, welche den $2n$ Gleichungen

(34) $$P_k + \lambda(A_k - B_k') + \lambda_1 B_k = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

(35) $$-P_k' - \lambda(A_k' - B_k'') + \lambda_1(A_k - 2B_k') + \lambda_2 B_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n)$$

genügen. Differenzirt man (38) und addirt (39) so ergiebt sich

$$(A_k - B_k')(\lambda' + \lambda_1) + B_k(\lambda_1' + \lambda_2) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots n)$$

woraus wieder im Allgemeinen folgt:

$$\lambda_1 = -\lambda', \quad \lambda_2 = -\lambda_1' = \lambda'',$$

d. h. aber nichts anderes als dass die Gleichungen (34) mit denen von Lagrange übereinstimmen.

Der Fall von n unbekannten Functionen und m Bedingungsgleichungen.

7. Man hat wieder

(36) $$\delta V = \Big|_{x_1}^{x_2} F\,dx + \Big|_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta y_k + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n} P_k \delta y_k.$$

während die Variation der m Bedingungsgleichungen giebt

(37) $$\sum_{k=1}^{k=n} A_{ki}\,\delta y_k + \sum_{k=1}^{k=n} B_{ki}\,\delta y'_k = 0. \qquad (i=1,2,\ldots,m)$$

Man setze nun für $k=1,2,\ldots n$

(38) $$\delta y_k = \alpha_{k0} z + \frac{d\alpha_{k1} z}{dx} + \frac{d^2\alpha_{k2} z}{dx^2} + \cdots + \frac{d^s\alpha_{ks} z}{dx^s}$$

und versuche wieder durch Substitution dieser Werthe der δy in (37) die Grössen α so zu bestimmen, dass die Gleichungen (37) von selbst erfüllt werden, welche Function auch für z genommen werden möge.

Nun ist

$$A_k \frac{d\alpha_{k1} z}{dx} = \frac{d}{dx}[A_k \alpha_{k1} z] - A'_k \alpha_{k1} z,$$

$$A_k \frac{d^2\alpha_{k2} z}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[A_k \frac{d\alpha_{k2} z}{dx}\right] - A'_k \frac{d\alpha_{k2} z}{dx}$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}[A_k \alpha_{k2} z] - \frac{d}{dx}[A'_k \alpha_{k2} z] - \frac{d}{dx}[A'_k \alpha_{k2} z] + A''_k \alpha_{k2} z$$

$$= \frac{d^2}{dx^2}[A_k \alpha_{k2} z] - 2\frac{d}{dx}[A'_k \alpha_{k2} z] + A''_k \alpha_{k2} z,$$

und, wie man leicht ersieht, allgemein

$$A_k \frac{d^p\alpha_{kp} z}{dx^p} = \frac{d^p}{dx^p}[A_k \alpha_{kp} z] + (-1)^1 \frac{p}{1} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}}[A_k \alpha_{kp} z]$$

$$+ (-1)^2 \frac{p(p-1)}{1.2} \frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}}[A''_k \alpha_{kp} z] + \cdots$$

$$+ (-1)^q \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q!} \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}}[A_k^{(q)} \alpha_{kp} z] + \cdots$$

folglich

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k\,\delta y_k = z \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s} (-1)^p A_k^{(p)} \alpha_{kp}$$

$$+ \frac{d}{dx}\left[z \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=1}^{p=s} (-1)^{p-1} \cdot \frac{p}{1} \cdot A_k^{(p-1)} \alpha_{kp}\right]$$

$$+ \frac{d^2}{dx^2}\left[z \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=2}^{p=s} (-1)^{p-2} \frac{p(p-1)}{1.2} A_k^{(p-2)} \alpha_{kp}\right] + \cdots$$

$$+ \frac{d^q}{dx^q}\left[z \sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=q}^{p=s} (-1)^{p-q} \frac{p(p-1)\cdots(p-q+1)}{q!} A_k^{(p-q)} \alpha_{kp}\right] + \cdots$$

oder, weil wir die Summation nach p auch von $p=0$ bis $p=s$ nehmen können, da für $p<q$ der Binomialcoefficient

$$\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!}$$

verschwindet,

$$\sum_{k=1}^{k=n} A_k\,\delta y_k = z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^p A_k^{(p)}\alpha_{kp}$$
$$+\frac{d}{dx}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-1}\frac{p}{1}A_k^{(p-1)}\alpha_{kp}\right]$$
$$+\frac{d^2}{dx^2}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-2}\frac{p(p-1)}{1.2}A_k^{(p-2)}\alpha_{kp}\right]+\cdots.$$

Ebenso findet man

$$\sum_{k=1}^{k=n} B_k\,\delta y'_k = z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p+1} B_k^{(p+1)}\alpha_{kp}$$
$$+\frac{d}{dx}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p}\frac{p+1}{1}B_k^{(p)}\alpha_{kp}\right]$$
$$+\frac{d^2}{dx^2}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-1}\frac{(p+1)p}{1.2}B_k^{(p-1)}\alpha_{kp}\right]+\cdots,$$

sodass die Gleichungen (37) übergehen in

$$(39)\quad 0 = z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^p\left(A_{ki}^{(p)}-B_{ki}^{(p+1)}\right)\alpha_{kp}$$
$$+\frac{d}{dx}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-1}\left(\frac{p}{1}A_{ki}^{(p-1)}-\frac{p+1}{1}B_{ki}^{(p)}\right)\alpha_{kp}\right]$$
$$+\frac{d^2}{dx^2}\left[z\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-2}\left(\frac{p(p-1)}{1.2}A_{ki}^{(p-2)}-\frac{(p+1)p}{1.2}B_{ki}^{(p-1)}\right)\alpha_{kp}\right]+\cdots,$$
$$(i=1,2,\ldots,m).$$

Welchen Werth z auch habe, wir werden diesen Gleichungen genügen, wenn für $i=1,2,\ldots,m$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^p\left(A_{ki}^{(p)}-B_{ki}^{(p+1)}\right)\alpha_{kp}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$(40)\quad\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-q}\left(\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!}A_{ki}^{(p-q)}-\frac{(p+1)p\ldots(p-q+2)}{q!}B_{ki}^{(p-q+1)}\right)\alpha_{kp}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^{p-s-1}\left(\frac{p(p-1)\ldots(p-s)}{s+1!}A_{ki}^{(p-s-1)}-\frac{(p+1)p\ldots(p-s+1)}{s+1!}B_{ki}^{(p-s)}\right)\alpha_{kp}=0,$$

ist.

Substituirt man weiter die Werthe (38) der δy in (36) und nimmt an, dass z mit seinen s ersten Ableitungen in beiden Grenzen verschwindet, so ergiebt sich, wie leicht zu sehen, dass

$$\sum_{k=1}^{k=n}\sum_{p=0}^{p=s}(-1)^p P_k^{(p)}\alpha_{kp}=0$$

sein muss, wenn V stationär sein soll.

Sind also die Gleichungen (40) erfüllt, so muss (41) es von selbst sein. Das führt wieder auf eine Matrixbedingung*) und diese kommt, wenn man die Abkürzung einführt:

$$(41)\quad C_{kipq}\equiv(-1)^{p-q}\left(\frac{p(p-1)\ldots(p-q+1)}{q!}A_{ki}^{(p-q)}-\frac{(p+1)p\ldots(p-q+2)}{q!}B_{ki}^{(p-q+1)}\right)$$

darauf hinaus, dass es $m(s+2)$ Functionen λ geben muss, welche den n Systemen von $s+1$ Gleichungen genügen:

$$P_k+\sum_{i=1}^{i=m}(A_{ki}-B'_{ki})\lambda_{i0}+\sum_{q=1}^{q=s+1}\sum_{i=1}^{i=m}[C_{kipq}\lambda_{iq}]_{p=0}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(42)\quad(-1)^r P_k^{(r)}+\sum_{i=1}^{i=m}(-1)^r\left(A_{ki}^{(r)}-B_{ki}^{(r+1)}\right)\lambda_{i0}+\sum_{q=1}^{q=s+1}\sum_{i=1}^{i=m}[C_{kipq}\lambda_{iq}]_{p=r}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

---

*) Sollen die Gleichungen (40) und (41) überhaupt zu Bedingungen zwischen den Functionen P, A und B Veranlassung geben, so muss man s so wählen, dass

$$n(s+1)\geqq m(s+2)+1$$

oder

$$(n-m)(s+1)\geqq m+1.$$

Wir werden aber bald sehen, dass s aus einer anderen Ursache so gewählt werden muss, dass

$$(n-m)(s+1\geqq n,$$

wodurch die angegebene Bedingung von selbst erfüllt ist.

$$(-1)^s P_k^{(s)} + \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^s (A_{ki}^{(s)} - B_{ki}^{(s+1)}) \lambda_{i0} + \sum_{q=1}^{q=s+1} \sum_{i=1}^{i=m} [C_{kipq} \lambda_{iq}]_{p=s} = 0.$$

Differenzirt man aber für $r = 0, 1, \ldots, s-1$ die $(r+1)^{\text{te}}$ Gleichung und addirt die $(r+2)^{\text{te}}$, so erhält man nach einigen Reductionen die n Systeme von s Gleichungen:

$$(43) \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{i=m} (A_{ki} - B'_{ki})(\lambda'_{i0} + \lambda_{i1}) + \sum\limits_{q=1}^{q=s} \sum\limits_{i=1}^{i=m} [C_{kipq}(\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1})]_{p=0} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{i=m} (-1)^{s-1} (A_{ki}^{(s-1)} - B_{ki}^{(s)})(\lambda'_{i0} + \lambda_{i1}) + \sum\limits_{q=1}^{q=s} \sum\limits_{i=1}^{i=m} [C_{kipq}(\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1})]_{p=s-1} = 0. \end{cases}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

Wir wollen nun die Zahl s so wählen, dass man den Gleichungen (43) im Allgemeinen nicht genügen kann ohne die $m(s+1)$ Grössen $\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1}$ gleich Null zu setzen. Hierzu ist nothwendig

$$n s \geqq m(s+1),$$

oder

$$(44) \qquad (n-m)(s+1) \geqq n.^{*)}$$

Durch die Formeln $\lambda_{i,q+1} = -\lambda'_{iq}$ gehen aber die n ersten Gleichungen von (42) über in:

$$(45) \qquad P_k + \sum_{i=1}^{i=m} (A_{ki} - B'_{ki}) \lambda_{i0} - \sum_{i=1}^{i=m} B_{ki} \lambda'_{i0} = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

und das sind eben gerade die Gleichungen von Lagrange, während man, wenn man diese differenzirt, die übrigen Gleichungen (42) erhält.

8. Bisher haben wir uns nur mit der Herleitung der Differentialgleichungen beschäftigt, welche die Functionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$ bestimmen. Dazu konnten wir x_1, x_2 und die Grenzwerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ als fest betrachten. Die Functionen, welche den gefundenen Differentialgleichungen genügen, enthalten dann im Allgemeinen noch $2n$ Integrationsconstanten und es handelt sich, wenn diese Grenzwerthe veränderlich sind, nur noch um Variationen der Grenzen x_1, x_2 und der $2n$ Integrationsconstanten. Lassen wir nur diese Grenzen und Constanten variiren, während wir uns für die Functionen y und λ ihre Werthe, wie sie sich aus den Differentialgleichungen ergeben, eingesetzt denken, so reducirt sich δV auf die Glieder

*) Man kommt folglich wie früher mit $s = 1$ aus, solange $n \geqq 2m$ ist.

$$\left|\left(F+\sum_{l=1}^{l=m}\lambda_l\Phi_l\right)dx\right|_{x_1}^{x_2}+\left|\sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_k'}+\sum_{i=1}^{i=m}\lambda_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial y_k'}\right)\delta y_k\right|_{x_1}^{x_2}$$

und es ist hinreichend und auch nothwendig, dass diese Glieder für alle durch die Grenzbedingungen erlaubten Aenderungen der Grenzen von x_1, x_2 und der Grenzwerthe von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ verschwinden. Hiermit ist die Methode von Lagrange auch für veränderliche Grenzen begründet.

Ich erwähne zum Schluss, dass dieser Aufsatz ein Abschnitt ist aus meiner Dissertation, die der Anregung meines hochverehrten Lehrers Prof. Dr. D. J. Korteweg ihre Entstehung verdankt. Ich darf nicht unterlassen, ihm hier meinen besten Dank ganz besonders für die Hülfe auszusprechen, die er mir bei der Bearbeitung dieses Abschnittes bereitwilligst zu Theil werden liess, dessen Hauptidee ich ihm verdanke.

Ueber Riemann'sche Flächen mit beschränkt veränderlichen Verzweigungspunkten.

Von

P. Hoyer in Burg b./Magdeburg.

Einleitung.

Im Folgenden werde ich den Zusammenhang Riemann'scher Flächen betrachten, welche durch stetige Deformationen in einander übergeführt werden können, bei denen die Verzweigungspunkte beschränkt veränderlich sind. Die Beschränkung, die den Verzweigungspunkten auferlegt werden soll, besteht darin, dass dieselben gruppenweise auf einander ausschliessende, einfach zusammenhängende ebene Gebiete beschränkt gedacht werden.

Es bezeichne $E(z_1 \ldots z_w, a_1, a_2 \ldots)$ ein Element eines algebraischen Gebildes der Veränderlichen $z_1 \ldots z_w a_1 a_2 \ldots$, unter denen das System der Grössen $a_1, a_2 \ldots$ das System der Coefficienten einer algebraischen Gleichung $f(s, z) = 0$, das System der Grössen $z_1 \ldots z_w$ das System der Verzweigungspunkte*) derjenigen Riemann'schen Fläche F repräsentirt, auf der die durch $f(s, z) = 0$ definirte Function s von z sich ausbreiten lässt. Zu diesem Element denken wir uns alle möglichen Fortsetzungen construirt, für welche die Punkte $z_1 \ldots z_w$ gruppenweise auf einander ausschliessende, einfach zusammenhängende Gebiete der z-Ebene beschränkt bleiben. Die Gesammtheit der Grössensysteme $(z_1 \ldots z_w)$, welche dieser Beschränkung unterworfen sind, bildet dann ein Continuum (z), und wir wollen voraussetzen, dass durch die zu $E(z_1 \ldots z_w a_1 a_2 \ldots)$ construirten Fortsetzungen zu einer jeden Stelle dieses Continuums eine bestimmte Anzahl endlicher und

*) Mit diesem Ausdruck bezeichne ich ein Punktsystem, das durch Projection der Windungspunkte der Fläche auf die Ebene erhalten wird und in dem jeder Punkt so oft enthalten gedacht wird, wie die Summe der Ordnungszahlen der über ihm liegenden Windungspunkte angiebt. (Man kann, wenn man will, sich die einzelnen Punkte auch in besonderen, über einander liegenden Ebenen denken, deren Anzahl dann gleich der Summe der Ordnungen aller Windungspunkte, also gleich w ist).

mit $(z_1 \ldots z_w)$ sich stetig ändernder Coefficientensysteme, also auch eine bestimmte Anzahl mit dem Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ sich stetig ändernder Riemann'scher Flächen F als zugehörig definirt wird.*) In der Gesammtheit $\mathfrak{F}$ dieser Flächen wird man alsdann je zwei Flächen dadurch stetig in einander überführen können, dass man das Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ eine Bahn beschreiben lässt, welche ganz in dem durch (z) repräsentirten Continuum der Punktsysteme $(z_1 \ldots z_w)$ liegt. Diese Bahn wird man offenbar immer so gewählt voraussetzen dürfen, dass dieselbe kein System mit zusammenfallenden Punkten enthält, sofern nur in der Anfangs- und Endlage des Punktsystems $(z_1 \ldots z_w)$ keine zusammenfallenden Punkte enthalten sind. Daraus werden wir nun die Beziehungen herleiten, durch welche die Gesammtheit $\mathfrak{F}'$ derjenigen Flächen von $\mathfrak{F}$ bestimmt ist, für welche das Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ keine zusammenfallenden Punkte besitzt. Die Gesammtheit $\mathfrak{F}$ ergiebt sich dann durch Hinzufügen derjenigen Flächen, welche aus Flächen von $\mathfrak{F}'$ durch Zusammenfallen von Verzweigungspunkten entstehen.

Unmittelbare Anwendung finden diese Untersuchungen auf die durch ein Element $E(z_1 \ldots z_w, a_1, a_2 \ldots)$ definirten Flächen selbst, wenn durch ein solches Element *mehrere***) Flächen und mithin auch mehrere Coefficientensysteme als zugehörig zu demselben Grössen- resp. Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ definirt werden. Dieser Fall wird im allgemeinen dann eintreten, wenn die Stelle $(\overset{0}{z}_1 \ldots \overset{0}{z}_w)$, in deren Umgebung die durch E definirten Grössensysteme $(z_1 \ldots z_w)$ sich befinden, gleiche Grössen enthält. Ist dann $(\overset{0}{z}_1 \ldots \overset{0}{z}_k)$ ein vollständiges System verschiedener Grössen $\overset{0}{z}$, so wird, wenn die Umgebung (z) um $(\overset{0}{z}_1 \ldots \overset{0}{z}_w)$ genügend klein vorausgesetzt wird, dieselbe durch ein System einander ausschliessender Kreisflächen mit den Mittelpunkten $\overset{0}{z}_1 \ldots \overset{0}{z}_k$ repräsentirt sein, und auf diese Kreisflächen werden wir uns also die Punkte des Systems $(z_1 \ldots z_w)$ gruppenweise beschränkt denken können. Die das Element bildenden Grössensysteme $(z_1 \ldots z_w\, a_1 a_2 \ldots)$ werden wegen der Mehrwerthigkeit von $(a_1 a_2 \ldots)$ dargestellt werden durch zwei Gleichungssysteme von der Form:

$$\text{A)} \qquad z_\alpha - \overset{0}{z}_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha(t_1 \ldots t_w) \quad (\alpha = 1, 2 \ldots w),$$

$$\text{B)} \qquad a_\alpha - \overset{0}{a}_\alpha = \mathfrak{P}'_\alpha(t_1 \ldots t_w) \quad (\alpha = 1, 2 \ldots)$$

---

*) Die Resultate der folgenden Untersuchungen behalten übrigens auch dann ihre Giltigkeit, wenn man sich aus dem Continuum (z) Stellen einer $(2w-2)$, $(2w-4)$ u. s. w. fachen Mannigfaltigkeit ausgeschlossen denkt.

**) Der Fall *einer* Fläche bedarf keiner Untersuchung.

wo $\mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{P}'_\alpha$ gewöhnliche mit $(t_1 \ldots t_w)$ gleichzeitig verschwindende Potenzreihen bezeichnen, und $(t_1 \ldots t_w)$ innerhalb einer beliebig klein zu wählenden Umgebung (t) von $(t_1 = 0 \ldots t_w = 0)$ unbeschränkt veränderlich ist. Ist nun, wenn die homogene ganze Function m_λ^{ten} Grades $\varphi_\lambda(t_1 \ldots t_w)$ die Summe der Glieder niedrigster Dimension in $\mathfrak{P}_\lambda(t_1 \ldots t_w)$ bezeichnet, das Gleichungssystem

$$\varphi_1(t_1 \ldots t_w) = 0 \ldots \varphi_w(t_1 \ldots t_w) = 0$$

durch kein anderes endliches Grössensystem $(t_1 \ldots t_w)$, als durch $(t_1 = 0 \ldots t_w = 0)$ zu befriedigen, so kann man, wie sich mittelst einiger der Theorie der Elimination und Convergenz von Potenzreihen angehörender Sätze folgern lässt, immer zu der Umgebung (t), wenn nur diese unter einer gewissen Grenze angenommen wird, eine Umgebung (z) um $(z_1 = 0 \ldots z_w = 0)$ so bestimmen, dass zu einem beliebigen Grössensysteme in (z) $m_1 m_2 \ldots m_w$ dem Gleichungssystem A) genügende Grössensysteme in (t) gehören, die sich ausserdem stetig mit $(z_1 \ldots z_w)$ ändern. Diesen Grössensystemen werden dann durch B) ebensoviele Grössensysteme $(a_1 a_2 \ldots)$ zugeordnet, sofern nicht, was durch die Wahl der Grössen $t_1 \ldots t_w$ zu vermeiden ist, demselben Grössensysteme $(z_1 \ldots z_w, a_1, a_2 \ldots)$ stets mehrere den Gleichungssystemen A) und B) genügende Grössensysteme $(t_1 \ldots t_w)$ in (t) entsprechen. Auf diese Weise werden nun durch A) und B) jedem Grössensystem in (z) $m_1 m_2 \ldots m_w$ Coefficientensysteme $(a_1 a_2 \ldots)$ zugeordnet, die sich stetig mit $(z_1 \ldots z_w)$ ändern. Diesen Coefficientensystemen wird dann eine bestimmte Anzahl Riemann'scher Flächen zugehören, und auf diese Flächen sind die Resultate der folgenden Untersuchung unmittelbar anwendbar, wobei nur (z) so klein vorauszusetzen ist, dass die Punkte $z_1 \ldots z_w$ gruppenweise auf einander ausschliessende Kreisflächen beschränkt sind.

Da Elemente dieser Art meines Wissens bisher noch nicht aufgestellt sind, so möge zur Erläuterung des Vorstehenden es gestattet sein zwei solche Elemente, für welche die zugehörigen Flächen einfach und dreifach zusammenhängend $(p=0,\ p=1)$ sind, hier anzuführen. Die Ausführung der Rechnung ist zwar nicht einfach, kann aber mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln der Analysis bewältigt und daher dem Leser überlassen werden. Legen wir als Gleichung $f(s, z) = 0$ die Gleichung

$$f_1(s) - zf_2(s) = 0$$

zu Grunde, in der

$$f_1(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s,$$
$$f_2(s) = b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \cdots + b_1 s + 1$$

ist, so wird $w = 2n - 2$, $p = 0$. Bezeichnen wir ferner mit $(s_1 \ldots s_{2n-2})$ das System der Verzweigungswerthe von s, das zu dem durch $(z_1 \ldots z_{2n-2})$

repräsentirten System der Verzweigungspunkte der Function s gehört, so besitzt das algebraische Gebilde der Grössen

$$a_1 \ldots a_{n-1},\ b_1 \ldots b_{n-1},\ z_1 \ldots z_{2n-2},\ s_1 \ldots s_{2n-2}$$

die Stelle

$$\begin{aligned}(a_1 = 0 \ldots a_{n-1} = 0,\ b_1 = 0 \ldots b_{n-1} = 0,\ z_1 = 0 \ldots z_{n-1} = 0,\\ z_n = \infty \ldots z_{2n-2} = \infty,\ s_1 = 0 \ldots s_{n-1} = 0,\\ s_n = \infty \ldots s_{2n-2} = \infty).\end{aligned}$$

In einer gewissen Umgebung dieser Stelle wird das Gebilde dargestellt durch ein Element der folgenden Gestalt: Setzt man:

$$z'_\alpha = \frac{1}{z_{n-1+\alpha}},\qquad s'_\alpha = \frac{1}{s_{n-1+\alpha}}\quad (\alpha = 1 \ldots n-1),$$

$$\left.\begin{aligned} S_\varrho &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho)} s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \ldots s_{\alpha_\varrho} \\ S'_\varrho &= \sum_{(\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_\varrho)} s'_{\alpha_1} s'_{\alpha_2} \ldots s'_{\alpha_\varrho} \end{aligned}\right\} \begin{aligned}&(\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_\varrho)\\ &(\varrho = 1, 2 \ldots n-1)\end{aligned}$$

$$\mathfrak{S}_\alpha = s_\alpha^n - \frac{n}{n-1} S_1 s_\alpha^{n-1} + \frac{n}{n-2} S_2 s_\alpha^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} S_{n-1} s_\alpha,$$

$$\mathfrak{S}'_\alpha = s'^n_\alpha - \frac{n}{n-1} S'_1 s'^{n-1}_\alpha + \frac{n}{n-2} S'_2 s'^{n-2}_\alpha - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{n}{1} S'_{n-1} s'_\alpha,$$

$$(\alpha = 1 \ldots n-1)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha &= (-1)^\alpha \cdot \frac{n}{n-\alpha} S_\alpha + (s, s')_{\alpha+1} + \cdots \\ b_\alpha &= (-1)^\alpha \cdot \frac{n}{n-\alpha} S'_\alpha + (s', s)_{\alpha+1} + \cdots \\ z_\alpha &= \mathfrak{S}_\alpha + (s, s')_{n+1} + \cdots \\ z'_\alpha &= \mathfrak{S}'_\alpha + (s', s)_{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\} (\alpha = 1 \ldots n-1)$$

wobei allgemein durch $(s, s')_k + \cdots$ eine Summe von Gliedern k^{ter} und höherer Dimension der Grössen $s_1 \ldots s_{n-1}\, s'_1 \ldots s'_{n-1}$ zu verstehen ist.

Legen wir anderseits als Gleichung $f(s, z) = 0$ die Gleichung

$$f_0(s) + z f_1(s) + z^2 f_2(s) = 0$$

zu Grunde, in der

$$\begin{aligned} f_0(s) &= a_1 s + a_2 s^2 + \cdots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n, \\ f_1(s) &= h_0 + (1 + h_1) s + h_2 s^2 + \cdots + h_{n-2} s^{n-2} + (1 + h_{n-1}) s^{n-1} + h_n s^n, \\ f_2(s) &= 1 + c_1 s + c_2 s^2 + \cdots + c_{n-1} s^{n-1} \end{aligned}$$

ist, so wird $w = 4n - 4$, $p = n - 1$. Damit $p = 1$ wird, müssen somit in dem System der Verzweigungspunkte der Function s $n-2$ Paare

einander aufhebend zusammenfallen. Mithin müssen die linken Seiten der Gleichungen

$$\begin{vmatrix} f_0 & f_2 \\ f_0' & f_2' \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} f_0 & f_1 \\ f_0' & f_1' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = 0,$$

$$f_1^2 - 4f_0 f_2 = 0,$$

die sich durch Elimination von z aus resp. $f(s, z) = 0$ und $\frac{\partial f(s, z)}{\partial s} = 0$, $f(s, z) = 0$ und $\frac{\partial f(s, z)}{\partial z} = 0$ ergeben, einen und denselben quadratischen Theiler vom Grade $2n - 4$ haben. Bezeichnet man die linken Seiten dieser Gleichungen durch resp. $\varphi(s)$, $\Delta(s)$, so hat man identisch

$$\varphi(s) = \frac{\Delta(s)}{4}(4f_0'f_2' - f_1'^2) + \frac{\Delta'(s)^2}{16}.$$

Besitzt daher $\Delta(s)$ den quadratischen Theiler $R(s)^2$ vom Grade $2m$, so besitzt auch $\varphi(s)$ diesen Theiler. Verschwindet dann $\Delta(s)$ für keine der $4n - 4 - 2m$ Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_{4n-4-2m}$ von $F(s) = \frac{\varphi(s)}{R(s)^2} = 0$, so enthält das System der Verzweigungspunkte der Function s genau $4n - 4 - 2m$ Punkte, und für diese sind $s_1 \ldots s_{4n-4-2m}$ die zugehörigen Verzweigungswerthe von s. Soll $p = 1$ werden, so muss also $m = n - 2$ sein. Setzen wir daher

$$R(s) = -1 + r_0 + r_1 s + r_2 s^2 + \cdots + r_{n-3}s^{n-3} + s^{n-2},$$
$$Q(s) = q_0 + q_1 s + (1 + q_2)s^2 + q_3 s^3 + q_4 s^4,$$

so besitzt das algebraische Gebilde der Grössen

$$a_1 \ldots a_{n-1},\ c_1 \ldots c_{n-1},\ h_0 \ldots h_n,\ q_0 \ldots q_4,\ r_0 \ldots r_{n-3},$$

für welches die Gleichung

$$(1) \qquad \Delta(s) = Q(s)\, R(s)^2$$

als Identität in s stattfindet, die Stelle

$$(a_1 = 0 \ldots a_{n-1} = 0,\ c_1 = 0 \ldots c_{n-1} = 0,\ h_0 = 0 \ldots h_n = 0,\ q_0 = 0 \ldots q_4 = 0,$$
$$r_0 = 0 \ldots r_{n-3} = 0).$$

In einer gewissen Umgebung dieser Stelle ist das Gebilde durch ein Element darstellbar, das $h_1 \ldots h_{n-1}$, $q_0 \ldots q_4$, $r_1 \ldots r_{n-3}$ in Gestalt gewöhnlicher Potenzreihen von $a_1 \ldots a_{n-1}$, $c_1 \ldots c_{n-1}$, h_0, h_n, r_0 liefert. Setzen wir noch zur Vereinfachung der späteren Formeln $r_0 = 0$*), denken uns alsdann die erhaltenen Potenzreihen nach Potenzen von $a_1 \ldots a_{n-1}$, $c_1 \ldots c_{n-1}$, $\eta_0 = h_0 - \bar{h}_0$, $\eta_n = h_n - \bar{h}_n$ entwickelt (wobei natürlich die Stelle $(a_1 = 0 \ldots a_{n-1} = 0,\ c_1 = 0 \ldots c_{n-1} = 0,\ h_0 = \bar{h}_0,\ h_n = \bar{h}_n)$ dem gemeinsamen Convergenzbezirk angehören musss), so

*) Dadurch werden dann sämmtliche Unendlichkeits- und Nullstellen von s bestimmt, resp. abhängig von den Verzweigungspunkten und Coefficienten.

ergiebt sich ein Element eines algebraischen Gebildes, für welches die Gleichung (1) als Identität in s stattfindet, definirt durch Gleichungen der folgenden Form:

$$(2)\quad \begin{cases} h_0 = \bar{h}_0 + \eta_0,\ h_\alpha = \bar{h}_\alpha + \mathfrak{P}_\alpha(a_1 \ldots a_{n-1}, c_1 \ldots c_{n-1}, \eta_0, \eta_n), \\ \qquad (\alpha = 1 \ldots n-1), \\ h_n = \bar{h}_n + \eta_n,\ q_\alpha = \bar{q}_\alpha + \mathfrak{P}'_\alpha(a_1 \ldots a_{n-1}, c_1 \ldots c_{n-1}, \eta_0, \eta_n), \\ \qquad (\alpha = 0 \ldots 4), \\ \qquad r_\alpha = \bar{r}_\alpha + \mathfrak{P}''_\alpha(a_1 \ldots a_{n-1}, c_1 \ldots c_{n-1}, \eta_0, \eta_n), \\ \qquad (\alpha = 1 \ldots n-3), \end{cases}$$

wo $\mathfrak{P}_\alpha$, $\mathfrak{P}'_\alpha$, $\mathfrak{P}''_\alpha$ gewöhnliche, mit $(a_1 \ldots a_{n-1}, c_1 \ldots c_{n-1}, \eta_0, \eta_n)$ gleichzeitig verschwindende Potenzreihen bezeichnen, und $\bar{h}_1 \ldots \bar{h}_{n-1}$, $\bar{q}_0 \ldots \bar{q}_4$, $\bar{r}_1 \ldots \bar{r}_{n-3}$ ebensolche Potenzreihen von $\bar{h}_0$, $\bar{h}_n$ sind. Für das in diesem Gebilde enthaltene Gebilde der Coefficienten $a_1 \ldots a_{n-1}$, $c_1 \ldots c_{n-1}$, $h_0 \ldots h_n$, als dessen unabhängige Veränderliche wir also $a_1 \ldots a_{n-1}$, $c_1 \ldots c_{n-1}$, η_0, η_n ansehen können, sind nun die zugehörigen Riemann'schen Flächen dreifach zusammenhängend, so lange wenigstens keine der Wurzeln $s_1 \ldots s_{2n}$ von $F(s) = 0$ zugleich der Gleichung $\Delta(s) = 0$ genügt. Betrachten wir nun das Gebilde der Grössen

$$a_1 \cdots a_{n-1},\ c_1 \cdots c_{n-1},\ \eta_0,\ \eta_n,\ z_1 \cdots z_n,\ z_1' = \frac{1}{z_{n+1}} \cdots z_n' = \frac{1}{z_{2n}},$$

$$s_1 \cdots s_n,\ s_1' = \frac{1}{s_{n+1}} \cdots s_n' = \frac{1}{s_{2n}},$$

wo wieder $(z_1 \ldots z_{2n})$ das System der Verzweigungspunkte der Function s repräsentirt, so ergiebt sich, dass dieses Gebilde die Stelle

$$\begin{gathered}(a_1 = 0 \ldots a_{n-1} = 0,\ c_1 = 0 \ldots c_{n-1} = 0,\ \eta_0 = 0,\ \eta_n = 0,\ z_1 = 0 \ldots z_{n-1} = 0, \\ z_n = \bar{z}_n,\ z_1' = 0 \ldots z'_{n-1} = 0,\ z'_n = \bar{z}'_n,\ s_1 = 0 \ldots s_{n-1} = 0, \\ s_n = \bar{s}_n,\ s_1' = 0 \ldots s'_{n-1} = 0,\ s'_n = \bar{s}'_n)\end{gathered}$$

enthält, in der $\bar{z}_n$, $\bar{z}'_n$, $\bar{s}_n$, $\bar{s}'_n$ unter einander und mit $\bar{h}_0$, $\bar{h}_n$ durch Gleichungen zusammenhängen von der Form

$$\begin{aligned} \bar{z}_n &= -n\bar{s}_n^{\,n-1}\left(1 + \bar{s}_n \mathfrak{P}_1(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \bar{s}'_n\, \mathfrak{P}_2(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)\right), \\ \bar{z}'_n &= -n\bar{s}_n'^{\,n-1}\left(1 + \bar{s}'_n \mathfrak{P}_1(\bar{s}'_n, s_n) + \bar{s}_n\, \mathfrak{P}_2(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right), \\ \bar{h}_0 &= -\frac{n-1}{n}\bar{s}_n\left(1 + \bar{s}_n \mathfrak{P}_1'(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \bar{s}'_n \mathfrak{P}_2'(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)\right), \\ \bar{h}_n &= -\frac{n-1}{n}\bar{s}'_n\left(1 + \bar{s}'_n \mathfrak{P}_1'(\bar{s}'_n, \bar{s}_n) + \bar{s}_n \mathfrak{P}_2'(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right); \end{aligned}$$

dabei bedeuten $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_2'$ wieder gewöhnliche Potenzreihen, und $(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)$ kann innerhalb einer gewissen Umgebung $(\bar{s})$ von $(\bar{s}_n = 0, \bar{s}'_n = 0)$

beliebig angenommen werden. In einer gewissen Umgebung dieser Stelle endlich besitzt das Gebilde ein Element, welches durch Gleichungen definirt ist von der Form:

$$s_n = \bar{s}_n + \sigma_n, \quad s'_n = \bar{s}'_n + \sigma'_n,$$

$$\left.\begin{aligned} a_\alpha &= (-1)^{n-\alpha} \cdot \frac{n}{\alpha} S_{n-\alpha} + (s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n)_{n-\alpha+1} \\ &\qquad + \cdots \\ c_{n-\alpha} &= (-1)^{n-\alpha} \cdot \frac{n}{\alpha} S'_{n-\alpha} + (s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n)_{n-\alpha+1} \\ &\qquad + \cdots \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (\alpha = 1, 2 \ldots \\ \ldots n-1), \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \eta_0 = &- \frac{S_1}{n(n-1)} \left(1 + (s_n, \bar{s}'_n)_1 + \cdots\right) \\ &- \frac{n-1}{n} \sigma_n \left(1 + (\bar{s}_n, \bar{s}'_n)_1 + \cdots\right) \\ &+ \bar{s}_n \left(S'_1 P_1(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \sigma'_n P_2(s_n, s'_n)\right) \\ &+ (s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n)_2 + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_n = &- \frac{S'_1}{n(n-1)} \left(1 + (\bar{s}'_n, \bar{s}_n)_1 + \cdots\right)) \\ &- \frac{n-1}{n} \sigma'_n \left(1 + (\bar{s}'_n, \bar{s}_n)_1 + \cdots\right) \\ &+ \bar{s}'_n \left(S_1 P_1(\bar{s}'_n, \bar{s}_n) + \sigma_n P_2(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right) \\ &+ (s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n)_2 + \cdots, \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{z}_\alpha &= - \frac{1}{\bar{h}_0 (1 + \bar{h}_1)^2} \overline{\mathfrak{S}}_\alpha + (s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n)_{n+1} + \cdots \\ \mathfrak{z}'_\alpha &= - \frac{1}{\bar{h}_n (1 + \bar{h}_{n-1})^2} \overline{\mathfrak{S}}'_\alpha + (s'_1 \ldots s'_{n-1} \sigma'_n s_1 \ldots s_{n-1} \sigma_n)_{n+1} + \cdots \end{aligned}\right\} \begin{matrix} (\alpha = 1, 2 \ldots \\ \ldots n-1) \end{matrix}$$

$$\Big[\overline{\mathfrak{S}}_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha + \sum_{\varrho=1}^{n-1} S_{n-\varrho} s_\alpha^\varrho \left(\bar{s}_n \mathfrak{P}_{1\varrho}(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \bar{s}'_n \mathfrak{P}_{2\varrho}(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)\right) - s_\alpha^{n-1} L$$

$$\overline{\mathfrak{S}}'_\alpha = \mathfrak{S}'_\alpha + \sum_{\varrho=1}^{n-1} S'_{n-\varrho} s'^{\varrho}_\alpha \left(\bar{s}'_n \mathfrak{P}_{1\varrho}(\bar{s}'_n, \bar{s}_n) + \bar{s}_n \mathfrak{P}_{2\varrho}(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right) - s'^{\,n-1}_\alpha L'$$

$$\begin{aligned} L = &\ \sigma_n \left(\bar{s}_n \mathfrak{P}_1(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \bar{s}'_n \mathfrak{P}_2(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)\right) \\ &+ \bar{s}_n \left(S'_1 \mathfrak{P}'_1(\bar{s}_n, \bar{s}'_n) + \sigma'_n \mathfrak{P}'_2(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L' = &\ \sigma'_n \left(\bar{s}'_n \mathfrak{P}_1(\bar{s}'_n, s_n) + \bar{s}_n \mathfrak{P}_2(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right) \\ &+ \bar{s}_n \left(S_1 \mathfrak{P}'_1(\bar{s}'_n, \bar{s}_n) + \sigma_n \mathfrak{P}'_2(\bar{s}'_n, \bar{s}_n)\right)\Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_n - \bar{z}_n = n\bar{s}_n^{n-2}\{S_1\big(1+(\bar{s}_n,\bar{s}'_n)_1+\cdots\big) - (n-1)\,\sigma_n\big(1+(\bar{s}_n,\bar{s}'_n)_1+\cdots\big) \\ + S_1'\bar{s}_n P_1'(\bar{s}_n,\bar{s}'_n) + \sigma'_n\bar{s}_n P_2'(\bar{s}_n,\bar{s}'_n)\} \\ + (s_1\ldots s_{n-1}\sigma_n s_1'\ldots s'_{n-1}\sigma'_n)_2 + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z'_n - \bar{z}'_n = n\bar{s}_n'^{\,n-2}\{S'_1\big(1+\bar{s}'_n,\bar{s}_n)_1+\cdots\big) - (n-1)\,\sigma'_n\big(1+(\bar{s}'_n,\bar{s}_n)_1+\cdots\big) \\ + S_1\bar{s}'_n P_1'(\bar{s}'_n,\bar{s}_n) + \sigma_n\bar{s}'_n P_2'(\bar{s}'_n,\bar{s}_n)\} \\ + (s_1'\ldots s'_{n-1}\sigma'_n s_1\ldots s_{n-1}\sigma_n)_2 + \cdots{}^{*)}. \end{aligned}$$

Die Bezeichnung der auf die Glieder niedrigster Dimension folgenden, oder in diesen als Coefficienten auftretenden Potenzreihen ist dabei die bereits angewandte durch $(\;)+\cdots$ oder $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$, P, P', die Grössen S_α, S'_α, $\mathfrak{S}_\alpha$, $\mathfrak{S}'_\alpha$ haben dieselbe Bedeutung, wie im ersten Beispiel, und $(\bar{s}_n, \bar{s}'_n)$ kann jedes Werthepaar in $(\bar{s}_n)$ annehmen, *für das weder* $\bar{s}_n$, *noch* $\bar{s}'_n$ *gleich Null ist.* Werden zu diesen Entwickelungen diejenigen hinzugefügt, die sich durch Einsetzen derselben in 2 ergeben, so erhält man ein Element des Gebildes aller bei dem Problem in Betracht gezogenen Grössen. Sieht man im ersten Beispiel $s_1\ldots s_{n-1}\, s_1'\ldots s'_{n-1}$, im zweiten $s_1\ldots s_{n-1}\sigma_n\, s_1'\ldots s'_{n-1}\sigma'_n$ als Hilfsgrössen an, welche die Stelle der oben mit $t_1\ldots t_w$ bezeichneten Grössen vertreten, so sind in diesen Entwickelungen zwei Elemente $E(z_1\ldots z_{n-2}, a_1\ldots a_{n-1}, c_1\ldots c_{n-1})$, $E(z_1\ldots z_{2n}, a_1\ldots a_{n-1}, c_1\ldots c_{n-1}, h_0\ldots h_n)$ der früher betrachteten Art enthalten. Das System der Functionen $\varphi_1(t_1\ldots t_w)\ldots\varphi_w(t_1\ldots t_w)$ wird dann, wenn man von constanten Factoren absieht, im ersten Beispiel gebildet von den Grössen $\mathfrak{S}_1\ldots\mathfrak{S}_{n-1}$, $\mathfrak{S}_1'\ldots\mathfrak{S}'_{n-1}$ im zweiten von den Grössen $\bar{\mathfrak{S}}_1\ldots\bar{\mathfrak{S}}_{n-1}$, $\bar{\mathfrak{S}}_1'\ldots\bar{\mathfrak{S}}'_{n-1}$ und den Summen der linearen Glieder in den Entwickelungen von $z_n-\bar{z}_n$, $z'_n-\bar{z}'_n$. Jeder dieser beiden Grössensysteme verschwindet für kein anderes endliches Grössensystem

$$(s_1\ldots s_{n-1}, s_1'\ldots s'_{n-1}) \text{ resp. } (s_1\ldots s_{n-1}, \sigma_n, s_1'\ldots s'_{n-1}, \sigma'_n),$$

als für

$$(s_1=0\ldots s_{n-1}=0,\; s_1'=0\ldots s'_{n-1}=0)$$

$$\text{resp. } (s_1=0\ldots s_{n-1}=0,\; \sigma_n=0,\; s_1'=0\ldots s'_{n-1}=0,\; \sigma'_n=0),$$

wenigstens solange $(\bar{s}_n)$ genügend klein vorausgesetzt wird.

§ 1.

Im ersten Theile (A) meiner Abhandlung „Ueber den Zusammenhang in Reihen u. s. w.“ (d. Ann. Bd. 42) habe ich Reihen, deren Glieder Complexe von Elementen, oder, wie ich kurz sage, Buchstabenreihen

*) In diesen Entwickelungen ist indessen $n > 2$ vorausgesetzt.

sind, hinsichtlich des Zusammenhanges betrachtet, der zwischen ihren Gliedern vorhanden sein kann. Diese Betrachtung führt zunächst zur Aufsuchung der „transitiven Gruppen" einer solchen Reihe, und die Vergleichung zweier Reihen hinsichtlich der Uebereinstimmung resp. Verschiedenheit, die sie bei der Scheidung ihrer Glieder in transitive Gruppen darbieten können, führt zu einer Beziehung, die zwischen zwei Reihen stattfinden kann, und darin besteht, dass jeder transitiven Gruppe der einen Reihe eine transitive Gruppe der andern entspricht, die mit ihr „in den Buchstaben übereinstimmt". (A §§ 1, 2). Eine solche Beziehung zwischen zwei Reihen $A_1 A_2 \ldots A_n$ und $B_1 B_2 \ldots B_m$ habe ich durch die Schreibweise $A_1 A_2 \ldots A_n \equiv A_1 B_2 \ldots B_m$ dargestellt. Wenn nun zwei in dieser Beziehung zu einander stehende Reihen ausserdem noch in der Beziehung zu einander stehen, dass je zwei entsprechende transitive Gruppen derselben auch gleichen Grad des Zusammenhangs haben, so will ich dies durch Hinzufügen eines weiteren Striches zu dem die frühere Beziehung darstellenden Zeichen $\equiv$ andeuten, und die Beziehung zwischen den Reihen also durch die Schreibweise $A_1 A_2 \ldots A_n \;\underline{\equiv}\; B_1 B_2 \ldots B_m$ darstellen.

Diese Beziehung ist von Wichtigkeit für die Untersuchung der verschiedenen Formen, welche gleichwerthige Substitutionen, als Producte cyklischer Substitutionen dargestellt, darbieten können. Im zweiten Theile (B) meiner Abhandlung habe ich diese verschiedenen Formen behandelt und dieselben hierbei in Classen unterschieden. Der Begriff einer solchen „*Formenclasse*" kann mittelst der soeben erörterten Beziehung in folgender Weise bestimmt werden: *Sind* $(A_1)(A_2)\ldots(A_n) = (B_1)(B_2)\ldots(B_m)$ *zwei gleichwerthige Producte cyklischer Substitutionen, so sollen dieselben stets und nur dann derselben Formenclasse angehören, wenn die Reihen* $A_1 A_2 \ldots A_n$ *und* $B_1 B_2 \ldots B_m$ *in der Beziehung* $A_1 A_2 \ldots A_n \;\underline{\equiv}\; B_1 B_2 \ldots B_m$ *zu einander stehen.* In meiner Abhandlung habe ich nun gezeigt, dass zwei derselben Formenclasse angehörige Producte sich durch die Operationen des Versetzens, Zerlegens und Vereinigens von Factoren in einander umwandeln lassen, während anderseits eine solche Umwandlung bei Angehörigen verschiedener Formenclassen unmöglich ist. Wenn insbesondere die cyklischen Substitutionen einfache Transpositionen sind, so fällt die Operation des Zerlegens und Vereinigens fort, es lassen sich also zwei derselben Formenclasse angehörige Producte von Transpositionen allein durch Versetzen von Factoren in einander umwandeln.

Sind die Producte einer Formenclasse transitiv, so nennen wir auch die Formenclasse transitiv. Eine transitive Formenclasse ist, vorausgesetzt natürlich, dass die in ihr enthaltenen Buchstaben als bekannt angesehen werden, stets völlig bestimmt, wenn der Grad des Zusammenhanges g ihrer Producte und die Substitution S gegeben ist,

der die Producte gleichwerthig sind; so dass die Formenclasse durch $P_{g,S}$ bezeichnet werden kann. Ist eine Formenclasse intransitiv, so werden wir naturgemäss diejenigen transitiven Formenclassen, denen die transitiven Gruppen eines ihrer Producte angehören, als „*enthalten*" in der Formenclasse bezeichnen können. Ist g der Grad des Zusammenhanges einer Formenclasse (d. h. ihrer Producte), r die Anzahl der in ihr enthaltenen transitiven Formenclassen und ϱ die Anzahl der Circularsubstitutionen (ohne gemeinsamen Buchstaben), in welche man die Substitution S zerlegen kann*), der die Producte der Formenclasse gleichwerthig sind, so hat man $g = \varrho - r + 2k$, wo k eine positive ganze Zahl, oder Null ist (S. die Note auf S. 85 meiner Abhandlung). Ist $g = 0$, so muss also $\varrho = r$, $k = 0$ sein, die transitiven Gruppen der Producte einer einfach zusammenhängenden Formenclasse sind also den Circularsubstitutionen gleichwerthig, in die man S zerlegen kann.

Sieht man bei der Umwandlung eines Products cyklischer Substitutionen durch Versetzen von Factoren die einzelnen Factoren als Individuen an, die ihren Platz sowohl, als auch ihren Werth ändern können, so ist jede solche Umwandlung mit einer Vertauschung der Factoren verbunden. Versieht man die Factoren der Reihe nach mit Indices, deren jeder für dasselbe Individuum unverändert bleibt und also nur seinen Platz wechselt, so kann diese Vertauschung durch die Substitution dargestellt werden, welche die Indices erleiden. Bezeichnen also z. B. in $(A_1)_1\,(A_2)_2\,(A_3)_3$ die an die Klammern gehängten Indices die Individuen, so würde ein Versetzen von $(A_2)_2$ um eine Stelle nach rechts darzustellen sein durch $(A_1)_1\,(A_2)_2\,(A_3)_3 = (A_1)_1\,(A_3')_3\,(A_2)_2$, wo dann $(A_3)_3$ und $(A_3')_3$ verschiedene Werthe desselben Individuums sind, und $S = (1)\,(2\;3)$ die Substitution der Indices ist**).

Da nun im allgemeinen die Umwandlung eines Productes Π in ein anderes Π_1 auf verschiedene Arten möglich sein wird, so werden diese Umwandlungen auch zu verschiedenen Substitutionen der Indices führen. Diejenigen Substitutionen, zu denen die Umwandlung eines Products Π in sich selbst, d. h. in ein Product, dessen Factoren der Reihe nach denen von Π gleichwerthig sind, führt, bilden eine Gruppe, welche „*die dem Product* Π *zugehörige Gruppe der Indices*" heissen soll. Denn sind U_1, U_2 zwei Umwandlungen von Π in sich selbst, welche für sich zu den Substitutionen resp. S_1, S_2 führen, so führt eine Umwandlung U, welche aus U_1 und der darauffolgenden Umwandlung U_2 zusammengesetzt ist, zu der Substitution $S = S_1 S_2$; U ist aber wieder eine Umwandlung von Π in sich selbst. Bezeichnen wir

*) Dabei sind die identischen Circularsubstitutionen mitzurechnen.

**) Es ist klar, dass diese Begriffsbestimmungen sich auch auf ein Product beliebiger Substitutionen übertragen lassen.

diese Gruppe mit G, ferner mit S_1 eine Substitution, zu der eine Umwandlung von Π_1 in Π führt, mit S_2 eine Substitution, zu der eine Umwandlung von Π in Π_2 führt, so sind $S = S_1 G S_2$ die Substitutionen, zu denen sämmtliche Umwandlungen von Π_1 in Π_2 führen. Diese bilden im allgemeinen keine Gruppe. Dies wird aber dann eintreten, wenn G die symmetrische Gruppe ist; alsdann bilden auch die Substitutionen $S_1 G S_2$ die symmetrische Gruppe. Da nun, wie wir sogleich beweisen werden, die einem transitiven Producte von Transpositionen zugehörige Gruppe symmetrisch ist und zwei derselben Formenclasse angehörige Producte von Transpositionen sich durch Versetzen von Factoren in einander umwandeln lassen, so folgt, *dass man zwei derselben transitiven Formenclasse angehörige Producte von Transpositionen durch Versetzen von Factoren stets so in einander umwandeln kann, dass die Factoren jede beliebige Vertauschung erleiden.* Dies ergiebt sich also aus dem Satz, den wir jetzt beweisen wollen.

Die einem transitiven Producte von Transpositionen zugehörige Gruppe der Indices ist symmetrisch.

Dieser Satz kann für den besondern Fall, dass der Werth des Products gleich der Einheit ist, als bekannt angesehen werden, er ist für diesen Fall in dem von Clebsch in seiner Abhandlung „Zur Theorie der Riemann'schen Fläche" (d. Annalen Bd. 6) angestellten Untersuchungen enthalten.

Der Beweis des Satzes ergiebt sich unmittelbar daraus, dass die zu den Producten $(ab)_1 (ab)_2$, $(ab)_1 (bc)_2$ gehörigen Gruppen symmetrisch sind. Für das erste Product ist dies selbstverständlich, für das zweite folgt dies aus den Gleichungen $(ab)_1 (bc)_2 = (ac)_2 (ab)_1 = (bc)_1 (ac)_2 = (ab)_2 (bc)_1$. Um nun den Satz für die Producte irgend einer transitiven Formenclasse $F_{g,s}$ zu beweisen, ist es dem Vorhergehenden zufolge nur nöthig, denselben für irgend ein Product dieser Formenclasse zu beweisen. Es sei nun die Zerlegung von S in seine Circularsubstitutionen durch $S = (C_1)(C_2) \ldots (C_\varrho)$ dargestellt. Von den Factoren $(C_1), (C_2) \ldots (C_\varrho)$ (von denen also keine zwei einen Buchstaben gemeinsam haben) können wir jeden als Product von Transpositionen in der Form

$$(C_k) = (a_1^{(k)} a_2^{(k)})(a_2^{(k)} a_3^{(k)}) \ldots \left(a_{\alpha_k - 1}^{(k)} a_{\alpha_k}^{(k)}\right) = \Pi^{(k)} \quad (k = 1 \cdots \varrho)$$

darstellen. Verstehen wir dann unter $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_\varrho$ gerade Zahlen, von denen $\varepsilon_\varrho \geqq 0$ ist, $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{\varrho-1}$ aber (wenn $\varrho > 1$) sämmtlich > 0 sind und deren Summe gleich $2(\varrho - 1) + 2k$ ist, wenn $g = \varrho - 1 + 2k$ ist, so ist

$$\Pi = \Pi^{(1)} (a_{\alpha_1}^{(1)} a_1^{(2)})^{\varepsilon_1} \Pi^{(2)} (a_{\alpha_2}^{(2)} a_1^{(3)})^{\varepsilon_2} \Pi^{(3)} \ldots \Pi^{(\varrho-1)} (a_{\alpha_{\varrho-1}}^{(\varrho-1)} a_1^{(\varrho)})^{\varepsilon_{\varrho-1}} \Pi^{(\varrho)} (a_{\alpha_\varrho - 1}^{(\varrho)} a_{\alpha_\varrho}^{(\varrho)})^{\varepsilon_\varrho} {}^{*})$$

*) Sollten unter $(C_1) \ldots (C_\varrho)$ sich identische Factoren finden, so fallen die entsprechenden Punkte $\Pi^{(k)}$ in Π einfach aus.

ein der Formenclasse $F_{g,s}$ angehöriges Product von Transpositionen. In diesem Product haben je zwei auf einander folgende Transpositionen entweder einen, oder beide Buchstaben gemeinsam. Versehen wir daher die Factoren der Reihe nach mit den Indices $1, 2 \ldots E$, so können wir das Product so in sich umwandeln, dass zwei beliebige auf einander folgende Indices α, $\alpha + 1$ gegen einander vertauscht werden, die übrigen aber ihre Plätze behalten. Mithin enthält die zu Π gehörige Gruppe G der Indices die Transpositionen (12), (23), ... $(E-1\,E)$ und ist folglich symmetrisch.

Hieraus ergiebt sich endlich für die Umwandlung intransitiver Producte von Transpositionen in einander unmittelbar Folgendes: Sind Π_1 und Π_2 zwei derselben Formenclasse angehörige Producte von Transpositionen, von denen Π_1 die Indicesreihe $1, 2 \ldots E$, Π_2 die Indicesreihe $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_E$ besitzt, wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_E$ die Indices $1, 2 \ldots E$ in anderer Reihenfolge sind, so kann man Π_1 stets und nur dann durch Versetzen von Factoren so in Π_2 umwandeln, dass die Indices die Vertauschung $S = \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_E \\ 1, 2 \ldots E \end{pmatrix}$ erleiden, wenn je zwei derselben transitiven Formenclasse angehörige transitive Gruppen von Π_1 und Π_2 dieselbe Gruppe der Indices haben.

§ 2.

Es mögen $G_1\, G_2 \ldots G_l$ einander ausschliessende, einfach zusammenhängende Gebiete der Ebene und $L_1\, L_2 \ldots L_l$ deren Grenzen bezeichnen. In jedem dieser Gebiete $G_k (k = 1 \ldots l)$ möge sich ein System discreter Punkte $P_1^{(k)} \ldots P_{m_k}^{(k)}$ befinden. Auf jeder der Linien $L_k (k=1 \ldots l)$ nehmen wir einen Punkt an, A_k und ziehen in dem nach Fortnahme von $G_1 \ldots G_l$ von der Ebene übrig bleibenden, l-fach zusammenhängenden Gebiete G_0 ein System einander nicht schneidender und durch jeden Punkt nur einmal hindurchgehender Linien von A_l nach $A_1 \ldots A_{l-1}$. Endlich ziehen wir von jedem Punkt A_k ein ebensolches Liniensystem in G_k nach $P_1^{(k)} \ldots P_{m_k}^{(k)}$. (S. Figur 1.)


Fig. 1.

Um die Vorstellung zu vereinfachen, wollen wir über die Liniensysteme, welche die Punkte P mit den Punkten A verbinden, eine Festsetzung treffen, durch welche diese Liniensysteme

für jede Lage der Punktsysteme $P_1^{(k)} \dots P_{m_k}^{(k)}$ $(k = 1 \dots l)$ völlig bestimmt sind. Liegt das Gebiet G_k ganz im Endlichen, so wollen wir festsetzen, dass das betreffende Liniensystem von einem System kürzester Linien in G_k*) gebildet werde, welche die Punkte $P_1^{(k)} \dots P_{m_k}^{(k)}$ mit A_k verbinden. Erstreckt sich eines der Gebiete G ins Unendliche, welches dann das mit G_l bezeichnete sein möge, so denken wir uns G_l durch reciproke radii vectores auf ein ganz im Endlichen liegendes Gebiet G_l' abgebildet, und setzen fest, dass das Liniensystem, welches die Punkte $P_1^{(l)} \dots P_{m_l}^{(l)}$ mit A_l verbindet, von einem Liniensystem gebildet werde, dessen Bild ein System kürzester Linien in G_l' ist. Auf diese Weise sind für jede Lage der Punktsysteme $P_1^{(k)} \dots P_{m_k}^{(k)}$ die zugehörigen Liniensysteme völlig bestimmt**).

Das so construirte, die Punkte P mit den Punkten A und diese mit einander verbindende Liniensystem kann man in einem Zuge umlaufen. Die Reihenfolge, in welcher hierbei die Punkte P auf einander folgen, wird völlig bestimmt sein, wenn der Sinn des Umlaufens und der Ausgangspunkt feststehen. Als Sinn des Umlaufens wollen wir den sogenannten positiven, bei dem also die Ebene zur Linken bleibt, wählen, als Ausgangspunkt einen Punkt Q auf einer Seite einer der Linien $A_\alpha A_l$. Dann werden in der durch den Umlauf bestimmten Reihe der Punkte P diejenigen desselben Gebiets unmittelbar auf einander folgen. $P_1^{(k)} P_2^{(k)} \dots P_{m_k}^{(k)}$ sei die so bestimmte Reihenfolge der Punkte in G_k. Lassen wir nun aber in G_k das Punktsystem $P_1^{(k)} \dots P_{m_k}^{(k)}$ in ein anderes $\overline{P}_1^{(k)} \dots \overline{P}_{m_k}^{(k)}$ übergehen, so dass $P_1^{(k)}$ in $\overline{P}_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$ in $\overline{P}_2^{(k)}$ u. s. w. übergeht, so braucht die durch den Umlauf bestimmte Reihenfolge der Punkte $\overline{P}^{(k)}$ nicht mehr dieselbe zu sein, wie die der Punkte $P^{(k)}$. Ist dann $\overline{P}_{\alpha_1}^{(k)} \overline{P}_{\alpha_2}^{(k)} \dots \overline{P}_{\alpha_{m_k}}^{(k)}$, die Reihenfolge der Punkte $P^{(k)}$, so wollen wir sagen, das Punktsystem $(P^{(k)})$ hat durch den Uebergang in $(\overline{P}^{(k)})$ die Vertauschung $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_{m_k} \\ 1 \;\; 2 \, \dots \, m_k \end{pmatrix}$ erlitten. Da das Liniensystem, welches die Punkte des Systems $(\overline{P}^{(k)})$ mit dem Punkte A_k verbindet, das entsprechende Liniensystem des Systems $(P^{(k)})$ nicht schneidet, so sieht man leicht ein, dass, wenn $S = 1$ ist, man immer den Uebergang so einrichten kann, dass kein Punkt $P_\alpha^{(k)}$ die zu einem andern Punkte $P_\beta^{(k)}$ gehörige (mit diesem sich ändernde) Linie $P_\beta^{(k)} A_k$ durchkreuzt.

Wir denken uns jetzt das System der Punkte P als die Projection

*) D. h. deren Punkte im Innern oder auf der Grenze von G_k liegen.

**) S. den Anhang.

des Systems der Windungspunkte einer über der Ebene befindlichen Riemann'schen Fläche F und das Liniensystem, das die Punkte P mit den Punkten A und diese mit einander verbindet, als die Projection des Systems der Uebergangslinien dieser Fläche, längs denen also die Blätter derselben zusammenhängen. Die Fläche ist alsdann vollständig durch ein gewisses identisches Product Π von Substitutionen bestimmt. Jede der Substitutionen dieses Products giebt die Vertauschung der Blätter beim Umkreisen eines Punktes P im positiven Sinne an und kann daher als zusammengehörig mit diesem Punkte P betrachtet werden, und die Reihenfolge der Substitutionen in dem Product kann als übereinstimmend mit der soeben bestimmten Reihenfolge der zugehörigen Punkte P vorausgesetzt werden. Es werden daher in Π die zu den Punkten desselben Gebiets G_k gehörigen Substitutionen unmittelbar auf einander folgen und also ein Unterproduct $\Pi^{(k)}$ von Π bilden. Endlich denken wir uns noch in jedem dieser Unterproducte die einzelnen Factoren mit Indices versehen, welche mit den die zugehörigen Punkte bezeichnenden übereinstimmen.

Lassen wir nun in G_k das Punktsystem $(P^{(k)})$ stetig in ein anderes $(\bar{P}^{(k)})$ übergehen, sodass $P_1^{(k)}$ in $\bar{P}_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$ in $\bar{P}_2^{(k)}$ u. s. w. übergeht und kein Zusammenfallen von Punkten $P^{(k)}$ bei diesem Uebergange stattfindet, so geht die Fläche F stetig*) in eine andere $\bar{F}$ über, für welche das sie bestimmende Product $\bar{\Pi}$ aus Π durch Umwandlung von $\Pi^{(k)}$ mittelst Versetzens von Factoren erhalten wird. Die Indices von $\Pi^{(k)}$ erleiden dabei eine Vertauschung, die mit derjenigen übereinstimmt, welche die Punkte des Systems $(P^{(k)})$ durch den Uebergang erleiden.

Wird jede der Substitutionen von $\Pi^{(k)}$ in ihre Circularsubstitutionen zerlegt, so erhält man $\Pi^{(k)}$ als Product cyklischer Substitutionen dargestellt, das einer bestimmten Formenclasse F_k angehört. Da bei jeder in G_k stattfindenden Lagenänderung des Punktsystems $(P^{(k)})$, bei welcher kein Zusammenfallen von Punkten $P^{(k)}$ eintritt, das Product $\Pi^{(k)}$ nur eine Umwandlung durch Versetzen von Factoren erfährt, so bleibt die Formenclasse F_k bei diesen Lagenänderungen beständig dieselbe, es geht nur $\Pi^{(k)}$ in ein anderes dieser Formenclasse angehöriges Product cyklischer Substitutionen über. Wir wollen daher sagen, es wird das Punktsystem $(P^{(k)})$, resp. das Gebiet G_k durch das die Fläche F bestimmende Product Π der Formenclasse F_k zugeordnet. Sind $F_k^{(1)}, F_k^{(2)}, \ldots F_k^{(r)}$ die in F_k enthaltenen transitiven Formenclassen, so enthält $\Pi^{(k)}$ r transitive Gruppen, deren jede einer der Formenclassen $F_k^{(1)} \ldots F_k^{(r)}$ angehört.

*) Unter stetiger Deformation einer Fläche ist dabei jede Deformation der Fläche zu verstehen, die einer stetigen Aenderung des Coefficientensystems entspricht, zu dem die Fläche gehört.

Die Circularsubstitutionen der einem Punkte $P_\alpha^{(k)}$ zugehörigen Substitution in $\Pi^{(k)}$ können nun verschiedenen dieser transitiven Gruppen angehören. Gehören alsdann diese transitiven Gruppen den Formenclassen $F_k^{(\alpha_1)}, F_k^{(\alpha_2)} \ldots$ an, so wollen wir auch $P_\alpha^{(k)}$ den transitiven Formenclassen $F_k^{(\alpha_1)}, F_k^{(\alpha_2)} \ldots$ *„durch das Product* Π *zugeordnet"* nennen. Dann wird auch für alle soeben betrachteten Lagen des Punktsystems $(P^{(k)})$ derselbe Punkt stets denselben transitiven Formenclassen zugeordnet. Sind insbesondere die den Punkten $P^{(k)}$ zugehörigen Substitutionen in $\Pi^{(k)}$ selbst cyklische Substitutionen (liegt also über jedem Punkte $P^{(k)}$ ein einziger Windungspunkt der Fläche), so wird jeder Punkt $P^{(k)}$ stets einer einzigen, für die verschiedenen Lagen des Punktsystems $P^{(k)}$ unveränderlichen transitiven Formenclasse zugeordnet. — Dabei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Bezeichnung der Blätter während der Lagenänderungen des Punktsystems $P^{(k)}$ unverändert beibehalten wird.

Wir wollen jetzt denjenigen Fall betrachten, dass die den Punkten P zugehörigen Substitutionen Transpositionen sind. Dann stellt das System der Punkte P das in der Einleitung mit $(z_1 \ldots z_w)$ bezeichnete System der Verzweigungspunkte der Fläche dar. Wir bezeichnen daher jetzt die Punkte P als Punkte z, die Ebene, in welcher die Punkte vorausgesetzt werden, als z-Ebene und verstehen endlich unter (z) dasjenige Continuum der Punktsysteme $(z_1 \ldots z_w)$, welches die Gesammtheit der Punktsysteme $(z_1 \ldots z_w)$ enthält, in denen m_1 Punkte dem Gebiete G_1, m_2 Punkte dem Gebiete G_2 u. s. w. angehören $(\Sigma m_k = w)$. Schliessen wir aus (z) alle Systeme mit zusammenfallenden Punkten aus, so bilden die übrigbleibenden Systeme $(z_1 \ldots z_w)$ wiederum ein Continuum $(z)'$, innerhalb dessen wir uns das Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ veränderlich zu denken haben. Geht nun innerhalb des Continuums $(z)'$ das Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ auf irgend einem Wege über in ein anderes, und geht hierbei z_α über in $\bar{z}_\alpha$ $(\alpha = 1 \ldots w)$, die Fläche F über in $\bar{F}$, so folgt aus dem Vorigen, dass (bei richtiger Bezeichnung der Blätter) durch die Producte $\Pi, \bar{\Pi}$, welche F, resp. $\bar{F}$ bestimmen, die Punkte $z_\alpha, \bar{z}_\alpha$ $(\alpha = 1 \ldots w)$ derselben transitiven Formenclasse zugeordnet werden müssen. Umgekehrt aber kann man nun auch zeigen, dass wenn für zwei Lagen des Punktsystems $(z_1 \ldots z_w)$ in $(z)'$ zwei Flächen resp. $F, \bar{F}$ gegeben sind, durch deren Producte je zwei Punkte beider Systeme, die verschiedene Lagen desselben Punktes repräsentiren, derselben transitiven Formenclasse zugeordnet werden, man alsdann auch stets F in $\bar{F}$ übergehen lassen kann, indem man das Punktsystem $(z_1 \ldots z_w)$ von der einen in die andere Lage innerhalb des Continuums $(z)'$ übergehen lässt, und zwar so, dass jeder Punkt z_α in denjenigen Punkt $\bar{z}_\alpha$ übergeht, der als Repräsentant

des Punktes z_a in anderer Lage aufgefasst wird. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass je zwei solche Punkte z_α, $\bar{z}_\alpha$ demselben Gebiete angehören. Zum Beweise bezeichnen wir wieder die in der oben angegebenen Weise bestimmte Reihenfolge der dem Gebiete G_k angehörenden Punkte des Systems $(z_1 \dots z_w)$ in der einen Lage durch $z_1^{(k)} \dots z_{m_k}^{(k)}$. Dann wird die Reihenfolge derselben Punkte in der zweiten Lage des Systems $(z_1 \dots z_w)$ durch $\bar{z}_{\alpha_1}^{(k)} \dots \bar{z}_{\alpha_{m_k}}^{(k)}$ zu bezeichnen sein, wenn $S = \begin{pmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_{m_k} \\ 1 \dots m_k \end{pmatrix}$ die Vertauschung ist, welche die Punkte des Systems $\left(z_1^{(k)} \dots z_{m_k}^{(k)}\right)$ bei irgend einem Uebergange des Systems $(z_1 \dots z_w)$ von der ersten in die zweite Lage erleiden. Ebenso versehen wir, wie früher, die den Punkten $z_\alpha^{(k)}$, $\bar{z}_\alpha^{(k)}$ zugehörigen Transpositionen in den Unterproducten resp. $\Pi^{(k)}$ und $\overline{\Pi}^{(k)}$ mit dem Index α. Dann haben je zwei derselben transitiven Formenclasse angehörige transitive Gruppen von $\Pi^{(k)}$ und $\overline{\Pi}^{(k)}$ dieselbe Gruppe der Indices. Zufolge § 1 kann man daher das Product $\Pi^{(k)}$ durch Versetzen von Factoren so in $\overline{\Pi}^{(k)}$ umwandeln, dass die Indices die Substitution S erleiden. Dieser Umwandlung wird ein Uebergang des Punktsystems $\left(z_1^{(k)} \dots z_{m_k}^{(\,)}\right)$ in ein anderes $\left(\bar{\bar{z}}_1^{(k)} \dots \bar{\bar{z}}_{m_k}^{(k)}\right)$ entsprechen, durch welchen auch die Punkte die Vertauschung S erleiden, sodass $\bar{\bar{z}}_{\alpha_1}^{(k)} \dots \bar{\bar{z}}_{\alpha_{m_k}}^{(k)}$ die Reihenfolge der Punkte $\bar{\bar{z}}_1^{(k)} \dots \bar{\bar{z}}_{m_k}^{(k)}$ sein wird. Bei einem weitern Uebergange des Punktsystems $\left(z_1^{(k)} \dots z_{m_k}^{(k)}\right)$ von dieser Lage in die durch $\left(\bar{z}_{\alpha_1}^{(k)} \dots \bar{z}_{\alpha_{m_k}}^{(k)}\right)$ bezeichnete wird daher keine Vertauschung der Punkte mehr stattfinden und man wird folglich diesen Uebergang so einrichten können, dass kein Punkt die zu einem andern gehörige Projection einer Uebergangslinie durchkreuzt und somit $\overline{\Pi}^{(k)}$ unverändert bleibt. Aus beiden Uebergängen setzt sich nun ein Uebergang des Punktsystems $\left(z_1^{(k)} \dots z_{m_k}^{(k)}\right)$ von der Anfangslage in die Endlage $\left(\bar{z}_1^{(k)} \dots \bar{z}_{m_k}^{(k)}\right)$ zusammen, durch welchen $\Pi^{(k)}$ in $\overline{\Pi}^{(k)}$ übergeht. Da Gleiches für jedes Gebiet gilt, so ist damit unsere Behauptung bewiesen. Verstehen wir nun unter entsprechenden Punkten in verschiedenen Lagen desselben Punktsystems solche Punkte, welche als Repräsentanten verschiedener Lagen desselben Punktes anzusehen sind, und bezeichnen wir durch $\mathfrak{F}'$ die Gesammtheit derjenigen Riemann'schen Flächen $\bar{F}$, die aus einer Fläche F durch stetige Deformation erhalten werden können, indem man das System der Verzweigungspunkte $(z_1 \dots z_w)$ derselben auf allen möglichen Wegen innerhalb eines Continuums $(z)'$ in ein anderes $(\bar{z}_1 \dots \bar{z}_w)$, und zwar so übergehen lässt, dass derselbe Punkt z_α stets in denselben Punkt $\bar{z}_\alpha$ übergeht, so folgt: *dass die Gesammtheit $\mathfrak{F}'$ völlig bestimmt ist durch*

die Gesammtheit derjenigen Producte $\overline{\Pi}$, *durch welche jeder Punkt* $\bar{z}_\alpha$ *des zweiten Systems* $(\bar{z}_1 \ldots \bar{z}_w)$ *derselben transitiven Formenclasse zugeordnet wird, welcher der entsprechende Punkt* z_α *des ersten Systems* $(z_1 \ldots z_w)$ *durch das die Fläche F bestimmende Product* Π *zugeordnet ist.*

§ 3.

Es bezeichne $a_1, a_2, \ldots a_N$ ein System offener, einfach zusammenhängender Flächen, zwischen denen kein Zusammenhang besteht, die aber mit den Flächen eines andern ebensolchen Systems $b_1, b_2, \ldots b_n$ dadurch zusammenhängen, dass Flächen a mit Flächen b Theile ihrer Grenzen gemeinsam haben, längs denen solche aneinandergrenzende Flächen a und b aneinandergeheftet sind. Hierdurch entsteht aus den beiden Flächensystemen $a_1 \ldots a_N$ und $b_1 \ldots b_n$ ein neues Flächensystem T. Ueber dieses Flächensystem setzen wir nun noch Folgendes voraus: Dieselben zwei Flächen a_α, b_β sollen stets nur längs *einem* ihren Grenzen gemeinsamen Theile $l_\beta^{(\alpha)}$ an einandergeheftet sein. Ferner sollen zwei solche Theile $l_\beta^{(\alpha)}$ und $l_{\beta'}^{(\alpha')}$, längs denen resp. a_α, b_β und $a_{\alpha'}, b_{\beta'}$ an einandergeheftet sind, sich weder ganz, noch theilweise decken*), und endlich sollen die Endpunkte jedes Theiles $l_\beta^{(\alpha)}$ der Grenze von T angehören.

Bezeichnen wir mit A_α den Complex derjenigen Buchstaben a, durch welche die an b_α hängenden (d. h. an b_α gehefteten) Flächen a bezeichnet sind, so wollen wir die Reihe der Buchstabencomplexe:

$$A_1 A_2 \ldots A_n$$

die zu T gehörige Reihe nennen**). Alsdann kann man Folgendes beweisen:

Ist der Grad des Zusammenhanges der zu T gehörigen Reihe gleich g, so ist $T(g+1)$*-fach zusammenhängend.*

Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir zunächst eine einfach geschlossene Curve in T. Unter einer einfach geschlossenen Curve ist dabei eine Curve zu verstehen, die durch einen einzigen in den Ausgangspunkt zurückführenden und durch jeden Punkt nur einmal hindurchführenden Zug entsteht. Ueberschreitet eine solche Curve (d. h. überschreitet man, wenn man die Curve in der angegebenen Weise entstehen lässt) keine der Linien $l_\beta^{(\alpha)}$, so liegt die Curve den über die Flächensysteme (a) und (b) gemachten Voraussetzungen zufolge ganz in einer der Flächen a oder b, und sie begrenzt folglich ein Flächenstück von T vollständig. Ueberschreitet dagegen die einfach geschlossene Curve C Linien $l_\beta^{(\alpha)}$, so kann man die Curve stets

*) D. h. durch dieselben Punkte von T repräsentirt werden.

**) Es ist klar, dass man ebenso auch eine Reihe von Complexen der Buchstaben b bilden und diese als zu T gehörige Reihe betrachten könnte.

so umwandeln, dass in der Reihe der von der Curve überschrittenen Linien $l_\beta^{(\alpha)}$ niemals auf eine Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ dieselbe Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ unmittelbar wieder folgt. Unter einem Umwandeln einer einfach geschlossenen Curve C verstehen wir dabei ein Ersetzen eines Curvenstückes c derselben durch eine Linie c', welche mit c eine einfach geschlossene, ein Flächenstück von T vollständig begrenzende Curve und mit dem übrigen Theile $C - c$ von C eine einfach geschlossene Curve $C' = C - c + c'$ bildet. Diese durch die Umwandlung von C entstandene Curve C' wird dann ein Flächenstück von T vollständig begrenzen, oder nicht, je nachdem dies von C gilt oder nicht. Folgt nun in der Reihe der von C überschrittenen Linien $l_\beta^{(\alpha)}$ auf die Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ wieder $l_\beta^{(\alpha)}$, so wird also $l_\beta^{(\alpha)}$ zweimal nach einander überschritten. Findet nun beim ersten Ueberschreiten ein Uebergang von der Fläche a_α in die Fläche b_β, also ein Eintritt in diese Fläche statt, so findet beim zweiten, darauffolgenden Ueberschreiten ein Uebergang von b_β in a_α, also ein Austritt aus b_β statt. E sei der beim ersten Ueberschreiten überschrittene Punkt von $l_\beta^{(\alpha)}$, also der Eintrittspunkt in b_β, A der beim zweiten Ueberschreiten überschrittene Punkt von $l_\beta^{(\alpha)}$, also der Austrittspunkt aus b_β, EBA endlich sei das von E nach A sich erstreckende, in b_β liegende Stück von C. (Siehe Figur*).) Schneidet nun der übrige Theil $C - EBA$ von C das Stück EA von $l_\beta^{(\alpha)}$ nicht, so wird, wenn man durch eine längs EA geführte Linie einen Punkt E' vor E mit einem Punkte A' nach A verbindet, diese Linie $E'A'$ mit dem Theil $C - E'EBAA'$ sowohl, als auch mit dem Theil $E'EBAA'$ eine einfach geschlossene Linie bilden und mit $E'EBAA'$ ausserdem ein Flächenstück von T vollständig begrenzen. Man kann daher C dadurch umwandeln, dass man $E'EBAA'$ ersetzt durch $E'A'$, und dadurch fallen die Schnittpunkte E und A mit $l_\beta^{(\alpha)}$ fort. Schneidet**)

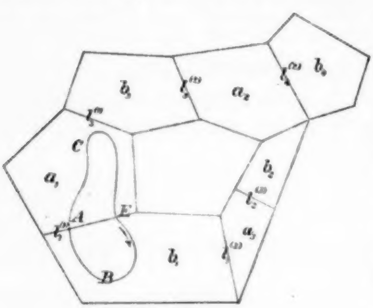


Fig. 2.

*) Es ist selbstverständlich, dass die Flächen von a und b nicht, wie in der Figur angenommen ist, eben zu sein brauchen; in § 4 z. B. werden wir die Flächen b als Windungsflächen voraussetzen.

**) Dass C die Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ berührt oder ein Stück mit ihr gemeinsam hat, lässt sich offenbar leicht vermeiden, indem man zwei Punkte P und Q vor und nach dem Berührungspunkt resp. nach dem gemeinsamen Stück durch eine längs PQ geführte Linie verbindet und diese Linie für PQ setzt.

aber $C - EBA$ das Stück EA, so wird beim Durchlaufen von $C - EBA$ von A nach E auf jeden Eintrittspunkt E_k in das von EA und EBA vollständig begrenzte Flächenstück von T ein Austrittspunkt A_k aus demselben als nächster Schnittpunkt mit EA folgen müssen, weil das Stück $E_k A_k$ von C*) weder EBA, noch EA schneidet. Die Schnittpunkte von $C - EBA$ mit EA bilden also eine Reihe von Punktepaaren $E_k A_k$, und wir behaupten, dass die Punkte zweier dieser Paare niemals abwechselnd auf einander folgen können. Denn das Stück $E_k A_k$ von EA begrenzt mit dem Stück $E_k A_k$ von C ebenfalls ein Flächenstück von T vollständig, das ein Theil des von EA und EBA begrenzten ist. Liegt nun etwa E_l auf dem Stück $E_k A_k$ von EA, so findet beim Ueberschreiten von E_l, wenn C immer in dem angenommenen Sinne durchlaufen wird, ein Eintritt in dieses, von den beiden Stücken $E_k A_k$ begrenzte Flächenstück von T statt. Da nun die beiden nach Fortnahme von $E_k A_k$ aus EA übrig bleibenden Stücke von EA ausserhalb dieses Flächenstücks liegen, so muss der auf E_l folgende Schnittpunkt von C mit EA, also A_l auf dem Stück $E_k A_k$ von EA liegen, denn sonst müsste $E_l A_l$ das Stück $E_k A_k$ von C schneiden. Ebenso folgt aus der Annahme, dass A_l zwischen E_k und A_k liegt, dass dies auch von E_l gelten muss. Die Punkte zweier Paare $E_k A_k$, $E_l A_l$ können also nur unmittelbar auf einander folgen. Daraus aber folgert man leicht die Existenz eines Punktepaares $E_1 A_1$, zwischen dessen Punkten kein Punkt eines der übrigen Paare liegt. Dieses Punktepaar kann daher in der oben angegebenen Weise fortgeschafft werden. Darauf kann wieder ein Punktepaar $E_2 A_2$ fortgeschafft werden u. s. w. Schliesslich wird man auch das Punktepaar EA fortschaffen können. Unsere Behauptung, dass man die Curve C in eine solche umwandeln kann, für die in der Reihe der überschrittenen Linien $l_\beta^{(\alpha)}$ auf eine Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ dieselbe Linie $l_\beta^{(\alpha)}$ nicht unmittelbar wieder folgt, ist also bewiesen. Eine solche Curve und ebenso eine ganz in einer der Flächen a oder b verlaufende Curve soll eine *„reducirte Curve"* heissen.

Wir denken uns jetzt die Aufeinanderfolge der Flächen a, durch die eine reducirte einfach geschlossene Curve C (die Linien $l_\beta^{(\alpha)}$ überschreitet) hindurchgeht, durch einen Cyklus von Buchstabenpaaren von der in meiner Abhandlung (Ueb. d. Zush. in Reihen etc. S. 66) angegebenen Form II dargestellt. Gelangt man beim Durchlaufen von C von der Fläche a_{n_p} in die Fläche a_{n_1} mittelst Durchganges durch b_{m_1}, so wollen wir diese Aufeinanderfolge der Flächen a_{n_p}, a_{n_1} durch das Buchstabenpaar $a_{m_1}^{n_p} a_{m_1}^{n_1}$ darstellen. Gelangt man beim weiteren Durch-

*) D. h. das von E_k nach A_k durchlaufene Stück von C.

laufen von C darauf von der Fläche a_{n_1} in die Fläche a_{n_2} mittelst Durchganges durch b_{m_2}, so wollen wir diese Aufeinanderfolge durch $a^{n_1}_{m_2} a^{n_2}_{m_2}$ und die (mittelst Durchganges durch b_{m_1} und b_{m_2} erfolgte) Aufeinanderfolge von a_{n_p}, a_{n_1}, a_{n_2} durch $a^{n_p}_{m_1} a^{n_1}_{m_1} + a^{n_1}_{m_2} a^{n_2}_{m_2}$ darstellen. So fortfahrend wird man einen der Curve C zugehörigen Cyklus

$$a^{n_p}_{m_1} a^{n_1}_{m_1} + a^{n_1}_{m_2} a^{n_2}_{m_2} + \cdots + a^{n_{p-2}}_{m_{p-1}} a^{n_{p-1}}_{m_{p-1}} + a^{n_{p-1}}_{m_p} a^{n_p}_{m_p}$$

erhalten. In diesem Cyklus müssen je zwei auf einander folgende untere Indices, der erste und letzte untere Index und die oberen Indices jedes Paares verschieden von einander sein, da andernfalls entweder zwei Flächen a_α, b_β mit mehr als einem ihren Grenzen gemeinsamen Theile an einander geheftet sein müssten, oder dieselbe Linie $l^{(\alpha)}_\beta$ beim Durchlaufen von b mehrmals unmittelbar hinter einander überschritten werden müsste. Hieraus folgt zunächst, dass, wenn die Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ einfach zusammenhängend ist, eine reducirte einfach geschlossene Curve nur in *einer* Fläche a oder b verlaufen kann. Denn in diesem Falle wäre der zugehörige Cyklus gleich Null. Es müsste daher in der Reihe der auf m_1 folgenden unteren Indices ein dem Index m_1 gleicher folgen. Wäre nun $a^{n_{k-1}}_{m_k} a^{n_k}_{m_k}$ das erste unter den auf $a^{m_p}_{m_1} a^{n_1}_{m_1}$ folgenden Buchstabenpaaren, dessen unterer Index $m_k = m_1$ wäre, so wäre auch $n_{k-1} = n_1$ (vergl. meinen Bew. z. Satz 1, S. 66 meiner Abhandl.) nnd folglich auch

$$a^{n_1}_{m_2} a^{n_2}_{m_2} + a^{n_2}_{m_3} a^{n_3}_{m_3} + \cdots + a^{n_{k-2}}_{m_{k-1}} a^{n_{k-1}}_{m_{k-1}} \; (n_{k-1} = n_1)$$

ein Cyklus, der wieder gleich Null wäre, und auf den man daher den gleichen Schluss anwenden könnte u. s. f. Die Anzahl der Paare in den Cyklen, zu denen man auf diese Weise gelangt, müsste immer kleiner werden und doch grösser als 2 bleiben, was wegen der Endlichkeit von k*) unmöglich ist. Aus der Voraussetzung, dass die Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ einfach zusammenhängend ist, ergiebt sich also, dass jede einfach geschlossene Curve in T ein Flächenstück von T vollständig begrenzt. Mithin wird T durch jeden Querschnitt zerstückelt, T ist also einfach zusammenhängend und der obige Satz für den Fall $g = 0$ bewiesen.

Um daher den Satz in seiner Allgemeingültigkeit, für ein beliebiges g zu beweisen, werden wir ihn für die Grade des Zusammenhanges $0 \ldots g - 1$ als bewiesen ansehen dürfen. Wir setzen also jetzt voraus,

*) Wollte man auch als möglich zulassen, dass der zu C gehörige Cyklus unendlich viel Paare enthielte, so müsste doch, wie man leicht finden wird, in diesem Cyklus ein solcher mit einer endlichen Anzahl von Paaren enthalten sein, auf den der Schluss anwendbar wäre.

die zu T gehörige Reihe $A_1 A_2 \ldots A_n$ habe den Grad des Zusammenhanges g. Eine solche Reihe kann man immer durch Spaltung eines einzigen Gliedes A_k in A_k', A_k'' in eine Reihe vom Grade des Zusammenhanges $g-1$ verwandeln, wobei nur zu beachten ist, dass durch die Spaltung zwei gewisse Buchstaben von A_k, etwa a_λ und a_μ getrennt (d. h. der eine in A_k' der andere in A_k'' aufgenommen) werden müssen. (S. meine Abhandl. A, § 4 Zus.). Da nun die Endpunkte jedes der oben mit $l_\beta^{(\alpha)}$ bezeichneten Grenztheile der Grenze von T angehören und keine zwei dieser Theile einander ganz oder theilweise decken, so wird man immer in b_k einen Querschnitt, der zugleich Querschnitt in T ist, so ausführen können, dass durch denselben b_k in zwei einfach zusammenhängende Flächen b_k', b_k'' zerlegt wird, von denen b_k' den Grenztheil $l_k^{(\lambda)}$, b_k'' den Grenztheil $l_k^{(\mu)}$ enthält. Hierdurch entsteht aus T ein Flächensystem T', das von derselben Beschaffenheit wie T ist, für welches aber die zugehörige Reihe aus $A_1 A_2 \ldots A_n$ durch Spaltung von A_k in zwei Glieder A_k', A_k'' entsteht, von denen A_k' den Buchstaben a_λ, A_k'' den Buchstaben a_μ enthält. Diese Reihe $A_1 \ldots A_{k-1} A_k' A_k'' A_{k+1} \ldots A_n$ hat also den Grad des Zusammenhanges $g-1$. Mithin ist T' g-fach zusammenhängend, und T kann also durch einen Querschnitt in ein g-fach zusammenhängendes Flächensystem verwandelt werden, T ist folglich $(g+1)$-fach zusammenhängend.

§ 4.

Bei den Untersuchungen in § 2 haben wir nur solche Lagenänderungen des Systems der Verzweigungspunkte betrachtet, bei denen kein Zusammenfallen von Verzweigungspunkten stattfand. Wir wollen daher jetzt das Zusammenfallen von Verzweigungspunkten zum Gegenstand der Betrachtung machen.

Wir denken uns die Fläche F wie in § 2 construirt, indem wir uns wieder die Punkte P, welche die Projectionen der Windungspunkte darstellen, gruppenweise auf einander ausschliessende, einfach zusammenhängende Gebiete vertheilt denken, von denen wir indessen jetzt nur eines, das wir als Gebiet G bezeichnen, betrachten. $P_1, P_2, \ldots P_m$ seien die in G befindlichen Projectionen der Windungspunkte, $P_1 A$, $P_2 A, \ldots P_m A$ die Linien des in G befindlichen Theiles von dem die Projection des Systems der Uebergangslinien darstellenden Liniensystem und Π' sei das zu G gehörige Unterproduct in dem die Fläche darstellenden Product Π. Wir denken uns wie in § 2, dass innerhalb G die Lage des Punktsystems $(P_1 \ldots P_m)$ und damit die Fläche F sich stetig ändre, setzen jetzt aber voraus, dass in der Endlage sämmtliche Punkte P_1, P_2 ... P_m in einem Punkte von G vereinigt sind,

während in den vorangehenden Lagen keine zwei Punkte in einem Punkte vereinigt sein sollen. Den Uebergang des Punktsystems $(P_1 P_2 \ldots P_m)$ in diese Endlage bezeichnen wir als Zusammenfallen der in G befindlichen Punkte des Systems der Verzweigungspunkte.

Wir betrachten nun den über G befindlichen Theil der Fläche F. Darunter ist derjenige Theil von F zu verstehen, den ein längs der Grenze von G geführter, alle Blätter der Fläche durchdringender Schnitt aus der Fläche abtrennt. Dieser Flächentheil T kann in derselben Weise, wie das in § 3 betrachtete Flächensystem T, aus zwei Systemen offener, einfach zusammenhängender Flächen a und b entstanden gedacht werden. Um dieses einzusehen, denken wir uns in G m Querschnitte so ausgeführt, dass diese weder einander, noch eine der Linien $P_1 A$, $P_2 A$, $\ldots P_m A$ schneiden und G in $m+1$ Gebiete $g_0, g_1 \ldots g_m$ zerlegen, von denen g_0 keinen der Punkte $P_1 \ldots P_m$, $g_1 \ldots g_m$ je einen dieser Punkte enthalten (S. Figur).

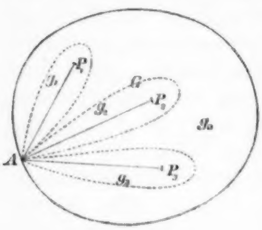


Fig. 3.

Werden nun längs diesen Querschnitten durch sämmtliche Blätter von T Schnitte geführt, so wird T durch diese Schnitte in zwei Systeme offener, einfach zusammenhängender Flächen zerlegt, von denen das eine aus den über g_0 befindlichen ebenen Blättertheilen, das andere aus den über $g_1 \ldots g_m$ befindlichen Windungsflächen *) besteht. Aus diesen beiden Flächensystemen ist T ebenso zusammengesetzt, wie das in § 3 betrachtete Flächensystem T aus den Systemen (a) und (b). Werden daher die Substitutionen in Π' in ihre Circularsubstitutionen zerlegt, und erhält man hierdurch $\Pi' = (A_1)(A_2) \ldots (A_n)$, so ist $A_1 A_2 \ldots A_n$ die zu T gehörige Reihe, deren Grad des Zusammenhangs die Ordnungszahl von T bestimmt.

Wird Π' selbst in seine Circularsubstitutionen zerlegt (als Product nicht zusammenhängender cyklischer Factoren dargestellt), und erhält man hierdurch (indem man auch etwaige identische Factoren mit aufnimmt): $\Pi' = (C_1)(C_2) \ldots (C_\varrho)$, so ist T von ϱ verschiedenen Randcurven $K_1, K_2, \ldots K_\varrho$ begrenzt, die resp. durch $(C_1), (C_2), \ldots (C_\varrho)$ bestimmt sind. Ist etwa $(C_1) = (a_1 a_2 \ldots a_{\alpha_1})$, so besteht K_1 aus α_1 Stücken $c_1, c_2, \ldots c_{\alpha_1}$, die resp. den Blättern $a_1, a_2, \ldots a_{\alpha_1}$ angehören und mit ihren Endpunkten an einander gefügt sind. Unterscheiden wir diese Endpunkte nämlich in Anfangs- und Endpunkte, indem wir uns die Stücke so, dass T zur Linken bleibt, durchlaufen denken, so

*) Unter diesen können sich natürlich auch Blättertheile befinden, die wir als Windungsflächen 0. Ordnung bezeichnen können.

entsteht K_1 aus $c_1, c_2, \ldots c_{\alpha_1}$ durch Vereinigung des Endpunkts von c_1 mit dem Anfangspunkt von c_2, des Endpunkts von c_2 mit dem Anfangspunkt von c_3 u. s. w. des Endpunkts von c_{α_1} mit dem Anfangspunkt von c_1.

Lassen wir nun das Punktsystem $(P_1 \ldots P_m)$ seine Lage stetig in G ändern, so müssen, wenn die Fläche F sich hierbei stetig ändern soll, die Circularsubstitutionen $(C_1), (C_2), \ldots (C_\varrho)$ unverändert bleiben. In der Endlage des Punktsystems, in der sämmtliche Punkte in einem Punkte vereinigt sind, sind auch die Linien $P_1A, P_2A, \ldots P_mA$ in einer Linie vereinigt. Die Uebergangslinien in T_1, längs denen die Blätter von T an einander geheftet sind, liegen also übereinander und T hat sich folglich in ein System von ϱ übereinander liegenden Windungsflächen verwandelt. Da nun mit den Circularsubstitutionen $(C_1), (C_2), \ldots (C_\varrho)$ auch die durch diese bestimmten Randcurven $K_1, K_2, \ldots K_\varrho$ unverändert bleiben müssen, so ergiebt sich, *dass beim Zusammenfallen der in G befindlichen Punkte des Systems der Verzweigungspunkte der über G befindliche Theil T der Riemann'schen Fläche in ein System von ϱ über einander liegenden Windungsflächen übergeht, welche von denselben ϱ Randcurven begrenzt werden, von denen der Flächentheil T vor dem Zusammenfallen begrenzt wird.*

Durch das Zusammenfallen mehrerer Punkte des Systems der Verzweigungspunkte kann dieses einen Verlust an Punkten erleiden. Von den Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$ repräsentirt im allgemeinen jeder mehrere Punkte des Systems der Verzweigungspunkte, nämlich soviele, wie die Summe der Ordnungszahlen der über ihm liegenden Windungspunkte angiebt. Die Anzahl der von sämmtlichen Punkten $P_1, P_2, \ldots P_m$ repräsentirten Punkte des Systems der Verzweigungspunkte ist daher gleich dem Excess E der Reihe $A_1, A_2, \ldots A_n$. Fallen die Punkte $P_1, P_2, \ldots P_m$ indessen in G in einem einzigen Punkte zusammen, so ist die Anzahl der von diesem Punkte repräsentirten Punkte des Systems der Verzweigungspunkte gleich dem Excess E' der Reihe $C_1, C_2, \ldots C_\varrho$. Der Verlust, welchen das System der Verzweigungspunkte durch das Zusammenfallen der Punkte $P_1 \ldots P_m$ erleidet, beträgt somit $E - E'$ Punkte. Bildet nun der Flächentheil T ein System von r getrennten Flächen, die also nicht mit einander zusammenhängen, während jede von einer Gruppe mit einander zusammenhängender Blätter gebildet wird, so werden die Blätter jeder dieser Gruppen durch die Buchstaben einer der transitiven Gruppen der Reihe $A_1, A_2, \ldots A_n$ repräsentirt, und die Anzahl der transitiven Gruppen dieser Reihe ist also gleich r. Bezeichnet N die Anzahl sämmtlicher Blätter resp. Buchstaben in $A_1, A_2, \ldots A_n$, g den Grad des Zusammenhanges dieser Reihe, so hat man $E = N - r + g$ (vergl. meine Abhandl. B, § 1). Anderseits ist $E' = N - \varrho$, folglich

$E - E' = g + \varrho - r$. Da nun $A_1 A_2 \dots A_n$ die zu T gehörige Reihe ist, so ergiebt sich hieraus unter Berücksichtigung von § 3:

Ist der über dem einfach zusammenhängenden Gebiete G der Ebene befindliche, ein System von r einzelnen Flächen darstellende Theil einer Riemann'schen Fläche $(g+1)$-fach zusammenhängend und von ϱ Randcurven begrenzt, so erleidet das System der Verzweigungspunkte der Fläche beim Zusammenfallen der in G befindlichen Punkte einen Verlust von $g + \varrho - r$ Punkten.

Da $g = \varrho - r + 2k$ (§ 1) ist, wo k eine positive ganze Zahl, oder Null ist, so ist $g + \varrho - r$ eine gerade Zahl, und $\frac{g + \varrho - r}{2}$ stellt die Anzahl der in Riemann's Sinne einander aufhebenden Punktepaare dar. Ist $g + \varrho - r = 0$, so muss, da stets $\varrho \geqq r$ ist, $\varrho = r$ und $g = 0$ sein. Ist umgekehrt $g = 0$, so muss wegen $g \geqq \varrho - r$ auch $\varrho = r$ und $g + \varrho - r = 0$ sein. Alsdann ist also jede der einzelnen Flächen, deren System den Flächentheil T bildet, von einer einzigen Randcurve begrenzt und geht daher beim Zusammenfallen von $P_1 \dots P_m$ in eine einzige Windungsfläche über. Man erhält somit als Folgerung aus dem Vorangehenden:

Damit beim Zusammenfallen der in dem einfach zusammenhängenden Gebiete G der Ebene befindlichen Punkte des Systems der Verzweigungspunkte einer Fläche dieses keinen Verlust an Punkten erleidet, ist nothwendig und hinreichend, dass der über G befindliche Theil T der Fläche einfach zusammenhängend ist. Alsdann geht durch das Zusammenfallen jede der einzelnen Flächen, deren System den Flächentheil T bildet, in eine einzige Windungsfläche über.

Die in der Einleitung mitgetheilten Elemente bieten den in diesem Satze betrachteten Fall dar; die Flächentheile über den einfach zusammenhängenden Gebieten der z-Ebene, auf welche die Punkte des Systems der Verzweigungspunkte gruppenweise beschränkt vorauszusetzen sind, sind einfach zusammenhängend.

Anhang.

Zwischen zwei Punkten P, P_1 im Innern oder auf der Grenze eines einfach zusammenhängenden, ganz im Endlichen liegenden Ebenentheils E giebt es nur eine einzige kürzeste Linie, deren Punkte im Innern oder auf der Grenze von E liegen.

Beweis. Gesetzt, es gäbe zwei solche kürzeste Linien L, L_1 zwischen P und P_1. Da man nun offenbar beim Durchlaufen von L oder L_1 von P nach P_1 durch jeden Punkt nur einmal hindurchkommen

kann*), so müsste entweder L mit L_1 selbst, oder ein Stück l von L mit einem Stück l_1 von L_1 eine einfach geschlossene Linie (§ 4) bilden, und diese Linie (ll_1) müsste ein Stück e von E vollständig begrenzen. Da E ganz im Endlichen liegt, so müsste auch e ganz im Endlichen liegen. Dieses Stück e könnte ferner ausser bei den Punkten A, B, in denen l und l_1 an einander stossen, nur einspringende Ecken besitzen und die krummlinigen Theile seiner Grenze (ll_1) müssten demselben überall die convexe Seite zuwenden. Denn besässe etwa e in dem Punkte C auf l eine ausspringende Ecke, oder wäre C ein Punkt eines krummlinigen Theiles von l, der e seine concave Seite zuwendete, so könnte man zwei Punkte D, E auf l zu beiden Seiten von C und in genügender Nähe von C durch eine Gerade in e verbinden und diese Gerade an die Stelle des Stückes DCE von L setzen und erhielte dadurch eine Linie, deren Punkte im Innern oder auf der Grenze von E lägen, und die kürzer wäre, als L. Ein solches endliches Ebenenstück mit höchstens zwei ausspringenden Ecken, dessen krummlinige Grenztheile dem Ebenenstück überall ihre convexe Seite zuwenden, ist aber unmöglich. Denn man könnte stets dadurch, dass man die krummlinigen Grenztheile durch gebrochene Linien ersetzte, an Stelle des Ebenenstücks ein gewöhnliches Polygon mit höchstens zwei ausspringenden Ecken erhalten. Ein solches Polygon kann aber nicht existiren, weil die Summe aller Innenwinkel desselben $2n - 4$ rechte Winkel betragen muss.

Schnepfenthal b. Waltershausen, Februar 1895.

---

*) Denn sonst würde man durch Ausschalten solcher Linienstücke, auf denen man von einem Punkte zu demselben Punkte zurück gelangt, eine kürzere Linie als L resp. L_1 erhalten.

Ueber die Parameterbestimmung von Punkten auf Curven zweiter und dritter Ordnung. Eine geometrische Einleitung in die Theorie der logarithmischen und elliptischen Functionen.

Von

C. Juel in Kopenhagen.

Die von Clebsch herrührende Parameterdarstellung der Punkte einer Curve dritter Ordnung ist bekanntlich für die Theorie dieser Curven höchst fruchtbar. Es ist nun freilich eine Theorie der elliptischen Functionen für die Gruppe der hiermit in Verbindung stehenden Sätze nicht in allen Fällen nothwendig, jedenfalls nicht, wenn keine dividirten Argumente gebraucht werden. Der Hauptsatz über eingeschriebene Steiner'sche Polygone ist z. B. schon mehrmals direct synthetisch bewiesen worden. Diese Seite der Sache behandle ich mit den einfachsten Mitteln in § 4 unter Benutzung einer gewissen geometrischen Addition von Punkten.

Durch Vermittlung der elliptischen Functionen ist aber wesentlich der Satz an den Tag gebracht, dass sich eine Curve dritter Ordnung eindeutig und continuirlich auf ein Parallelogramm abbilden lässt. Es ist dieser Satz auch von rein geometrischer Seite her höchst interessant, und dessen geometrischer Beweis bildet den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit; nur des leichteren Ausdruckes wegen ist die mehr algebraische Bezeichnung beibehalten, dass sich die Punkte der Curve durch ein System von doppeltperiodischen Parametern bestimmen lassen. Ich habe mich im Folgenden auf Curven mit reeller Invariante beschränkt; eine Erweiterung auf alle Curven dritter Ordnung, welche sich auf die in § 4 gegebenen im Allgemeinen gültigen Entwickelungen stützen wird, muss ich auf später verschieben.

Um das Gebiet aller Punkte der Curve zu übersehen, ist irgend ein geeignetes doppeltunendliches Substrat, eine „Riemann'sche Fläche" unbedingt nothwendig. Ich benutze dazu die von Hrn. Prof. Klein als „metrische Fläche" eingeführte Darstellung*), die ich übrigens schon

*) Man vergl. Klein's „Vorlesungen über Riemann'sche Flächen" I, pag. 221 (Göttingen 1892), sowie das Referat in diesen Annalen Bd. 45, pag. 143, wo auch auf eine Arbeit von Loud in den Annals of Mathem. vol. 8, 1883 hingewiesen ist, in welcher diese Flächen eingehend behandelt werden.

früher in meiner in der Abh. wiederholt zu erwähnenden Dissertation construirt habe.

In § 2 behandle ich die Zahlenbestimmung auf einem geschlossenen Bogen (d. h. die Abbildung des Bogens auf ein Geradenstück); die Darstellung kann als eine kurz gefasste moderne Formulirung der Euklidischen Zahlenbestimmung aufgefasst werden.

In § 3 gebe ich diejenige Parameterbestimmung auf einem Kegelschnitte, die zur allgemeinen projectiven Definition des Winkels leitet.

Es ist eine solche oft erforderlich, insbesondere ist ohne dieselbe eine geometrische Darstellung der Nicht-Euklidischen Geometrie, die sich doch heut zu Tage wesentlich auf die v. Staudt'sche Grundlage zu stützen hat, nicht wohl durchführbar.

An dieser Stelle erlaube ich mir die Bemerkung, dass die vorliegende Arbeit durchaus als eine Weiterentwickelung der v. Staudt'schen Theorie zu betrachten ist. In der That ist bei v. Staudt der Wurf seinem Wesen nach nur der Name des Parameters für die Elemente eines einförmigen Gebildes.

Die am Schluss des § 6 erwähnten u- und v-Curven sind den in der bekannten Harnack'schen Abhandlung*) besprochenen Breiten- und Meridiancurven (auf der neuen Riemann'schen Fläche) ganz analog, und es liessen sich an der Hand der Harnack'schen Entwickelungen diese Curven leicht näher untersuchen; der Kürze wegen habe ich dies jedoch unterlassen.

Das analytische Resumé im letzten Paragraphen enthält selbstverständlich nichts Neues, es kann und soll nur einen Ueberblick der erreichten Resultate geben. Vielleicht hat es jedoch ein Interesse, dass die geometrische Theorie — die ja im Grossen und Ganzen einer analytischen Theorie auf Grundlage des Additionstheorems gleichkommt — so einfach zu dem allgemeinen Ausdrucke des Integrales erster Art leitet; in den üblichen Darstellungen wird auch die — recht verstanden — eindeutige Lösung nicht so ausdrücklich hervorgehoben.

Nach vollendeter Arbeit sehe ich, dass Herr E. Kötter im Heft 2, Bd. 114 des Journals für die reine und angewandte Mathematik eine Arbeit publicirt hat, die mit der meinigen wesentliche Berührungspunkte hat. Ich habe jedoch die vorliegende Arbeit nicht geändert, theils weil Herr E. Kötter andere Methoden benutzt, theils, und hauptsächlich, weil dort nur reelle Punkte in Betracht gezogen werden.

Einen kurzen Bericht über meine Methode habe ich schon bei Gelegenheit der Versammlung der scandinavischen Naturforscher im Jahre 1892 gegeben.

*) „Ueber die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritten Grades." Diese Annalen Bd. 9.

§ 1.

Die zu einer gegebenen Curve gehörige Riemann'sche Fläche.

Im folgenden werden sowohl reelle wie imaginäre Punkte einer Curve in Betracht gezogen. Wenn man hierbei den rein synthetischen Standpunkt nicht verlassen will — und an demselben werde ich in dieser Arbeit überall festhalten — hat man sich auf die v. Staudt'schen Grundlagen zu stützen. Demzufolge würde man sich zunächst die Curve in einer imaginären Ebene denken, und als Bild der Gesammtheit ihrer Punkte die Trägercongruenz der Curvenpunkte benutzen. Wenn man sich aber, wie es hier der Einfachheit wegen geschehen möge, die Curve in einer reellen Ebene denkt, ist es einfacher ein anderes Bild zu benutzen, das im wesentlichen mit der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche zusammenfällt. Man erhält dies durch die folgende Definition, wobei nur zu bemerken ist, dass die Gesammtheit der reellen Punkte einer reellen Ebene, insofern die Punkte einer gewissen festen Geraden u als zusammenfallend betrachtet werden, als ein *Blatt* bezeichnet wird.

Die zu einer Curve n^{ter} Ordnung gehörige Riemann'sche Fläche ist die Projection der Curve aus einem festen imaginären Punkte P auf ein n-fach genommenes Blatt, nachdem noch die Blätter in einer näher zu bestimmenden Weise mit einander verbunden worden sind. (Die obige Gerade u ist hier der Träger von P.)

Diese Construction ist von Herrn Prof. Klein angegeben worden, der jedoch als Punkt P einen der Kreispunkte bevorzugt.*) Man kann nach den Erörterungen des Herrn Prof. Klein nur noch wünschen zu sehen, inwiefern sich die Construction in eine rein synthetische Darstellung einfügt, und dies mag hier in möglichster Kürze geschehen.

Man bemerke zuerst, dass *die nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen, welchen die Curve genügen muss, damit eine zugehörige Riemann'sche Fläche existire, die folgenden drei (und nur diese) sind:

1. Die Curve hat mit jeder Geraden ihrer Ebene eine bestimmte Zahl von n Punkten gemein.

2. In dem Curvenpunkte M giebt es im Allgemeinen eine bestimmte Tangente; jede andere durch M gehende Gerade schneidet die Curve nur ein Mal in M; die Ausnahmspunkte R liegen discret.

3. Die durch einen beliebigen Punkt P der Ebene gehenden Geraden, welche mit der Curve zusammenfallende (und nicht in P liegende) Punkte gemein haben, liegen discret.

---

*) Siehe die oben erwähnten Vorlesungen von Klein, über Riemann'sche Flächen. Ich bemerke, dass man auch durch beliebige Wahl des Projectionscentrums noch nicht die allgemeine projective Gestalt des Gebildes erhält. Siehe des Verf. Dissertation: Bidrag til dem imag. Linies og den imag. Plans Geometrie. Kjöbenhavn 1885. S. 100.

Es sei M ein gewöhnlicher Punkt der Curve C^n, die in diesem Punkte von PM nicht in zusammenfallenden Punkten geschnitten wird. Es lässt sich dann nach 3. in C^n ein zusammenhängendes Gebiet von Punkten herstellen, das M enthält, und von keiner durch P gehenden Geraden in zusammenfallenden Punkten geschnitten wird. Ein solches Gebiet nennt man ein *Elementargebiet*, so wie auch die Projection desselben auf eines der Blätter der Fläche.

Es schneide eine durch P gehende Gerade die Curve in n getrennten Punkten $M_1, M_2 \ldots M_n$ und das aus den n Blättern $K_1\, K_2 \ldots K_n$ zusammengesetzte Gebilde in den Punkten $M_1'\, M_2' \ldots M_n'$. Man kann sodann die Punkte $M_1\, M_2 \ldots M_n$ in dieser Ordnung den Punkten $M_1'\, M_2' \ldots M_n'$ entsprechen lassen. Führt man M_ν' einen beliebig bestimmten in K_ν liegenden Weg μ' entlang nach einem anderen Punkt N_ν', so wird dadurch auch der zugehörige Punkt M_ν in einen ganz bestimmten Punkt N_ν von C^n fallen. Voraussetzung ist nur, dass während der Bewegung die Gerade PM_ν niemals die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten R geschnitten hat, von welchen der eine sich ursprünglich in M_ν befand.

Ersetzt man μ' durch einen anderen Weg μ_1', der von M_ν' bis N_ν' führt, und keinen Punkt R_ν' (Projection eines Punktes R) enthält, so wird man auf C^n wieder denselben N_ν' entsprechenden Punkt finden, wie vorher, wenn nur die von μ' und μ_1' begrenzte ebene Fläche keinen Punkt R' enthält. Es ist dies selbstverständlich, weil in diesem Falle durch die Projection ein Elementargebiet in C^n und das entsprechende Gebiet in K_ν eindeutig auf einander bezogen sind.

In einem Punkte R' müssen zwei Blätter zusammengeheftet werden um das eindeutige Entsprechen der Curve und des Blättergebildes aufrecht zu erhalten; darum ist er aber noch nicht nothwendigerweise ein Verzweigungspunkt.

Denken wir uns zuerst, dass der Punkt R' kein Verzweigungspunkt ist. In dem Falle wird die Umgebung des Punktes zwei Elementargebiete bilden, welche nur den einen Punkt R' mit einander gemein haben, und dies Gebilde kann offenbar nicht auf ein einfaches Elementargebiet gegenseitig eindeutig und continuirlich abgebildet werden.

Wenn umgekehrt eine solche Abbildung gelingt, muss R' ein Verzweigungspunkt sein.

Um nun die Punkte R', welche Verzweigungspunkte sind, von denjenigen, welche es nicht sind, zu trennen, kann man davon Gebrauch machen, dass der Projectionspunkt P beliebig gewählt werden kann.

Es sei P der ursprüngliche Projectionspunkt, und es werde die Curve von der Geraden PR' in zwei in R zusammenfallenden

Punkten geschnitten. Es sei aber möglich einen anderen Punkt P_1 von der Art zu finden, dass die Curve von $P_1 R$ nur einmal in R geschnitten wird. Construirt man sodann die den Punkten P und P_1 entsprechenden Riemann'schen Flächen, so werden diese mittels der Curve eindeutig und continuirlich auf einander bezogen (wenn sämmtliche Blätter richtig verbunden sind), also insbesondere auch die Umgebungen derjenigen Punkte, in welche R projicirt wird. Die Umgebung von R wird aber aus P_1 in ein einfaches Elementargebiet projicirt; die Projection desselben Punktes aus P_1 müss desshalb ein Verzweigungspunkt sein.

Es ist dieser Schluss auch dann brauchbar, wenn P_1 als ein reeller Punkt zu wählen wäre. Man würde in dem Falle nur zuerst eine imaginäre Collineation anwenden, um P_1 in einen imaginären Punkt zu transformiren.

Man sieht nun, dass ein gewöhnlicher Doppelpunkt D zu keiner Verzweigung Anlass geben wird; wählt man P_1 in D, so werden nämlich die D naheliegenden Punkte in zwei getrennte Elementargebiete projicirt.

Eine gewöhnliche Spitze wird dagegen in einen Verzweigungspunkt projicirt; man braucht nur P_1 in der Spitze selbst zu wählen. Der Berührungspunkt einer von P ausgehenden Tangente mit der Curve wird in einen Verzweigungspunkt projicirt; man kann P_1 beliebig ausserhalb der Geraden PR wählen. Liegt P in der Curve, so wird P selbst zu keiner Verzweigung Anlass geben. Dies wird aber der Fall sein, wenn P zugleich ein gewöhnlicher Inflexionspunkt ist; man wähle nur P_1 beliebig ausserhalb der Inflexionstangente. Andere Singularitäten sollen hier nicht betrachtet werden.

Für die construirte Riemann'sche Fläche kann man den gewöhnlichen Geschlechtssatz aufstellen. Besonders leicht lassen sich die so einfachen Neumann'schen Betrachtungen in projectiver Form aufstellen, und man erhält

$$2(p-1) = n' + e - 2n,$$

wo n und n' Ordnung und Classe, e die Zahl der Verzweigungspunkte (reducirten Spitzen) bedeuten.

Sind zwei Curven continuirlich und gegenseitig eindeutig auf einander bezogen, so müssen sie nothwendigerweise dasselbe Geschlecht haben. Eine Curve zweiter Ordnung und eine allgemeine Curve dritter Ordnung können also nicht so auf einander bezogen sein.

Mittels der hier entwickelten Betrachtungen lassen sich übrigens gewisse einfache Sätze auch rein geometrisch unmittelbar gewinnen — nämlich durch Benutzung des Geschlechtssatzes — wobei zu merken ist, dass die Curven durch die Bedingungen 1., 2., 3. *und nur durch diese* definirt sind.

Ich erwähne: Aus jedem Punkte P der Ebene geht dieselbe Zahl von Tangenten an die Curve; von diesen fallen zwei zusammen, wenn P in einen gewöhnlichen Curvenpunkt hineinrückt. Von den aus einer Spitze oder einem Inflexionspunkte ausgehenden Tangenten fallen drei in der Tangente des Punktes zusammen. Uebrigens werde ich hier nicht auf allgemeinere Anwendungen eingehen.

§ 2.

Ueber die Bestimmung der Punkte eines nicht geschlossenen Bogens mittels Zahlen.

In diesem Paragraphen untersuchen wir die Parameterbestimmung der Punkte eines reellen endlichen nicht geschlossenen Bogens; die Bezeichnungen seien so gewählt, dass die Parameter der Punkte $A_r\, B_r\, M_s, \ldots$ mit $\alpha_r\, \beta_r\, \mu_s \ldots$ bezeichnet werden.

Es sei nun vorausgesetzt, dass die Punkte des Bogens OA mit einander wie folgt verknüpft werden können:

1) Sind M und N zwei beliebige Punkte des Bogens, so kann man mittels einer eindeutigen Construction aus diesen einen Punkt P ableiten, der dem Bogen angehören kann. Ist dies der Fall, so schreibt man

$$P = M + N.$$

2) $M + N = N + M.$

3) $M + (N + P) = (M + N) + P.$

4) Bilden OMM_1 eine Folge, und gehört $M_1 + N = P_1$ dem Bogen an, so wird dies auch mit $M + N = P$ der Fall sein, und es werden die Punkte OPP_1 eine Folge bilden.

5) Ist $P_1 = M_1 + N$ ein von O und A verschiedener aber sonst beliebiger Punkt des Bogens, und durchläuft ein Punkt M continuirlich ein hinreichend kleines, M_1 enthaltendes Bogenintervall, so wird auch $P = M + N$ (mit festgehaltenem N) dem Bogen angehören und ein endliches, P_1 (im Inneren) enthaltendes Bogenintervall continuirlich durchlaufen.

6) $M + O = M.$

Sind diese Bedingungen erfüllt, so wird jedem Punkte des Bogens ein eindeutig bestimmter Parameter entsprechen, insofern man die Parameter o und α der Endpunkte O und A als gegeben voraussetzt, und ferner daran festhält, dass aus $A + B = C$ immer $\alpha + \beta = \gamma$, und umgekehrt, folgen soll.

Um die Möglichkeit und reale Existenz dieser Bestimmung einzusehen, bemerke man erstens, dass man, wenn OMP eine Folge bilden, immer einen und nur einen Punkt N finden kann, so dass $M + N = P$. Man braucht hierbei nur eine endliche Zahl von

Anwendungen der Voraussetzungen 4) und 5) zu machen (N lässt sich z. B. als Grenzpunkt darstellen).

Ferner kann man, wenn M ein beliebiger Punkt des Bogens ist, den Punkt M' eindeutig so bestimmen, dass

$$M' + M' = 2M' = M.$$

Aus 4) und 6) folgt nämlich, dass, wenn $M + N = P$, dann OMP und ONP eine Folge bilden.

Ist ferner

$$M + N = M_1 + N_1 = P$$

und bilden OMM_1 eine Folge, so müssen ON_1N eine Folge bilden. Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, so hätte man nur $M + N_1 = P_1$ zu setzen, und es müssten OPP_1 sowie auch OP_1P nach 4) eine Folge bilden, während doch P und P_1 nicht zusammenfallen. Setzt man also:

$$X + Y = M,$$

und durchläuft X den Bogen OM immer in demselben Sinn continuirlich, so wird Y (wie man aus 5) folgert) den Bogen MO continuirlich durchlaufen, so dass X und Y in einem bestimmten Punkte M' zusammenfallen müssen; (es lässt sich übrigens dieser Punkt auch als Grenzpunkt definiren). M' variirt continuirlich mit M (5).

Jetzt kann man nach und nach diejenigen Punkte bestimmen, deren Parameter die Werthe $p \cdot \frac{\alpha}{2^n}$ haben, und umgekehrt wird jede Zahl dieser Form der Parameter eines bestimmten Punktes des Bogens sein.

Aus 2) und 3) schliesst man leicht, dass Punkte mit den Parametern $p \cdot \frac{\alpha}{2^n}$ und $p_1 \cdot \frac{\alpha}{2^{n_1}}$ zusammenfallen, wenn arithmetisch $\frac{p}{2^n} = \frac{p_1}{2^{n_1}}$, und ferner, in Verbindung mit 4), dass OMN eine Folge bilden, wenn der Parameter $\frac{p}{2^n}\alpha$ von M kleiner als der Parameter $\frac{p_1}{2^{n_1}}\alpha$ von N ist.

Alle die betrachteten Punkte bilden also unter Zugrundelegung der geometrischen (und zugleich der arithmetischen) Addition eine Gruppe — *die Hauptgruppe* — deren Punkte nach der arithmetischen Grösse ihrer Parameter geordnet sind.

Es gilt jetzt, den Parameter eines beliebigen Punktes M des Bogens zu bestimmen. Die Punkte mit den Parametern $\frac{p}{2^n}\alpha$, wo n constant ist, während p die Werthe $1, 2, 3, 2^{n-1}$ annimmt, bilden eine Folge, und es seien S_n und $S_{n+1} = T_n$ diejenigen dieser Punkte, zwischen welchen M liegt. Wenn M nun überhaupt nicht der Hauptgruppe angehört, so bilden die Punkte $S_1\, S_2 \ldots S_n$ eine unendliche Reihe, deren Punkte in dieser Ordnung auf einander folgen und jedenfalls

T_1 nicht überschreiten können. Die Reihe wird demnach einen Grenzpunkt S haben, und S_n wird diesem beliebig nahe gebracht werden können. Ebenso bilden die Punkte $T_1\, T_2 \ldots T_n$ eine Reihe mit einem gewissen Grenzpunkt T. Man sieht nun leicht, dass S und T beide mit M zusammenfallen müssen. Wenn dies nämlich nicht der Fall wäre, könnte man den Punkt U_n bestimmen, dessen Parameter die halbe Summe der Parameter der Punkte S_n und T_n ist. Der Punkt U_n liegt zwischen S_n und T_n; er muss aber auch für hinreichend grosse n zwischen S und T liegen, denn S_n und T_n können beliebig nahe an S und T angenommen werden (sonst folgt aus $\lim S_n = \lim U_n$ sogleich $S = T$). U_n wird ferner demjenigen Punkte U beliebig nahe kommen können, der *geometrisch* durch

$$2U = S + T$$

bestimmt ist. Weil U_n für hinreichend grosse n entweder im Bogenintervalle MS oder MT liegt, und ferner *der Hauptgruppe angehört,* können S und T nicht die behaupteten Grenzpunkte sein.

Aus der Construction folgt, dass *sämmtliche* Punkte des Bogens nach der arithmetischen Grösse ihrer Parameter geordnet sind.

Es ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Es wurde nämlich eine geometrische Addition von Punkten vorgeschrieben, aber diese wurde zur Parameterbestimmung in der That nur zur Charakterisirung der Punkte unserer Hauptgruppe benutzt. Man muss desshalb direct nachsehen, ob überall die arithmetische Addition mit der geometrischen zusammenfällt, d. h. ob stets $\alpha + \beta = \gamma$ insofern $A + B = C$ ist.

Man kann aber in allen Fällen die Punkte A und B als Grenzpunkte von Reihen $A_1, A_2, A_3, \ldots$ und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ bestimmen, welche beide in demselben Sinne laufen, und aus Punkten der Hauptgruppe gebildet sind. Die Reihe

$$A_1 + B_1,\ A_2 + B_2,\ A_3 + B_3, \ldots$$

wird dann nach 4 auch einen Grenzpunkt haben, und dieser muss zufolge 5 mit $A + B$ zusammenfallen. Hieraus folgt nach dem obigen $\alpha + \beta = \gamma$.

Im Folgenden werden wir die Punkte *geschlossener* reeller Curven durch Parameter zu charakterisiren haben. Der in diesem Paragraphen gegebenen Anleitung zufolge wird man diese Curve in Bögen theilen, und zunächst die Punkte jedes dieser Bögen individualisiren.

Man hat dann im wesentlichen ferner zuzusehen, erstens, dass die verschiedenen Parameterreihen continuirlich in einander übergehen, zweitens, dass auch über das erweiterte Gebiet erstreckt, die arithmetische Addition mit der geometrischen in Uebereinstimmung ist.

§ 3.

Parameterbestimmung der Punkte einer Curve zweiter Ordnung.

Wie bekannt kann man jeden Punkt M einer Curve zweiter Ordnung durch den Wurf $(OEUM)$ bestimmen, der aus M und drei festen Curvenpunkten O, E und U gebildet ist. Die Würfe lassen sich nach v. Staudt so additiv und multiplicativ mit einander verknüpfen, dass die Operationen den gewöhnlichen commutativen, associativen und distributiven Gesetzen genügen.

Wir wollen hier einen anderen Weg versuchen, um die Punkte der Curve durch Parameter zu charakterisiren.

Hierbei soll jedem Parameter nur ein Punkt entsprechen, und Parametern, welche sich ohne Grenze nähern, sollen Punkte entsprechen, welche sich ohne Grenze nähern.

Als additive Operation wählen wir aber diejenige, welche v. Staudt multiplicativ nennt. Sind μ_1, μ_2 und μ die *neuen* Parameter dreier Curvenpunkte M_1, M_2 und M, so schreiben wir also

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu,$$

und

$$M_1 + M_2 = M,$$

wenn OU, $M_1 M_2$ und EM eine Involution bilden, d. h. wenn die Geraden $M_1 M_2$ und EM sich auf der festen Geraden $u = OU$ schneiden. Hieraus folgt schon, was man unter $M_1 - M_2$ zu verstehen hat.*)

Es wird ferner unsere Aufgabe sein, diese Parameter in die Form $\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$ zu bringen, wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ endliche und reelle Zahlen sind, so dass die Addition zweier Parameter sich auf die Addition jeder der zwei Glieder $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}i$ reduciren lässt; i ist hier eine beliebige nicht reelle Constante.

Das System der Zahlen $\mathfrak{a}$ — sowie $\mathfrak{b}i$ — bildet der Voraussetzung nach mit der additiven Transformation zusammen eine Gruppe. Es ist demnach unsere erste Aufgabe zwei continuirliche Gruppen von Punkten zu finden, welche durch diese zwei Gruppen von Zahlen charakterisirt werden. Es ist so ziemlich von selbst geboten, diese Gruppen als einfache Ketten im v. Staudt'schen Sinne zu nehmen, und wir nennen sie k_1 und k_2. Weil den Construction zufolge immer

$$E + M = M,$$

so muss E in jeder der zwei Ketten liegen und ihm der Parameter 0 gegeben werden.

Sind nun M_1 und M_2 zwei Punkte der Kette k_1 (oder k_2), und ist M der durch $\mu = \mu_1 + \mu_2$ bestimmte Punkt, so wird auch M der Kette k_1 (oder k_2) angehören. Bilden aber OU, $M_1 M_2$, EM eine Involution, so hat man

*) Siehe v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage § 20.

$$(OUEM_1) \barwedge (UOMM_2) \barwedge (OUM_2M),$$

so dass OO; UU; EM_2; M_1M Paare in einer Projectivität bilden, und in dieser wird der Voraussetzung nach die Kette k_1 (oder k_2) sich selbst entsprechen. Daraus folgt, dass k_1 und k_2 zwei durch E gehende Ketten sein müssen, von welchen die eine — sagen wir k_2 — durch O und U geht, während die andere k_1 durch diese zwei Punkte harmonisch getrennt wird.*) k_1 und k_2 schneiden einander ausser in O noch in dem vierten harmonischen Punkte F zu O, E und U.

F charakterisiren wir durch einen beliebigen aber reellen Parameter ω. Aus der additiven Construction folgt dann, dass E nicht nur durch O sondern auch durch 2ω charakterisirt werden muss, d. h. es wird 2ω eine Periode der (hypothetisch angenommenen) Parameterbestimmung sein.

Nehmen wir der einfacheren Darstellung wegen an, dass k_1 die reellen Punkte der Curve enthält, wodurch O und U conjugirt imaginär werden; es lässt sich dies immer durch eine lineare Transformation erreichen.

Der reelle Zweig k_1 wird durch E und F in zwei Bögen σ' und σ'' getheilt. Auf einen dieser Bögen, sagen wir σ', kann man offenbar die Resultate des vorigen Paragraphen anwenden, und es werden hierdurch die Punkte von σ' durch Parameter charakterisirt, welche sämmtlich zwischen 0 und ω liegen.

Den Parameter μ' eines Punktes M' des Bogens σ'' bestimmen wir, indem wir M' mit E und wieder den Punkt (u. EM') mit F verbinden. Diese letzte Gerade schneidet k_1 nochmals in einem Punkte M, der offenbar in σ' liegt, und man hat

$$M' = M + F.$$

In Uebereinstimmung hiermit setzen wir

$$\mu' = \mu + \omega,$$

wo μ den Parameter von M bedeutet.

Die neue Zahlenreihe schliesst sich in F der ersteren continuirlich an, und erstreckt sich von ω bis 2ω. Hält man ferner fest, dass zwei Zahlen μ und $\mu + 2p\omega$ (p ganzzahlig) denselben Punkt bestimmen, so kann man leicht zeigen, dass innerhalb der *ganzen* Kette k_1 die geometrische Addition mit der arithmetischen zusammenfällt.

Es seien, um nur einen Fall zu betrachten, A und B zwei Punkte von σ''. Man hat dann

$$A = A_1 + F \quad \text{und} \quad B = B_1 + F,$$

wo A_1 und B_1 in σ' liegen, und also

*) Siehe v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage Nr. 243.

$$\alpha = \alpha_1 + \omega, \quad \beta = \beta_1 + \omega,$$

wo α_1 und β_1 zwischen 0 und ω liegen.

Weil die associativen und commutativen Gesetze nach v. Staudt, *für die geometrischen Operationen* über die ganze Curve hin richtig sind, so folgt:

$$A + B = A_1 + B_1 + F + F = A_1 + B_1 + E : A_1 + B_1 .$$

Ist nun $\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 < \omega$, so wird $C_1 = A_1 + B_1$ in σ' liegen und den Parameter $\alpha_1 + \beta_1$ haben, der den obigen Festsetzungen zufolge mit $\alpha + \beta$ äquivalent ist.

Ist dagegen $\alpha_1 + \beta_1 > \omega$, so muss man wieder

$$A_1 + B_1 = F + C_1,$$

und also

$$\alpha_1 + \beta_1 = \gamma_1 + \omega$$

setzen, wonach man leicht sieht, dass auch in diesem Falle, von Perioden abgesehen, der Parameter von $A + B$ gleich $\alpha + \beta$ zu setzen ist.

Wir gehen jetzt dazu über, die Punkte der durch O und U gehenden Kette k_2 durch Parameter zu bestimmen. Man kann durch eine (neue) lineare Transformation erreichen, dass diese Kette reell wird, und dies möge gleich angenommen werden. Die Punkte O und U sind dann reell und theilen k_2 in zwei Bögen σ_1 und σ_2, von denen derjenige, der E enthält, σ_1 sein mag. Es ist nun unbedingt ein neuer Ansatz nothwendig um die Parameter der Punkte von k_2 festzustellen, und wir geben einem festen aber übrigens beliebigen Punkt N_1 von σ_1, der dem Bogen EU angehören mag, einen bestimmten nicht reellen Parameter z. B. i.

Die Punkte des Bogens EU_1 lassen sich dann den Betrachtungen in § 2 zufolge mit Parametern αi versehen, wo $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Construirt man ferner die Punkte

$$N_2 = N_1 + N_1, \; N_3 = N_2 + N_1, \ldots$$

so bilden diese, wie aus der Construction ersichtlich, eine unendliche Folge mit U als Grenzpunkt. Einem zwischen N_r und N_{r+1} liegenden Punkt M giebt man den Parameter $ri + \mu'$, wo μ' der Parameter desjenigen Curvenpunktes ist, der durch $M' + N_r = M$ bestimmt ist, und, wie leicht zu beweisen, zwischen E und N_1 liegt. Es sei $si + \beta' = \pi$ der Parameter eines anderen Punktes P des Bogens EU, und es sei $M + P = R$. Man hat dann

$$R = N_r + M' + N_s + P' = N_{r+s} + (M' + N').$$

Liegt nun $M' + N'$ zwischen E und N_1, so hat man der Definition zufolge sogleich, dass der Parameter von R der Summe der Parameter von M und P gleich ist; sonst setzt man wieder

$$M' + N' = N_1 + R' \text{ u. s. w.}$$

Einen Punkt M des Bogens EO versieht man in folgender Weise, *der geometrischen Addition gemäss*, mit einem Parameter μ. Es schneide die Tangente in E die Gerade u in G, und ferner GM die Kette nochmals in M'. Dieser Punkt liegt dann in dem Bogen EU, und ist μ' der Parameter dieses Punktes, so setzt man

$$\mu = -\mu'.$$

Diese Zahlenreihe schliesst sich in E der ersteren continuirlich an, und es werden den Punkten U und O bezw. die Parameter $+\infty$ und $-\infty$ zugelegt.

Es sind noch die Punkte von σ_2 in Betracht zu ziehen. Die Parameterbestimmung derselben fordert keinen neuen Ansatz, obgleich die neue Zahlenreihe sich der ersteren nicht continuirlich anschliesst, weil schon ein Punkt von σ_2 nämlich F mit dem Parameter ω versehen ist. Die Bestimmung geschieht *der geometrischen Addition gemäss* in der folgenden Weise: es werde u von EF in H und k_2 nochmals von HM in M' geschnitten. Ist hier M ein Punkt von σ_2, so wird M' in σ_1 liegen, und ist μ' der Parameter des letzteren Punktes, so setzt man

$$\mu = \omega - \mu'.$$

Dass die geometrische Addition mit der arithmetischen *innerhalb der ganzen Kette* k_2 zusammenfällt, sieht man schliesslich wie schon mehrmals früher.

Jetzt entspricht jeder Zahl $\mu = \alpha + \beta i$ (wo α und β reell sind) ein und nur ein Curvenpunkt M; dieser Punkt ist mittels geometrischer Addition der durch α und βi charakterisirten Punkte bestimmt. Wenn μ continuirlich variirt, wird auch der entsprechende Punkt continuirlich variiren.

Es gilt jetzt jeden Curvenpunkt M eindeutig als geometrische Summe eines Punktes M_1 von k_1 und eines Punktes M_2 von k_2 darzustellen. Um dies thun zu können, denken wir uns die Kette k_1 reell. E wird dann auch reell, während O und U conjugirt imaginär werden. Nach dieser Festsetzung ist der conjugirt imaginäre Punkt M' zu jedem Punkte M der Curve ein vollständig bestimmter Punkt des Kegelschnittes. Der durch

$$M' + M = P$$

bestimmte Punkt wird reell und gehört demnach der Kette k_1 an. Wir werden nun zeigen, dass

$$Q = M - M'$$

der Kette k_2 angehört. Weil O, E und U in k_2 liegen, gilt es zu zeigen, dass der Wurf $(OEUQ)$ reell (neutral) ist. Weil

$$(EOUM') \barwedge (MUOQ) \barwedge (QOUM),$$

bilden OO, UU, EQ, $M'M$ vier Paare in einer Projectivität. Ist Q'

der conjugirt imaginäre Punkt zu Q, so werden dann auch UU, OO, EQ', MM' vier Paare einer neuen Projectivität sein, und ferner, weil diese offenbar zur ersteren invers ist, wieder OO, UU, EQ, $Q'E$ vier Paare in der ersteren Projectivität. Hieraus folgt

$$(OEUQ') \barwedge (OQUE) \barwedge (UEOQ).$$

Die aus paarweise conjugirt imaginären Elementen gebildeten Würfe $(OEUQ')$ und $(UEOQ)$ sind also gleich, und müssen demnach reell sein, d. h. Q wird in der Kette k_2 liegen.

Man hat nun

$$2M = (M+M') + (M-M') = P + Q.$$

Aus der additiven Construction folgt, dass, wenn N gegeben ist, dann immer zwei und nur zwei Punkte $\frac{1}{2}N$ durch $N = \frac{1}{2}N + \frac{1}{2}N$ bestimmt sind; ist der eine von diesen A, so wird der andere $A + F$ sein, weil $2F = E$ ist.

Setzt man

$$M = \frac{1}{2}Q + R,$$

so hat man

$$2M = Q + 2R,$$

also

$$2R = P.$$

Man kann also immer

$$M = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q$$

setzen. *Wir sind jedoch hiermit nicht ganz fertig, denn freilich gehört* $\frac{1}{2}P$ *immer der Kette* k_1 *an, aber* $\frac{1}{2}Q$ *wird nicht immer der Kette* k_2 *angehören;* es ist dies davon abhängig, ob Q in σ_1 oder in σ_2 liegt. Es sei π der Parameter von P. Im ersten Falle sei ϱi der Parameter von Q. Man construire dann in k_1 einen Punkt P' mit dem Parameter $\frac{1}{2}\pi$ und in k_2 (d. h. σ_1) einen Punkt Q' mit dem Parameter $\frac{1}{2}\varrho i$, und man hat

$$M = P' + Q' \quad \text{oder} \quad M = (P' + F) + Q',$$

also

$$\mu = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\varrho i \quad \text{oder} \quad \mu = \left(\frac{1}{2}\pi + \omega\right) + \frac{1}{2}\varrho i,$$

wobei es constructiv niemals zweifelhaft sein kann, welche Formel zu wählen ist.

Im zweiten Falle sei $\varrho i + \omega$ der Parameter von Q. Man construire dann in k_1 die Punkte P' und S' mit den Parametern $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\omega$, in k_2 den Punkt Q' mit dem Parameter $\frac{1}{2}\varrho i$.

Man hat dann

$$\tfrac{1}{2}Q = S' + Q' \quad \text{oder} \quad \tfrac{1}{2}Q = S' + F + Q'$$

also

$$\mu = \left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\omega\right) + \tfrac{1}{2}\varrho i \quad \text{oder} \quad \mu = \left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{3}{2}\omega\right) + \tfrac{1}{2}\varrho i,$$

zwischen welchen Formeln die Wahl constructiv niemals zweifelhaft sein kann.

Dass endlich die arithmetische mit der geometrischen Addition über die ganze Curve hin in Uebereinstimmung ist, folgt aus dem associativen Gesetze.

Wir wollen noch *die Parameterbestimmung für den Fall* näher betrachten, *dass die Punkte unendlich nahe an E liegen.* Es sind dann die Zahlen unendlich klein, und die Punkte bilden mit der additiven Operation zusammen eine Gruppe. Bestimmt man die Punkte mittels eines Parallelcoordinatensystems, in dem die Tangente e in E die Abscissenaxe und E der Anfangspunkt ist, so werden die Ordinaten unendlich klein zweiter Ordnung, wenn die Abscissen erster Ordnung sind (eine Folge des Satzes von Carnot).

Liegen M_1 und M_2 unendlich nahe an E, so wird die Gerade M_1M_2 unendlich nahe an e liegen, und u in einem Punkte L schneiden, der in endlichem Abstande von E liegt. Zieht man nun aus L diejenige Tangente l an den Kegelschnitt, die in einem E unendlich nahe liegenden Punkte L_1 berührt, und projicirt man E, M_1, M_2 und $M = M_1 + M_2$ aus einem Punkt S der Polare zu L auf l in $E' \ldots M'$, so werden die Projectionen M_1' und M_2' sowie M' und E' durch L_1 und L harmonisch getrennt sein. Man hat desshalb bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$(1) \qquad E'M' = E'M_1' + E'M_2'.$$

Projicirt man auf e statt auf l, so werden hierdurch die gegenseitigen Abstände der neuen Projectionen nur um Grössen höchstens zweiter Ordnung geändert, und dasselbe gilt auch noch, wenn nicht aus S sondern aus einem anderen beliebig gewählten Punkt der Ebene projicirt wird; es sind nämlich alle Strecken $M_1M_1' \ldots$ zweiter Ordnung.

Es folgt nun aus (1), dass es *nicht im Widerspruch* mit der geometrischen Addition ist, die Parameter derjenigen Punkte der Curve, welche unendlich nahe an E liegen, bis auf Grössen, welche im Verhältniss zu den Parametern selbst unendlich klein sind, den Abscissen dieser Punkte proportional zu setzen — E immer als Anfangspunkt des Coordinatensystems angenommen.

Es ist aber nicht richtig, diese Annahme als eine *nothwendige Folge* aus den übrigen Voraussetzungen anzusehen. *Für die Punktmenge*

innerhalb einer der obigen Ketten k_1 und k_2 behaupten wir jedoch, dass dies berechtigt ist.

Gehört nämlich M einer dieser Ketten z. B. k_1 an, und hat er den Parameter μ und die Abscisse ξ, beide unendlich klein vorausgesetzt, so wird dem obigen zufolge die Abscisse desjenigen Punktes, deren Parameter $\frac{p}{2^n}\mu$ ist, gleich $\frac{p}{2^n}\xi$ sein. Weil demnach die Behauptung für die Punkte der Hauptgruppe im Sinne des § 2 richtig ist, wird sie den dortigen Entwickelungen zufolge überhaupt richtig sein, so dass man hat:

$$\mu = c_1\xi, \quad (c_1 \text{ constant})$$

wenn ξ unendlich klein ist.

Für die Punkte der Kette k_2 hat man ebenso für unendlich kleine Parameter μ nothwendigerweise

$$\mu = c_2\xi.$$

Es ist aber eine neue Voraussetzung $c_1 = c_2$ zu setzen. Thut man dies, so folgt, dass man immer, wenn μ und ξ unendlich klein sind,

$$\mu = c\xi$$

setzen *muss*, weil jeder Curvenpunkt als Summe eines Punktes von k_1 und eines Punktes von k_2 aufgefasst werden kann.

Früher war die Parameterbestimmung von zwei willkürlichen Constanten abhängig, denn ausser ω wurde noch der Parameter eines Punktes von σ beliebig gewählt. Diese zweite Constante wird aber von ω abhängig, wenn das Grenzverhältniss zwischen dem Parameter μ und der oben genannten Abscisse ξ eines Punktes M dasselbe sein soll, sowohl wenn M sich längs k_1, wie wenn M sich längs k_2 dem Punkte E nähert. (Von einer willkürlichen multiplicativen Constante wird ganz abgesehen).

§ 4.

Hypothetische Aufstellung der Hauptsätze über die Parameterbestimmung der Punkte einer reellen Curve dritter Ordnung.

Es ist unsere Aufgabe, die Punkte einer Curve dritter Ordnung durch endliche Zahlen von der Form $\mathfrak{a} + i\mathfrak{b}$ zu charakterisiren — oder mehr geometrisch ausgedrückt, die Punkte der Curve continuirlich und gegenseitig eindeutig auf die Punkte eines irgendwie begrenzten Gebietes eines einfachen Blattes abzubilden.

Als *erste Forderung* an die Zahlenbestimmung stellen wir diejenige, dass jeder Zahl nur ein Punkt entspricht. Die Forderung, dass umgekehrt zugleich jedem Punkte nur eine Zahl entspricht, ist dann über die ganze Curve hin nicht festzuhalten.

Wir verlangen aber *zweitens*, dass *die Zahlenbestimmung innerhalb eines hinreichend kleinen Gebietes eindeutig und continuirlich sein soll.* Es hat diese Forderung für die zur Curve gehörige Riemann'schen Fläche den bestimmten Sinn, dass man *mittels der Parameterbestimmung* jedes Elementargebiet der Riemann'schen Fläche gegenseitig eindeutig und continuirlich auf ein einfaches Flächenstück (des oben genannten einfachen Blattes) wird abbilden können.

Denken wir uns nun, dass eine solche Parameterbestimmung möglich ist, und wird einem Punkt M eine Zahl μ beigelegt, und führen innerhalb eines und desselben Elementargebietes zwei Wege σ und σ_1 von M zu einem anderen Punkt M_1, so wird man der genannten Forderung zufolge längs beider Wege mit derselben Zahl in M_1 endigen. Dies gilt aber auch noch, wenn die auf einander folgenden Theile von σ_1 in Elementargebiete hineingelegt werden können, welche zugleich die auf einander folgenden Theile von σ enthalten. Sämmtliche von M ausgehenden im gewöhnlichen Sinne auf einander reductiblen Wege müssen desshalb der bekannten Schlussweise zufolge jedem anderen Punkte der Riemann'schen Fläche dieselbe Zahl zuordnen. Auf einer Fläche mit der Grundzahl 2, wie im vorliegenden Falle, lassen sich aber alle geschlossenen von M ausgehenden Wege aus anderen zusammensetzen, welche theils zu einem Punkte, theils zu zwei anderen festen Wegen „reducirbar" sind. Hieraus folgt, dass die Zahlen, welche einem Punkte der Curve entsprechen, sämmtlich von der Form $\alpha + 2m\omega + 2m_1\omega_1$ sein müssen, so dass die Bestimmung von zwei Perioden 2ω und $2\omega_1$ abhängig ist.

Mit den Parametern (Zahlen) wünscht man nun operiren (rechnen) zu können. Um Operationsregeln zu gewinnen, stellen wir eine geometrische Addition von Curvenpunkten auf, und verlangen als *dritte Forderung*, dass

$$\alpha + \beta \equiv \gamma \pmod{2\omega, 2\omega'},$$

wenn α, β und γ die Parameter der Punkte A, B und C sind, und C in sogleich näher zu beschreibender Weise die geometrische Summe der Punkte A und B ist.

Die geometrische Addition ist so zu charakterisiren, dass sie in die oben § 3 geschilderte übergeht, wenn C^3 in eine C^2 und eine Gerade zerfällt. Diejenige Gerade aber, welche in § 3 mit der Curve C^2 verknüpft wurde, war $u = OU$, und wir haben dort

$$A + B = C$$

gesetzt, wenn die Geraden AB und EC sich auf u schneiden, wobei unter E ein beliebig gewählter Nullpunkt der Zahlenbestimmung zu verstehen ist. Es leitet diese Analogie einfach dazu

$$A + B = C$$

zu setzen, wenn die Geraden AB und OC sich auf der Curve C^3 selbst schneiden; O mag hier einstweilen ein fester beliebig gewählter Nullpunkt sein.

Es folgt aus der Definition, dass diese Addition *commutativ* ist.

Sie wird aber auch *associativ* sein, d. h. man hat

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Es schneide die Curve C^3

die Gerade AB nochmals in M_1,
„ „ BC „ „ N_1,
„ „ OM_1 „ „ M,
„ „ ON_1 „ „ N.

Die drei Geraden BM_1, CM und N_1O müssen nun die Curve nochmals in drei Punkten schneiden, welche in einer Geraden liegen, und desshalb wird der Schnittpunkt P_1 der Geraden AN und CM auf der Curve liegen. Der dritte Schnittpunkt der Curve mit OP_1 repräsentirt aber zugleich die linke und die rechte Seite der obigen Gleichung.

Es folgt hieraus schon, dass die beiden Gesetze auch für beliebig viele Addenden gültig sind.

Es mögen nun zwei beliebige Geraden die Curve in ABC und in $A_1B_1C_1$ schneiden. Zieht man AC, welche noch in B_2 schneiden möge, so hat man

$$A + (B + C) = A + (B_2 + C_1) = (A + B_2) + C_1 = A_1 + B_1 + C_1.$$

Hier sieht man, dass es bequem sein wird, O in einem Inflexionspunkte zu wählen. Man hat dann

$$O + O + O = 3O = O$$

und kann

$$A + B + C = O$$

setzen, wenn A, B und C in einer Geraden liegen.

Es schneide ferner eine Curve zweiter Ordnung die C^3 in

$$A_1 A_2 \dots A_6.$$

Wie bekannt schneiden dann die Geraden A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6 die C^3 nochmals in Punkten M, N, P, welche in einer Geraden liegen. Man hat also

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots + A_6 &= (A_1 + A_2) + (A_3 + A_4) + (A_5 + A_6) \\ &= (N + P) + (P + M) + (M + N) \\ &= 2(M + N + P) = 2O = O. \end{aligned}$$

Nehmen wir noch eine Curve dritter Ordnung C_1^3, welche die gegebene C^3 in $A_1A_2A_3 \dots A_9$ schneiden möge. Durch $A_1A_2A_3A_4$ lege man Curven zweiter Ordnung, welche C^3 und C_1^3 nochmals in

Punktpaaren schneiden, deren Verbindungsgeraden zwei projective Büschel bilden und demnach eine Curve zweiter Ordnung erzeugen; dieselbe schneidet C^3 ausser in dem Basispunkte C eines erzeugenden Büschels, noch in den Punkten $A_5 A_6 \ldots A_9$.

Das obige giebt dann

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 - C = O$$

und

$$C + A_5 + A_6 + \cdots + A_9 = O$$

also

$$A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_9 = O.$$

Wir wollen hier nicht weiter gehen, sondern nur bemerken, dass durch diese Sätze der gewöhnliche Ansatz für die Anwendung der elliptischen Functionen auf die Geometrie innerhalb einer Curve dritter Ordnung vollständig gegeben ist, insofern die Division ausgeschlossen wird.

Man hat nun zu zeigen, dass eine Parameterbestimmung, welche den drei oben genannten Forderungen genügt, nicht nur hypothetisch denkbar ist, sondern wirklich existirt, und dieser Existenzbeweis ist es, womit wir uns im Folgenden zu beschäftigen haben.

§ 5.

Parameterbestimmung der reellen Punkte einer Curve dritter Ordnung.

Eine Curve dritter Ordnung mit reeller Invariante kann immer in eine reelle Curve transformirt werden und hat dann einen unpaaren Zweig $\varkappa$*). Der Zweig ist im projectiven Sinne geschlossen, und enthält jedenfalls einen Inflexionspunkt O; diesen Punkt — oder, wenn mehrere vorhanden sind, einen beliebig gewählten — charakterisiren wir durch die Zahl 0. Durchläuft ein Punkt den Zweig von 0 bis 0 zurück, so wird der entsprechende Parameter den Forderungen I und II (in § 4) gemäss, entweder immer zunehmen oder immer abnehmen. Eine mit unseren Forderungen übereinstimmende Parameterbelegung muss also eine reelle Periode enthalten, und es sei diese 2ω.

Legt man nun die in § 4 dargestellte geometrische Addition zu Grunde, so wird man dem Berührungspunkte der von O ausgehenden (eindeutig bestimmten) Tangente von $\varkappa$ die Zahl ω beilegen. Der Zweig $\varkappa$ wird durch O und R in zwei Bögen getheilt, und wir wollen erstens den einen σ_1 — den wir uns endlich denken können — in Betracht ziehen. Um hier das Resultat in § 2 direct anwenden zu können, kommt es auf die Richtigkeit der dort aufgestellten Bedingungen an.

*) Es ist dies im Allgemeinen durch drei verschiedene Transformationen zu erreichen, insofern S und TST^{-1} als identisch betrachtet werden, wenn T mit reellen Coefficienten geschrieben wird; siehe des Verf.'s Dissertation. S. 92.

Man sieht aber leicht, dass nach den Entwickelungen in § 4, nur die Bedingung 4 (von welcher dann 5 eine Folge sein wird) zu prüfen übrig bleibt. Ist aber S ein fester, M ein beweglicher Punkt des Zweiges, und durchläuft M continuirlich den ganzen Zweig $\varkappa$, so wird auch der dritte Schnittpunkt der Curve mit PM den ganzen Zweig continuirlich durchlaufen müssen, und zwar in entgegengesetztem Sinne.

Um nun, wenn A und M gegeben sind, die Summe $A + M = N$ zu bilden, hat man den dritten Schnittpunkt P mit AM und ferner den dritten Schnittpunkt N mit OP zu construiren. Bewegt sich also M in σ_1 im Sinne MO, so wird sich auch N in demselben Sinne bewegen, indem beide sich im entgegengesetzten Sinne von P bewegen. Weil hieraus nun die genannte Bedingung 4 folgt, so können wir gleich davon ausgehen, dass alle Punkte des Bogens σ_1 mit ihren Parametern μ, wo $0 \leqq \mu \leqq \omega$, versehen sind.

Es ist jetzt leicht, auch die Punkte des noch unbelegten Theiles σ_2 des Zweiges $\varkappa$ mit Parametern zu versehen. Wenn nämlich M_2 ein beliebiger Punkt von σ_2 ist, wird die Gerade OM_2 einen Punkt M_1 von σ_1 enthalten, und ist μ_1 der zu M_1 gehörige Parameter, so können wir M_2 den Parameter $2\omega - \mu_1$ beilegen. Die neue Zahlenreihe geht sowohl durch R wie durch O in die frühere continuirlich über, *indem man nunmehr daran festhält, dass μ und $2\omega + \mu$ als identische Zahlen betrachtet werden.* Um die Uebereinstimmung der geometrischen mit der arithmetischen Addition über den ganzen Zweig $\varkappa$ hin einzusehen, bemerke man, dass diese Forderung auch so formulirt werden kann, dass die Summe der Parameter der Schnittpunkte der Curve mit einer beliebigen in drei reellen Punkten schneidenden Geraden congruent Null sein soll. Dies bleibt aber auch richtig, wenn z. B. alle Schnittpunkte M_2' M_2'' M_2''' in σ_2 liegen, denn OM_2', OM_2'', OM_2''' schneiden, weil O ein Inflexionspunkt ist, nochmals in drei in einer Geraden liegenden Punkten, und man hat

$$(2\omega - \mu_1') + (2\omega - \mu_1'') + (2\omega - \mu_1''') \equiv 0,$$

wenn

$$\mu_1' + \mu_1'' + \mu_1''' \equiv 0.$$

In ganz ähnlicher Weise verfährt man, wenn eine Gerade den Zweig σ_1 (oder σ_2) in zwei Punkten, und σ_2 (oder σ_1) in einem Punkte schneidet.

Wir haben uns bis jetzt ausschliesslich mit dem unpaaren Zweige der Curve beschäftigt. Was die reellen Punkte anbelangt, ist man also fertig, wenn die Curve eintheilig ist. Wenn die Curve aber zweitheilig ist, dann gilt zwar auch alles gesagte; man muss nur ausserdem noch die Punkte des Ovales in Betracht ziehen.

Es seien R_1 und R_2 die Berührungspunkte des Ovales mit den zwei an dasselbe von O gezogenen Tangenten; einem dieser Punkte

z. B. R_1 gebe man den Parameter ω', *der als nicht reell zu wählen ist*. Man kann dann (indem, was offenbar erlaubt ist, *ein specieller Fall* der geometrischen Addition als zusammenfallend mit der arithmetischen angenommen wird) den Parameter μ eines Punktes M des Ovales bestimmen, indem man die Gerade $R_1 M$ zieht, welche den obigen Zweig $(\sigma_1 + \sigma_2)$ in einem Punkte M' schneidet, und

$$\mu = 2\omega - \omega' - \mu'$$

setzt, wenn μ' der Parameter von M' ist.

Diese Zahlen bilden eine continuirliche Reihe von immer wachsenden (oder immer abnehmenden) Zahlen, wenn M von R_1 aus längs dem Ovale wieder zu R_1 zurückkehrt; 2ω ist dabei wie früher eine Periode.

Man hat nun, um die vollständige Uebereinstimmung der ganzen Parameterbelegung mit den Bedingungen in § 4 einzusehen, nur nöthig zu zeigen, dass die Summe der Parameter der Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden auch dann congruent Null ist, wenn die Gerade das Oval in zwei Punkten A und B, und den unpaaren Zweig in einem Punkte C schneidet. Man beweist aber, dass

$$\alpha + \beta + \gamma \equiv 0,$$

wenn noch $2\omega'$ *als Periode aufgefasst wird*, in folgender Weise:

Man ziehe die Geraden OA und OB, welche nochmals in A_1 und B_1, sowie $R_1 A_1$ und $R_1 B_1$, welche nochmals in A_2 und B_2 schneiden mögen. Es ist dann

$$\alpha = 2\omega - \omega' - \alpha_2, \quad \beta = 2\omega - \omega' - \beta_2,$$

und man hat unter der obigen Annahme nur nöthig zu beweisen, dass $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma \equiv 0$. Man hat also zu zeigen, dass A_2, B_2 und C, welche alle dem unpaaren Zweige angehören, in einer Geraden liegen. Die Geraden AB, $R_1 A_1$, $R_1 B_1$ haben aber ausser A_2, B_2 und C sechs Punkte A, A_1, B, B_1, R_1, R_1 (den letzten zweimal) mit der Curve gemein, und diese Punkte müssen, weil die Curve für O als Centrum und $R_1 R_2$ als Axe mit sich selbst harmonisch symmetrisch ist, auf einem Kegelschnitte liegen; die drei übrigen Schnittpunkte liegen mithin in einer Geraden.

§ 6.

Parameterbestimmung sämmtlicher Punkte einer reellen Curve dritter Ordnung.

Um alle Punkte einer Curve dritter Ordnung durch Parameter zu charakterisiren, ist es in unserer Darstellung nothwendig, eine von der Gesammtheit der reellen Punkte verschiedene neue einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Punkten herzustellen, welche mit Zugrundelegung der geometrischen Addition eine Gruppe bilden. Man erhält eine solche

Gruppe in folgender Weise, wobei wir zuerst nur die eintheilige Curve berücksichtigen.

Alle reellen durch den hervorgehobenen Inflexionspunkt O gehenden Geraden werden durch die Inflexionstangente in O und die durch O gehende Curventangente CR in zwei getrennte Systeme von Geraden getheilt. Die Geraden des einen Systems schneiden die Curve ausser in O noch in reellen Punkten, die der anderen noch in paarweise conjugirten. Die letztgenannten Punkte sind es, welche die gesuchte neue Gruppe II bilden.

Um nachzuweisen, dass die Punkte eine Gruppe bilden, nehme man zwei Punkte M und M_1 des Systems; die geometrische Summe der zwei Punkte wird dann bestimmt, indem man C^3 nochmals mit MM_1 in N', und danach die Curve nochmals mit ON' in N schneidet. Wenn nun MM_1 durch R geht, werden N und N' beide mit R zusammenfallen — man wird aber R als einen Punkt des neuen wie des alten Systems auffassen. Wenn aber MM' nicht durch R geht, zeigt man wie folgt, dass N imaginär, während die Gerade ON reell ist. Die Curve ist nämlich mit sich selbst harmonisch symmetrisch, indem O das Centrum und die harmonische Polare X zu O die Axe ist. Ferner sind die neuen Schnittpunkte M' und M_1' von C^3 und OM und OM_1 die zu M mit M_1 conjugirt imaginären Punkte, so dass der reelle Punkt von MM_1, nämlich der Schnittpunkt mit $M'M_1'$ in X liegt und also nicht in C^3 ausserhalb R liegen kann. Die zwei neuen Schnittpunkte N und N' der Curve mit MM_1 und $M'M_1'$ sind also zugleich conjugirt imaginär und in der harmonischen Symmetrie einander entsprechend, so dass der reelle Träger von N durch O gehen muss.

Für die neue Gruppe wäre es wohl möglich die Parameterbestimmung direct durchzuführen; es ist indes viel einfacher, dieselbe auf die vorige zurückzuführen. Man braucht zu diesem Zwecke nur eine Centralcollineation zu benutzen, in der O das Centrum und X die Axe ist, während einem Punkte M der neuen Gruppe ein beliebig gewählter reeller Punkt M_1 der Geraden OM zugeordnet wird. Die Curve C^3 wird hierdurch in eine neue Curve C_1^3 transformirt, deren reelle Punkte offenbar den Punkten der Gruppe II entsprechen, und es ist diese Curve wieder eintheilig. Man kann nun mit der reellen Curve C_1^3 ganz so verfahren, wie im vorigen Paragraphen angegeben wurde, indem nur *dem Punkte R, wenn dieser als ein Punkt der C_1^3 aufgefasst wird, ein anderer Parameter $\omega + 2\omega'$ beigelegt wird,* wo $2\omega'$ eine beliebig gewählte *nicht reelle* Constante ist. Endlich gebe man jedem Punkte der Gruppe II denjenigen Parameter, der dem entsprechenden Punkte in C_1^3 zukommt. Mittels einer Centralcollineation mit O als Centrum, X als Axe, sieht man, dass diese Bestimmung nur von ω' abhängig ist,

während dagegen eine andere Wahl des Punktes M_1 nichts in der Zahlenbelegung ändert.

Wenn die Curve zweitheilig ist, kann man ganz analog verfahren, nur gehen in diesem Falle drei reelle Tangenten $OR_1 = r_1$, $OR_2 = r_2$, $OR_3 = r_3$ von O aus an die Curve, so dass das System aller reellen durch O gehenden Geraden mittels $r_1 r_2 r_3$ und die Wendetangente o in vier getrennte Systeme getheilt wird. Sind die Bezeichnungen so gewählt, dass die Geraden o, r_1, r_2, r_3 in dieser Ordnung auf einander folgen, und so, dass die Geraden, welche von r_2 durch o und r_1 (und zugleich diejenigen, welche von r_1 durch r_2 und r_3) getrennt sind, die Curve in reellen Punkten schneiden, dann werden die übrigen durch O gehenden Geraden die Curve in conjugirt imaginären Punkten schneiden, welche mit Zugrundelegung der geometrischen Addition eine Gruppe bilden. Man beweist dies ganz ebenso wie oben, wobei nur zu bemerken ist, dass die Punkte $R_1 R_2 R_3$ sowohl der ursprünglichen (reellen) Gruppe I wie der neuen Gruppe II zuzurechnen sind. Um die Zahlenbelegung innerhalb der Gruppe II durchzuführen, wende man wieder die obige Transformation an, wodurch die Punkte der Gruppe II in die reellen Punkte einer neuen zweitheiligen Curve C_2^3 übergehen. Es wurden in § 5 den Punkten R_1, R_2, R_3 bezw. die Parameter ω, $\omega - \omega'$, ω' beigelegt und daran werden wir auch hier festhalten.

Diejenigen Punkte der neuen Curve C_2^3, welche von R_1 durch o und r_3 getrennt sind, bilden den unpaaren Zweig, und die Zahlenbelegung auf diesem ist nach § 5 durch den Parameter ω' von R_3 unzweideutig bestimmt. Ferner lasse man den Parameter ω von R_1 ungeändert, auch wenn dieser Punkt als ein Punkt des Ovales der Curve C_2^3 aufgefasst wird. Hierdurch ist wieder die Zahlenreihe auf dem Ovale von C_2^3 dem vorigen Paragraphen zufolge eindeutig bestimmt. Der Punkt R_2, als ein Punkt der Curve C_2^3, bekommt zwar jetzt den Parameter $\omega' - \omega$, aber dieser ist, von Perioden abgesehen, von dem früheren $\omega - \omega'$ nicht verschieden.

Um nun die Parameterbestimmung vollständig zu erledigen, hat man wesentlich zu zeigen, dass sich jeder Punkt M der Curve als geometrische Summe eines Punktes M^I der ursprünglichen Gruppe I und eines Punktes M^{II} der neuen Gruppe II darstellen lässt. Sehen wir erst, ob dieses (die Möglichkeit vorausgesetzt) nur in einer Weise thunlich ist. Man setze also:

$$M = M^I + M^{II} = N^I + N^{II}.$$

Nach den associativen und commutativen Gesetzen, die ja über die ganze Curve hin giltig sind, folgt hieraus

$$\begin{aligned} O = M^I + M^{II} - (N^I + N^{II}) &= (M^I - N^I) + (M^{II} - N^{II}) \\ &= P^I - P^{II}. \end{aligned}$$

Die Punkte P^I und P^{II} müssen desshalb zusammenfallen, was aber nur möglich ist, wenn sie in den Punkt O oder in einen der Punkte R fallen. Man muss also haben

$$M^I = N^I, \quad M^{II} = N^{II}$$

oder

$$M^I = N^I + R_i, \quad M^{II} = N^{II} + R_i \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Die Bestimmung ist insofern mehrdeutig. Geht man aber zur Parameterbestimmung über, so wird diese jedenfalls, von Perioden abgesehen, eindeutig, denn $2R_i$ ist nach dem obigen immer durch eine ganze Periode charakterisirt.

Um nun, wenn M (ausserhalb den Gruppen I und II) gegeben ist, die Componenten M^I und M^{II} wirklich zu construiren, so betrachte man neben M den conjugirt imaginären Punkt $\overline{M}$; die Gerade $M\overline{M}$ schneidet dann die Curve nochmals in einem reellen Punkte Q, und OQ nochmals in einem reellen Punkte P^I.

Um ferner $M - \overline{M}$ zu bilden, ziehe man OM und $O\overline{M}$, welche die Curve nochmals in zwei conjugirt imaginären Punkten M' und $\overline{M}'$ schneiden. Die neuen Schnittpunkte N und $\overline{N}$ der Curve mit den Geraden $M'\overline{M}$ und $\overline{M}'M$ werden dann erstens conjugirt imaginär, und ferner werden sie nach einem wiederholt benutzten Hilfssatze eine durch O gehende Verbindungsgerade haben. Mithin gehört N der Gruppe II an, wobei zu bemerken ist, dass $N = N^{II}$ auch in einen der Punkte R fallen kann.

Indem also

$$P^I = M + \overline{M} \quad \text{und} \quad N^{II} = M - \overline{M},$$

hat man nach den gewöhnlichen Gesetzen:

$$P^I + N^{II} = M + M = 2M.$$

Weil die Gerade $M\overline{M}$, indem M imaginär ist, niemals das Oval treffen kann, wird P^I dem unpaaren Zweig angehören. Wenn nun OP^I die Curve nochmals in Q schneidet, gehen von Q zwei reelle Tangenten aus, welche den unpaaren Zweig berühren. Ein *beliebiger* der Berührungspunkte sei M^I — der andere wird $M^I + R$ sein.

Man hat dann

$$M + \overline{M} = 2M^I,$$

woraus folgt

$$(M - M^I) + (\overline{M} - M^I) = O.$$

Die conjugirt imaginären Punkte $M - M^I$ und $\overline{M} - M^I$ liegen laut dieser geometrischen Gleichung in einer durch O gehenden Geraden, d. h. der Punkt $M - M^I = M^{II}$ gehört der Gruppe II an, und man hat:

$$M = M^I + M^{II}.$$

Unseren Constructionen zufolge variirt M continuirlich, wenn die Componenten in I und II continuirlich variiren, und umgekehrt.

Man hat zum Schluss nur noch nöthig zu zeigen, dass über die ganze Curve hin die arithmetische Addition mit der geometrischen zusammenfällt, d. h. dass

$$\mu + \nu + \pi \equiv 0 \pmod{2\omega, 2\omega'},$$

wenn M, N, P in einer beliebigen reellen oder imaginären Geraden liegen.

Man kann aber nach dem obigen immer

$$M = M^I + M^{II}, \quad N = N^I + N^{II}, \quad P = P^I + P^{II}$$

setzen, so dass man nur zu zeigen hat, dass M^I, N^I, P^I, sowie M^{II}, N^{II}, P^{II} so gewählt werden können, dass die erstgenannten wie die letztgenannten drei Punkte in einer Geraden liegen. Weil nun, wenn MNP in einer Geraden liegen, auch die conjugirt imaginären Punkte $\overline{M}\,\overline{N}\,\overline{P}$ dies thun (wobei z. B. M und $\overline{M}$ in einen reellen Punkt zusammenfallen können), so folgt aus den obigen Constructionen, dass $2M^I$, $2N^I$ und $2P^I$ sowie $2M^{II}$, $2N^{II}$ und $2P^{II}$ in einer Geraden liegen. Die drei erstgenannten Punkte liegen auf dem unpaaren Zweig. Zieht man von $2M^I$, sowie von $2N^I$ aus eine Tangente, welche diesen Zweig berührt — in $M_1{}^I$ und $N_1{}^I$ — so wird die Tangente in dem dritten Schnittpunkte $P_1{}^I$ der Curve mit der Geraden $M_1{}^I N_1{}^I$ durch $2P^I$, gehen, und man kann einfach $M_1{}^I N_1{}^I P_1{}^I$ als die oben genannten Punkte $M^I N^I P^I$ wählen. Man hat also

$$M^I + N^I + P^I = O.$$

Aus dieser Gleichung und aus

$$M + N + P = O$$

folgt aber

$$O = (M+N+P) - (M^I+N^I+P^I) = (M-M^I) + (N-N^I) \\ + (P-P^I) = M^{II} + N^{II} + P^{II},$$

so dass auch $M^{II} N^{II} P^{II}$ in einer Geraden liegen.

Es ist schliesslich noch eine besondere Forderung einzuführen, die sich auf die unendlich kleinen Parameter bezieht; die zugehörigen Punkte liegen dann unendlich nahe am Wendepunkte O. In diesem Falle kann man nämlich den Parameter der Abscisse des Punktes proportional setzen, wenn die Wendetangente in O als Abscissenaxe und O als Origo angenommen wird — wobei die Abweichung im Vergleich mit dem Parameter selbst unendlich klein sein wird.

Es ist dies eine nothwendige Folge der übrigen Bedingungen, wenn man sich auf Punkte innerhalb einer der obigen Gruppen I und II beschränkt; über die ganze Curve hin ist sie aber als eine neue Forderung zu betrachten, die indessen mit den früheren verträglich ist.

Der Beweis dieser Behauptungen mag unterbleiben, indem er in allem wesentlichen derselbe, wie der frühere Schluss des § 3 sein würde. Die nöthigen Hülfssätze, nämlich der Satz von Carnot und die Theorie der letzten Polaren in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung, lassen sich ja leicht synthetisch darthun.

Wenn also u der Parameter und ξ die oben definirte Abscisse desselben unendlich nahe an O liegenden Punktes ist, so hat man

$$u = k\xi, \quad k \text{ constant.}$$

Bis zur Schlussannahme waren die zwei Perioden der Parameterbestimmung von einander ganz unabhängig. Jetzt ist dies nicht mehr der Fall; die eine Periode kann man beliebig wählen, weil sämmtliche Parameter mit einer beliebigen Constanten multiplicirt werden können; das Periodenverhältniss ist aber für jede Curve bestimmt, und wird nur vom constanten Doppelverhältniss der Curve abhängig sein.

Die oben gegebene Parameterbestimmung lässt sich auch gebrauchen, wenn die Curve C_0^3 unicursal und also mit einem Doppelpunkte versehen ist. Ist nämlich D ein isolirter Punkt der Curve, so verhält sich diese in Betreff der reellen Punkte, ganz wie die allgemeine eintheilige Curve. Wendet man auf die Curve die oben S. 92 genannte imaginäre Collineation an, so erhält man eine neue unicursale Curve, welche aber mit einem gewöhnlichen Doppelpunkte D versehen ist. Diese neue Curve verhält sich, in Betreff ihrer reellen Punkte, im wesentlichen wie die allgemeine zweitheilige Curve, indem die Parameterreihen, welche den Punkten des unendlichen Zweiges und des Ovales entsprechen, nicht durch D continuirlich in einander übergehen; D selbst wird durch einen unendlichen Parameter charakterisirt. Die Parameterbestimmung enthält deshalb nur eine (endliche) Periode.

Wenn die Curve mit einer Spitze versehen ist, so werden, wie leicht zu sehen, beide Perioden unendlich und verschwinden darnach als solche.

Noch sei bemerkt, dass mit der Parameterbestimmung der Punkte der ebenen Curven zweiter und dritter Ordnung zugleich die Parameterbelegung der unebenen Curven dritter und vierter Ordnung *vollständig* geleistet ist. Es wird auch diese Bestimmung — abgesehen von einer multiplicativen Constanten — *unbedingt eindeutig*, wenn man daran festhält, dass die Summe derjenigen Parameterwerthe, welche den Schnittpunkten der Curve mit einer beliebigen Ebene entsprechen, congruent Null sein soll (für die Perioden als Moduln).

Projicirt man nämlich eine unebene Curve vierter Ordnung vom Geschlechte 1 — um nur diesen Fall zu betrachten — aus einem beliebigen Punkte der Curve auf eine feste Ebene, so erhält man eine Curve R_1 dritter Ordnung; vier Curvenpunkte, welche in einer Ebene liegen, werden in vier Punkte der R_1 projicirt, die mit zwei *festen*

zusammenfallenden Punkten von R_1 mittels einer Curve zweiter Ordnung verbunden werden können. Die Bedingung, dass die Summe der Parameter von vier solchen Punkten congruent Null sein soll, ist aber, wie leicht zu sehen, der obigen Bedingung — nämlich der Uebereinstimmung der arithmetischen mit der geometrischen Addition — wesentlich äquivalent. Wählt man noch den Berührungspunkt O einer stationären Ebene der unebenen Curve als Nullpunkt, so wird der Parameter eines unendlich nahe an O liegenden Punktes der Abscisse desselben proportional, insofern O als Anfangspunkt und die stationäre Ebene als XY-Ebene des Coordinatensystems gewählt wird.

Von den Untersuchungen, zu welchen die hier gegebene Darstellung Anlass giebt, sei hervorgehoben die Bestimmung derjenigen Punktgruppen auf der zur Curve gehörigen Riemann'schen Fläche, deren entsprechende Curvenpunkte durch die Parameter $u + iv$, mit constanten u oder v charakterisirt sind. Ich werde hier diese Frage nur anhangsweise mit einigen Worten berühren.

Wenn die Curve dritter Ordnung reell ist, so werden dem obigen zufolge die durch $\mu = u + iv$ und $\bar{\mu} = u - iv$ charakterisirten Punkte M und $\bar{M}$ conjugirt imaginär sein. Hält man nun v constant, so wird auch $\mu - \bar{\mu} = 2iv$ constant sein. Einer Geraden PM — wo P das zur Bildung der Riemann'schen Fläche benutzte Projectionscentrum ist — entsprechen dann drei Gerade $\bar{P}\bar{M}$, und umgekehrt, so dass die gesuchte Gruppe eine Curve sechster Ordnung mit den dreifachen Punkten P und $\bar{P}$ sein wird. Hierbei ist freilich vorausgesetzt, dass die Abhängigkeit der Geraden PM und $\bar{P}\bar{M}$ von einander sich algebraisch ausdrücken lässt, was selbstverständlich nicht der Fall ist, wenn M und $\bar{M}$ nur als conjugirt imaginäre Punkte der Curve definirt sind. In diesem Falle ist es aber richtig, denn M und $\bar{M}$ sind einander entsprechende Punkte in einer gewissen eindeutigen quadratischen Transformation der Ebene*). Es ist jedoch hinzuzufügen, dass man, wenn man die Punktgruppe eine „Curve“ nennt, dies nicht im gewöhnlichen Sinne der analytischen Geometrie zu nehmen hat, denn es haben in dieser Verbindung *nur die reellen Punkte der Curve eine Bedeutung.*

Wird P in einem der Kreispunkte angenommen, so schneiden die Curven $u = const.$ und $v = const.$ einander orthogonal im gewöhnlichen Euklidischen Sinne.

Geht speciell die gegebene Curve dritter Ordnung durch die Kreispunkte, so bilden die u-Curven und v-Curven ein System von confocalen Curven vierter Ordnung. Ist noch der reelle unendlich ferne Curvenpunkt ein Inflexionspunkt, so liegen die Brennpunkte entweder in einer Geraden oder paarweise in zwei zu einander senkrechten Geraden.

*) S. des Verfassers obengenannte Dissertation S. 93 u. f.

Die u- und v-Curven haben für die hier betrachtete Fläche selbstverständlich dieselbe Bedeutung wie die Breiten- und Meridiancurven in der bekannten Harnack'schen Abhandlung*) für die neue Riemann'sche Fläche.

§ 7.

Analytisches Resumé.

Der Inhalt der gegebenen geometrischen Theorie lässt sich für die Curven dritter Ordnung so ausdrücken, dass die ganze Curve sich eindeutig und continuirlich auf ein Parallelogramm abbilden lässt, oder in analytischer Form so, dass die Coordinaten eines beliebigen Curvenpunktes sich durch continuirliche und doppeltperiodische Functionen eines Parameters u darstellen lassen. Besonders hervorzuheben ist, dass die Darstellung (von einer multiplicativen Constanten abgesehen) *durchaus eindeutig* ist, insofern die Summe derjenigen Parameter, welche drei in einer Geraden liegenden Punkten entsprechen, congruent Null ist (für die Perioden als Moduln), und ferner nur überall differentiirbare Functionen als zulässig betrachtet werden.

Die letztgenannte *jedoch nicht nothwendige* Bedingung hängt mit der in § 3 und § 6 gemachten Schlussannahme zusammen. Ist diese nämlich erfüllt, und ist ein Wendepunkt O als Nullpunkt und eine durch O gehende Gerade als X-Axe — und die Wendetangente nicht als Y-Axe — gewählt, so wird $\frac{du}{dx} = \lim \frac{\Delta u}{\Delta x}$ nur von dem Werthe von u abhängen, nicht aber von den reellen oder imaginären Werthen, welche Δu durchläuft, indem dasselbe sich der Null nähert.

Man erhält hierdurch zugleich die explicite Bestimmung von u als Function der Coordinaten, wenn die Gleichung der Curve gegeben ist. Um einen allgemeinen Ausdruck für du zu finden, wollen wir den Wendepunkt O als Anfangspunkt des Coordinatensystems wählen, weil der allgemeine Ausdruck nicht durch eine Parallelverschiebung des Systems beeinflusst werden kann.

Die Gleichung der Curve sei

$$f = u_3 + u_1 v_1 + u_1 = 0, \tag{1}$$

wo die Indices den Grad des Gliedes in x und y angeben. Um nun den Werth von du zu finden, welcher einem Curvenpunkte $M(x, y)$ entspricht, hat man der geometrischen Theorie zufolge erstens O mit M zu verbinden, und den dritten Schnittpunkt $M'(x', y')$ dieser Geraden mit der Curve zu finden. Die Gleichung von OM ist:

$$Y : y = X : x, \tag{2}$$

*) Mathem. Annalen Bd. 9.

und diese mit (1) verbunden ergiebt zur Bestimmung der von O verschiedenen Schnittpunkte:

$$u_3 X^2 + u_1 v_1 x X + u_1 x^2 = 0,$$

also

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = -\frac{u_1 v_1 x}{u_1 x^2} = -\frac{v_1}{x} \quad (u_1 \gtrless 0,\ x \gtrless 0),$$

$$x' = -\frac{x}{v_1 + 1}, \quad y' = -\frac{y}{v_1 + 1}.$$

Nun hat man (x', y') mit dem Nachbarpunkte $(x + dx, y + dy)$ zu M zu verbinden und diese Gerade mit der Wendetangente

(3) $$\frac{du_1}{dx} X + \frac{du_1}{dy} Y = 0$$

zu schneiden.

Die Gleichung dieser Verbindungsgeraden ist aber, wenn hier gleichgültige Grössen weggeworfen werden

$$(v_1 + 2)(Yx - Xy) + y\,dx - x\,dy = 0$$

oder, indem

$$\begin{aligned} y\,dx - x\,dy &= dx(xf'_x + yf'_y) : f'_y = dx(3u_3 + 2u_1 v_1 + v_1) : f'_y \\ &= -\,dx(v_1 + 2)u_1 : f'_y, \end{aligned}$$

gesetzt wird:

$$Yx - Xy - u_1\,dx : f'_y = 0.$$

Diese schneidet (3) in einem Punkt mit der Abscisse

$$X = -\frac{du_1}{dx}\,dx : f'_y.$$

Man hat also zu setzen

(4) $$du = k\frac{dx}{f'_y}.$$

Der Werth dieses Differentiales $\left(\text{in projectiver Form: } \frac{x\,dz - z\,dx}{f'_y}\right)$ *wird (von k abgesehen) identisch in sich transformirt durch jede lineare oder quadratische Transformation, welche die Curve in sich transformirt* — denn die Bestimmung von u war von einer additiven (und multiplicativen) Constanten abgesehen, eindeutig.

Das allgemeine Integral von

$$\frac{dx_1}{f'_{y_1}} + \frac{dx_2}{f'_{y_2}} = 0,$$

wo die x und y durch $f_3 = 0$ verbunden sind, wird:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

wo x_3 die Rolle der Integrationsconstanten spielt — selbstverständlich in Uebereinstimmung mit der Theorie der Integrale erster Art.

Der allgemeine Ausdruck für du bei der Parameterbestimmung auf einem Kegelschnitte lässt sich in derselben Weise ableiten. Man wähle wieder $(0, 0)$ in dem Nullpunkte E der Parameterbestimmung. Weiter sei

(5) $$ax + by + c = 0$$

die Gerade, welche den Kegelschnitt

(6) $$f = u_2 + u_1$$

in den in § 3 genannten zwei singulären Punkten O und U schneidet. Die Verbindungsgerade zwischen E und $M(x, y)$ schneidet (5) in einem Punkte (x', y'), wo

$$x' = -\frac{cx}{ax + by}, \quad y' = -\frac{cy}{ax + by}.$$

Ferner hat die Gerade, welche (x', y') mit $(x + dx, y + dy)$ verbindet, wenn hier gleichgültige Grössen weggeworfen werden, die Gleichung:

$$(Yx - Xy)(ax + by + c) + c(ydx - xdy) = 0,$$

und diese reducirt sich wie oben auf:

$$(Yx - Xy)(ax + by + c) - u_1 dx : f_y' = 0.$$

Die Abscisse des Schnittpunktes dieser Geraden mit der Tangente in $(0, 0)$:

$$\frac{du_1}{dx} X + \frac{du_1}{dy} Y = 0$$

ist mit du proportional; man erhält so

$$du = k \frac{dx}{(ax + by + c) f_y'},$$

welcher Ausdruck offenbar im Allgemeinen richtig ist, auch wenn E nicht in $(0, 0)$ liegt.

Ist

$$f = x^2 + y^2 - 1, \quad a = b = 0,$$

und wird E in $(1, 0)$ gewählt, so erhält man

$$du = -\frac{dx}{y},$$

also wenn

$$x = \cos u, \quad y = \sin u$$

gesetzt wird,

$$\cos 0 = 1, \quad \sin 0 = 0$$

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1, \quad \frac{d \cos u}{du} = -\sin u,$$

$$\frac{1 - \cos(u_1 + u_2)}{\sin(u_1 + u_2)} = -\frac{\cos u_1 - \cos u_2}{\sin u_1 - \sin u_2}.$$

Die Functionen sind eindeutig bestimmt für alle *endlichen* reellen und imaginären Werthe von u.

Für die Curve $xy = 1$, erhält man

$$du = \frac{dx}{x},$$

so dass man

$$x = e^u, \quad y = e^{-u}$$

mit dem gewöhnlichen Additionstheorem setzen kann*).

Bei der allgemeinen Abbildung eines Kegelschnittes auf die zugehörige nicht projective Fläche, werden die oben S. 97 genannten u- und v-Curven unicursale Curven vierter Ordnung sein. Man erhält jedoch, wie leicht zu erkennen, Kegelschnitte, wenn O und U in die unendlich fernen Punkte der Curve verlegt werden. Betrachtet man z. B. eine Ellipse, so wird man dieser Bedingung zufolge die excentrische Anomalie als Parameter nehmen, und erhält, weil (x, y) aus dem Kreispunkte $(y : x = i)$ in

$$\left(\frac{y-\bar{y}}{2i} + \frac{x+\bar{x}}{2}, \quad \frac{y+\bar{y}}{2} - \frac{x-\bar{x}}{2i}\right)$$

projicirt wird, die Curven:

$$\frac{x^2}{\cos^2 u} - \frac{y^2}{\sin^2 u} = a^2 - b^2, \quad \text{für } u = \text{const.},$$

und

$$\frac{4x^2}{\left((a+b)e^v + (a-b)e^{-v}\right)^2} + \frac{4y^2}{\left((a+b)e^v - (a-b)e^{-v}\right)^2} = 1, \quad \text{für } v = \text{const.}$$

Wir kehren nun zu den Curven dritter Ordnung zurück, und bemerken, dass jedem elementaren elliptischen Integrale erster Art in der hier besprochenen Weise eine Curve dritter Ordnung entspricht. Sucht man z. B. die Curve, deren Punkte durch $x = snu$ charakterisirt werden, so erhält man, wenn noch die Bedingung, dass sie circular sei, hinzugefügt wird, wie eine leichte Rechnung lehrt, als *einzige* Lösung die Curve:

$$y^2(1 - kx) - (1 + kx)(1 - x^2) = 0.$$

---

*) Für die Kreisfunctionen kann man auf einem Kreise das Additionstheorem in folgender geometrischer Form aufstellen: es habe A den Parameter O, B und C die Parameter β und γ; man erhält den Punkt mit dem Parameter $\beta + \gamma$ als den neuen Schnittpunkt der Curve mit einer durch A gehenden mit BC parallelen Geraden. Aus dem Obigen folgt, dass man *Wort für Wort* dieselbe additive Construction für die Hyperbelfunction aufstellen kann, indem man nur unter Curve eine gleichseitige Hyperbel versteht, und den Nullpunkt in einem Scheitel annimmt. Es lässt sich dieser Satz selbstverständlich auch leicht ganz elementar beweisen.

Man wird dann

$$x = su(u + k + ik'), \quad y = \frac{x'_u}{1 - kx}$$

setzen, wo die Constante $k + ik'$ hinzugefügt ist, um den Nullpunkt der Parameterbestimmung in den unendlich fernen Wendepunkt zu verlegen. Die u- und v-Curven werden hier im wesentlichen mit den bekannten Siebeck'schen Curven zusammenfallen *).

Für die weitere Theorie wird es jedoch einfacher sein, nicht nur den Wendepunkt O, sondern auch die Wendetangente o unendlich fern zu wählen. Man erhält dann die Gleichung der Curve in der bekannten Weierstrass'schen Form

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3,$$

wo g_2 und g_3 reell sind; und man hat

$$du = k \frac{dx}{\sqrt{4x^3 - g_2 x - g_3}};$$

Für $x = \infty$ wird $u = 0$ angenommen. Setzt man also

$$x = \wp(u),$$

so wird

$$y = \wp'(u)$$

mit der Relation

$$(\wp' u)^2 = 4\wp u^3 - g_2 \wp u - g_3.$$

Es ist

$$\wp(-u) = \wp u, \quad \wp'(-u) = -\wp' u.$$

An der Hand der Curve ist es leicht, die Realitätsverhältnisse der Function für reelle u zu verfolgen, was aber verschieden ausfällt, je nachdem die Wurzeln $e_1 e_2 e_3$ der Gleichung

$$4x^3 - g_2 x - g_3 = 0$$

alle reell oder theilweise imaginär sind.

Der wesentliche Inhalt der Betrachtungen in § 6 ist aber, dass *die Function für jeden reellen und complexen Werth von u existirt.*

Das Additionstheorem erhält man, weil

$$a \wp u + b = \wp' u,$$

für gewisse Constanten a und b gleichzeitig mit

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0$$

bestehen soll, in der gewöhnlichen Form

$$\wp u_1 + \wp u_2 + \wp u_3 = \frac{1}{4} \left(\frac{\wp' u_3 - \wp' u_1}{\wp u_3 - \wp u_1} \right)^2.$$

Ferner sind $\wp(\alpha + i\beta)$ und $\wp(\alpha - i\beta)$ für reelle α und β conjugirt imaginär. Um also aus

$$\wp u = \wp(\alpha + i\beta) = A + iB$$

*) Crelle's Journal Bd. 51, S. 359.

α und β zu finden, hat man mit Benutzung des Additionstheorems $\wp(2\alpha)$ und $\wp(2\beta i)$ zu bilden. Um aber hieraus α und βi eindeutig zu bestimmen, ist eine genauere Discussion nöthig, welche in geometrischer Form oben S. 94 gegeben ist.

Ausdrücke für die Perioden ω und ω' gewinnt man durch die Parameterbestimmung der obigen Punkte R_i. Sind die Wurzeln $e_1\, e_2\, e_3$ alle reell, und ausserdem

$$e_1 > e_2 > e_3,$$

so wird

$$\omega = k\int_{e_1}^{\infty}\frac{dx}{y}, \quad \omega' = k\int_{\infty}^{e_2}\frac{dx}{y},$$

die Integration über reelle wachsende x und continuirlich variirende y erstreckt.

Sind aber e_1 und e_3 conjugirt imaginär, so wird

$$\omega = k\int_{e_2}^{\infty}\frac{dx}{y}, \quad \omega + 2\omega' = k\int_{\infty}^{e_3}\frac{dx}{y},$$

die Integration wieder wie oben über reelle wachsende x erstreckt. In beiden Fällen ist ω reell, im ersten Falle ω', im zweiten $\omega + 2\omega'$ rein imaginär. Die Perioden lassen sich deshalb auf keine geringere Zahl reduciren. In jedem Falle hat man aber zwei *Fundamentalperioden* bestimmt, denn aus

$$\wp u = \wp \alpha$$

folgt

$$u = \pm\,\alpha + 2m\omega + 2n\omega'.$$

In jedem Periodenparallelogramm wird die Function nur einmal unendlich, nämlich für $u = 0$. Man hat aber den geometrischen Bestimmungen zufolge:

$$\lim_{u=0} u = \lim_{x=\infty} k\,\frac{x}{y} = \lim_{x=\infty}\frac{k}{\sqrt{4x}},$$

also

$$\lim_{x=\infty} x = \lim_{u=0}\wp(u) = \lim_{u=0}\frac{k^2}{4u^2}.$$

$\wp u$ wird mithin dort unendlich zweiter Ordnung. Am einfachsten setzt man $k = 2$.

Verlegt man den Anfangspunkt in den Punkt $(e_1, 0)$, so wird die Gleichung der Curve

$$y^2 = 4x(x - e_2')\,(x - e_3').$$

Schneidet man diese mit der Geraden $y = \alpha x$, so wird der Gleichung

$$\alpha^2 x = 4(x - e_2')\,(x - e_3')$$

zufolge das Product der Abscissen constant gleich $e_2'\, e_3'$, also:

$$\big(\wp(u+\omega) - e_1\big)\,(\wp u - e_1) = (e_2 - e_1)\,(e_3 - e_1) \text{ u. s. w.}$$

Die Functionen der halben Perioden sind die Abscissen der Berührungspunkte aus einem Punkte R. Wählt man wieder $(e_1 0)$ als Anfangspunkt, so erhält man aus

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

und

$$y^2 = 4x(x - e_2')(x - e_3')$$

unmittelbar

$$x^2 = e_2' e_3',$$

also:

$$\wp\left(\frac{\omega}{2}\right) - e_1 = +\sqrt{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)},$$

$$\wp\left(\frac{\omega}{2} + \omega'\right) - e_1 = -\sqrt{(e_2 - e_1)(e_3 - e_1)} \text{ u. s. w.}$$

ohne Zweifel über das Vorzeichen.

Beispiele für unicursale Curven lassen sich leicht entwickeln. Die Coordinaten werden (am einfachsten) durch trigonometrische, exponentielle oder rationale algebraische Functionen des Parameters ausgedrückt, jenachdem die Tangenten des singulären Punktes imaginär, reell oder zusammenfallend sind.

Kopenhagen, 18. Januar 1895.

Ueber die Schubert'sche Lösung eines Bachet'schen Problems.

Von

E. Busche in Bergedorf.

Die am Schlusse dieser Arbeit behandelte eigenartige Lösung des mathematischen Problems, das sich aus der seit Bachet de Méziriac bekannten Geschichte von 15 zu rettenden Christen und 15 zu opfernden Türken ableiten lässt, und das ich deshalb ein Bachet'sches Problem nenne, wurde mir von Herrn Schubert in Hamburg mitgetheilt, der sie später auch in seinen „Zwölf Geduldspielen"*) ohne Beweis veröffentlicht hat. Auf seine Veranlassung habe ich mich ebenfalls mit der Aufgabe beschäftigt und habe dabei eine einfache Lösung gefunden, mit deren Hülfe sich die Richtigkeit der merkwürdigen Schubert'schen Lösung beweisen lässt. Herr Schubert ist übrigens bei der Auffindung seiner Lösung von einer gewissen durch Induction erkannten Recursionsformel ausgegangen, die mit meiner Lösung im Grunde genommen identisch ist.

1.

Das von Herrn Schubert der Erzählung vom Schiffbruch der 15 Christen und 15 Türken entnommene Problem lässt sich in folgender Fassung aussprechen:

> Eine beliebige Anzahl n von Punkten, die man sich etwa auf einer Kreisperipherie angeordnet denken möge, ist der Reihe nach mit den Zahlen 1 bis n bezeichnet. Man zählt nun bei 1 anfangend und über n hinaus bei 1 fortfahrend fortgesetzt bis d und scheidet jeden Punkt von der weiteren Abzählung aus, auf den einmal die Zahl d gefallen ist. Die zu beantwortende Frage ist dann: welches ist die Nummer ν des Punktes, der als der e^{te} ausgeschieden wird? Dabei kann $0 < d \gtreqless n$ sein; die positive Zahl e ist natürlich $\overline{\overline{<}}\, n$.

---

*) Dieses für Nichtmathematiker zur Unterhaltung bestimmte Buch ist bei Dümmler in Berlin erschienen, 1895.

Meine Lösung dieser Frage beruht darauf, dass ich zuerst umgekehrt ν als bekannt und e als gesucht betrachte, und dass ich dabei von dem Punkt ν statt von dem Punkt n als Nullpunkt der Zählung ausgehe und von hier aus über $\nu - 1$, $\nu - 2$ u. s. w. rückwärts zähle, so dass, wenn $\nu - d > 0$ ist, der Punkt mit dieser Nummer zuerst ausgeschieden wird. Bei diesem Verfahren wird nämlich, weil ja anfänglich alle Punkte gleichberechtigt sind, der Nullpunkt n der eigentlich vorgeschriebenen Zählung nach ebenso viel Zählungen ausgeschieden werden wie der Punkt ν bei der ursprünglichen Abzählungsart. Die bei beiden Verfahren ausgeschiedenen Punkte sind natürlich im Allgemeinen von einander verschieden, aber die Configurationen, die diese Punkte in den beiden Fällen bilden, sind Spiegelbilder von einander in Bezug auf den Durchmesser, der den Kreisbogen zwischen n und ν halbirt; n und ν sind bei dieser Spiegelung entsprechende Punkte. Es möge ferner vorausgesetzt werden, dass jedesmal, wenn ein Punkt ausgeschieden ist, die übrig gebliebenen Punkte von Neuem nummerirt werden und zwar so, dass der anfänglich mit n bezeichnete Punkt immer der Nullpunkt der Nummerirung bleibt. Dieser Punkt ist als mit 2 Nummern bezeichnet anzusehen, nämlich mit der bleibenden Nummer Null und mit der veränderlichen Nummer, die gleich der Anzahl der noch vorhandenen Punkte ist.

Wenn nun beim Rückwärtszählen der Punkt mit der Nummer Null zum ersten Mal überschritten wird, nachdem man μ-mal ($\mu \geqq 0$) bis d gezählt hat, so dass also die μ Punkte $\nu - d, \nu - 2d, \ldots \nu - \mu d$ schon ausgeschieden und noch $n - \mu$ Punkte vorhanden sind, so hat der nach der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Zählung ausscheidende Punkt die (neue) Nummer $\nu - (\mu + 1)d + k(n - \mu)$, wo k die kleinste Zahl ist, die diesen Ausdruck positiv macht. Wenn $\nu - (\mu + 1)d = 0$ wäre, so würde die gesuchte Zahl e schon gefunden sein, nämlich $= \mu + 1$; anderenfalls fährt man fort, von der zuletzt gefundenen Nummer d, $2d$ u. s. w. zu subtrahiren, bis die Differenz wieder negativ wird und ein Vielfaches der nun noch vorhandenen Anzahl von Punkten zu addiren ist. Wenn nach e-mal wiederholter Subtraction der Zahl d die Differenz gleich Null wird, so ist das Verfahren beendigt, das in der folgenden Vorschrift seinen Ausdruck findet:

> Man schreibe die Zahlen $n, n - 1, n - 2, \ldots$ neben einander hin und setze unter n die Zahl ν, unter $n - 1$ die Zahl $\nu - d$, unter $n - 2$ die Zahl $\nu - 2d$ u. s. w., indem man fortgesetzt d subtrahirt. Sobald eine der Differenzen negativ werden würde, füge man zu der vorhergehenden Zahl der unteren Reihe so oft die über ihr stehende Zahl hinzu, dass, wenn man nun das Subtrahiren fortsetzt, eine positive Zahl herauskommt, die höchstens gleich der

Zahl ist, unter die sie gehört. Dieses Verfahren führt schliesslich in der unteren Reihe zu der Zahl Null, und wenn die darüber stehende Zahl gleich $n - e$ ist, so ist e die gesuchte Zahl.

Beispiel. $n = 11$, $d = 9$, $v = 10$; e ergiebt sich gleich 9.

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
10	1	2	2	1	6	3	4	3	0	

Die 6[te] Zahl der unteren Reihe z. B. ist 6, weil $1 + 2.7 - 9 = 6$ ist.

Nimmt man e als gegeben, v als gesucht an, so sieht man ohne Weiteres, dass das eben angegebene Verfahren, indem man es umkehrt, auch diese Aufgabe löst. Also:

*Um die Nummer der Zahl zu finden, die aus n Zahlen durch Abzählen bis d als die e^{te} ausscheidet, schreibe man die Zahlen $n-e+1$, $n-e+2$, ... $n-1$, n neben einander hin und setze unter $n-e+1$ die Zahl d, unter $n-e+2$ die Zahl $2d$ u. s. w., indem man fortgesetzt d addirt. Ergiebt sich hierbei eine Zahl, die grösser als die darüber stehende Zahl sein würde, so subtrahire man diese letztere so oft, bis die hinzuschreibende Zahl höchstens gleich der darüberstehenden ist. Die Zahl, die hierbei unter n erscheint, ist die gesuchte Nummer.**)

Das angeführte Beispiel kann auch zur Erläuterung dieser Vorschrift dienen. Statt der Zahl $d = 9$ steht unter $n - e + 1 = 3$ die Zahl $9-2.3=3$, statt $3+9=12$ unter 4 die Zahl $12-2.4=4$ u. s. w.

2.

Mittelst dieser ersten Lösung des Bachet'schen Problems beweise ich nun zunächst eine andere, die mit der Schubert'schen Lösung in sehr engem Zusammenhange steht. Dabei benutze ich die folgende Bezeichnung: Ist α eine beliebige reelle Zahl, so möge $[\alpha]$ die durch die Beziehungen

$$\alpha \leqq [\alpha] < \alpha + 1$$

definirte ganze Zahl sein. Ferner nenne ich, indem ich eine von Herrn Schubert gebrauchte Bezeichnung**) verallgemeinere, die folgende durch 3 reelle Zahlen a, s, q bestimmte Reihe von ganzen Zahlen

$$[a],\ \Big[(s+[a])q\Big],\ \Big[\Big(s+\Big[(s+[a])q\Big]\Big)\,q\Big],\ldots$$

---

*) Es ist sehr leicht einzusehen, wie diese Vorschrift abzuändern wäre, wenn nicht fortgesetzt bis d gezählt würde, sondern etwa erst bis d_1, dann bis d_2 u. s. w. Dabei können auch einige der Zahlen d negativ sein, was ein Zählen in entgegengesetzter Richtung bedeuten würde; in diesem Falle ist das Verfahren ein wenig abzuändern, worauf ich aber nicht näher eingehen will.

**) S. Mittheilungen der Math. Gesellschaft in Hamburg, Bd. III, H. 5, S. 223.

eine *Oberreihe* mit dem *Anfangsgliede* a, dem *Summanden* s und dem *Quotienten* q. Jedes Glied der Reihe geht aus dem vorhergehenden Gliede dadurch hervor, dass man zu diesem s addirt, die Summe mit q multiplicirt und darauf, wenn das Product nicht ganzzahlig ist, die nächst höhere ganze Zahl nimmt. Eine solche Oberreihe*) möge durch das Symbol (a, s, q) bezeichnet werden. Wenn a und s positiv und nicht beide gleich Null sind, und wenn $q > 1$ ist, so bilden die Glieder einer Oberreihe eine Reihe von beständig zunehmenden Zahlen, und auch die Differenz von zwei auf einander folgenden Gliedern nimmt niemals ab. Mit Rücksicht auf das Folgende ist noch zu bemerken, dass — wie leicht zu beweisen ist**) — kein von dem Anfangsgliede verschiedenes Glied der Oberreihe $\equiv 1 \pmod{d}$ sein kann, wenn $q = \frac{d}{d-1}$ ist.

Nun gilt folgender Satz:

Die Nummer v des Punktes, der aus n Zahlen durch Abzählen bis d als der e^{te} ausscheidet, ist gleich dem Ueberschuss von $de+1$ über das letzte Glied der Oberreihe $\left(1,\ n-e,\ \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $de+1$ ist.

Um hiernach das vorige Beispiel zu behandeln, ist die Oberreihe $\left(1,\ 2,\ \frac{9}{8}\right)$ zu bilden. Sie ist

$$1,\ \left[3\cdot\tfrac{9}{8}\right]=4,\ \left[6\cdot\tfrac{9}{8}\right]=7,\ 11,\ 15,\ 20,\ 25,\ 31,\ 38,\ 45,\ 53,\ 62,\ 72,\ 84,\ldots$$

Da $de+1 = 9.9+1 = 82$ ist, so ist 72 das grösste Glied der Oberreihe, das noch kleiner als $de+1$ ist, und die Differenz $82 - 72 = 10$ giebt die gesuchte Zahl v.

Das Beispiel lässt erkennen, dass man mittelst der Oberreihe nicht nur das Endresultat der ersten Lösung erhält, sondern auch die sämmtlichen Glieder der bei dieser Lösung zu bildenden unteren Reihe. Die Glieder der Oberreihe liefern nämlich der Reihe nach gerade die Summe aller Zahlen der oben stehenden Reihe, die man bei der Befolgung der ersten Vorschrift nach und nach subtrahiren muss, um die Glieder der unteren Reihe zu berechnen; nur wird diese Summe mittelst der Oberreihe immer gerade um 1 zu gross gefunden. So ist das 2^{te} Glied der Oberreihe in dem behandelten Falle gleich 4, und bei der ersten Lösung ist zuerst 3 zu subtrahiren, das 3^{te} Glied der Oberreihe ist 7 und andererseits ist nochmals 3, also im ganzen 6 zu subtrahiren u. s. w. Da man nun die erste Vorschrift auch auf das unter $n-e$ stehende Glied 0 der unteren Reihe ausdehnen kann,

*) Damit eine Oberreihe nicht mit der oberen Reihe der ersten Lösung verwechselt werde, will ich diese immer als die oben stehende Reihe bezeichnen.

**) a. a. O. S. 225.

wobei, da ja $0 \leqq n - e$ ist, immer 0 zu subtrahiren ist, und da das 1te Glied der Oberreihe immer gleich 1 ist, so gilt die angegebene Beziehung zwischen den Gliedern der Oberreihe und der Summe der bei der ersten Vorschrift zu subtrahirenden Zahlen für das erste Glied der Oberreihe ganz allgemein, und die Gültigkeit dieser Beziehung für alle Glieder kann durch vollständige Induction nachgewiesen werden.

Es möge zu diesem Zwecke angenommen werden, dass man bei der Befolgung der ersten Vorschrift bis zu dem Gliede $n - e + \lambda$ der oben stehenden Reihe, wo $\lambda \geqq 1$ ist, gekommen sei, und es möge ferner *erstens* vorausgesetzt werden, dass man, um die unter $n - e + \lambda$ stehende Zahl zu erhalten, von dem um d vermehrten vorhergehenden Gliede der unteren Reihe die Zahl $n - e + \lambda$ bereits 0-mal oder 1-mal oder öfter subtrahirt habe, ohne dass aber die Differenz schon $\leqq n - e + \lambda$ geworden wäre. Man muss also, wenn man nun in der Befolgung der ersten Vorschrift fortfährt, die Zahl $n - e + \lambda$ nochmals subtrahiren. Die bisher berechnete Zahl kann gleich $d\lambda - (t-1)$ gesetzt werden, da man d schon λ-mal addirt hat; $t - 1$ ist dann die Summe aller bis dahin subtrahirten Glieder der oben stehenden Reihe. Wenn nun die angegebene Beziehung zu der Oberreihe $\left(1, n-e, \frac{d}{d-1}\right)$ besteht, so ist t ein Glied dieser Oberreihe, und es ist jetzt zu zeigen, dass das nächste Glied t' der Oberreihe gerade um $n - e + \lambda$ grösser ist als t.

Setzt man

$$t = d(\lambda - 1) + r,$$

so ist

$$\begin{aligned} t' &= \left[(n-e+t)\frac{d}{d-1}\right] = \left[\left(n-e+d(\lambda-1)+r\right)\frac{d}{d-1}\right] \\ &= n-e+d(\lambda-1)+r+\left[\frac{n-e+d(\lambda-1)+r}{d-1}\right] \\ &= n-e+d(\lambda-1)+r+\lambda-1+\left[\frac{n-e+\lambda-1+r}{d-1}\right]. \end{aligned}$$

Es ist mithin

$$t' - t = n - e + \lambda - 1 + \left[\frac{n-e+\lambda-1+r}{d-1}\right].$$

Nun war vorausgesetzt, dass

$$d\lambda + 1 - t = d + 1 - r > n - e + \lambda$$

wäre. Daraus folgt

$$r < d + 1 - n + e - \lambda.$$

Andererseits ist sicher

$$d + 1 - r \leqq n - e + \lambda - 1 + d,$$

denn $d\lambda + 1 - t$ ist aus dem unter $n - e + \lambda - 1$ stehenden Gliede der unteren Reihe, das $\leqq n - e + \lambda - 1$ ist, dadurch hervorgegangen,

dass man d addirt und vielleicht noch $n-e+\lambda$ einmal oder öfter subtrahirt hat. Deshalb ist

$$r \geqq -n+e-\lambda+2.$$

Es zeigt sich also, dass der Zähler des letzten Klammerausdruckes $\geqq 1$ und $< d$ ist; der Klammerausdruck ist also $= 1$ und

$$t'-t = n-e+\lambda.$$

Hieraus geht hervor, dass das auf t folgende Glied der Oberreihe die richtige Grösse hat, und dass man also das unter $n-e+\lambda$ zu schreibende Glied der unteren Reihe auch mittelst der Oberreihe findet, indem man ihr grösstes Glied, dass noch $< d\lambda+1$ ist, von dieser Zahl subtrahirt. Denn wenn etwa

$$d\lambda+1-t^{(\varrho)} \leqq n-e+\lambda$$

würde, und man bestimmte nun das nächste Glied $t^{(\varrho+1)}$ der Oberreihe, so wäre $t^{(\varrho+1)}-t^{(\varrho)} > n-e+\lambda$, da das zu $t^{(\varrho)}$ gehörige $r^{(\varrho)} \geqq d+1-n+e-\lambda$ sein würde. Die Differenz $d\lambda+1-t^{(\varrho+1)}$ würde also negativ sein.

Nun möge *zweitens* vorausgesetzt werden, dass das mit Hülfe des Gliedes t der Oberreihe noch richtig zu bestimmende Glied $d\lambda+1-t$ der unteren Reihe schon kleiner als die darüber stehende Zahl $n-e+\lambda$ oder gleich dieser Zahl sei. Es möge ferner angenommen werden, dass man bei weiterer Befolgung der ersten Vorschrift noch $\sigma \geqq 0$ Glieder der unteren Reihe bilden könne, ehe man wieder ein Glied der oben stehenden Reihe zu subtrahiren hätte, so dass also unter

$$n-e+\lambda,\ n-e+\lambda+1, \ldots n-e+\lambda+\sigma$$

die Zahlen

$$d\lambda+1-t, \quad d(\lambda+1)+1-t, \quad \ldots d(\lambda+\sigma)+1-t$$

zu setzen wären, dass dann aber das folgende Glied

$$d(\lambda+\sigma+1)+1-t > n-e+\lambda+\sigma+1$$

würde, so dass diese letztere Zahl wieder zu subtrahiren wäre. Es ist dann zu zeigen, dass das auf t folgende Glied t' der Oberreihe gerade um $n-e+\lambda+\sigma+1$ grösser ist als t. Setzt man wieder

$$t = d(\lambda-1)+r$$

und also

$$t'-t = n-e+\lambda-1+\left[\frac{n-e+\lambda-1+r}{d-1}\right],$$

so ist

$$d(\lambda+\sigma+1)+1-t = (\sigma+2)d+1-r > n-e+\lambda+\sigma+1$$

und

$$d(\lambda+\sigma)+1-t = (\sigma+1)d+1-r \leqq n-e+\lambda+\sigma.$$

Folglich ist

$$(\sigma+2)d-n+e-\lambda-\sigma > r \geqq (\sigma+1)d-n+e-\lambda-\sigma+1.$$

Der Zähler des Klammerausdruckes ist demnach $\geqq (\sigma+1)(d-1)+1$ und $<(\sigma+2)(d-1)+1$, der Klammerausdruck ist mithin $=\sigma+2$ und

$$t'-t=n-e+\lambda+\sigma+1.$$

Da man ferner sofort sieht, dass, wenn nicht etwa, bei $\sigma=0$, der schon erledigte erste Fall wieder eintritt, das auf t' folgende Glied der Oberreihe schon zu gross ist, um von $d(\lambda+\sigma+1)+1$ subtrahirt etwas Positives zu ergeben, so ist bewiesen, dass auch in diesem Falle die Lösung mittelst der Oberreihe mit der ersten Lösung in Uebereinstimmung bleibt. Damit ist der Beweis für die Richtigkeit der zweiten Lösung geführt.

3.

Die Schubert'sche Lösung lautet folgendermassen:

Die Nummer ν des Punktes, der aus n Punkten durch Abzählen bis d als der e^{te} ausscheidet, ist gleich dem Ueberschuss von $dn+1$ über das grösste Glied der Oberreihe $\left(d(n-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right)$, das noch kleiner als $dn+1$ ist.

Das wiederholt benutzte Beispiel möge auch nach dieser Methode behandelt werden. Dazu ist die Oberreihe $\left(9\cdot 2+1, 0, \frac{9}{8}\right)=\left(19, 0, \frac{9}{8}\right)$ zu bilden. Ihre ersten Glieder sind:

$$19, \left[19\cdot\tfrac{9}{8}\right]=22, \left[22\cdot\tfrac{9}{8}\right]=25, 29, 33, 38, 43, 49, 56, 63, 71, 80, 90, 102, \ldots$$

Da $dn+1=9\,.\,11+1=100$ ist, so ist $\nu=100-90=10$.

Um die Richtigkeit dieser Lösung nachzuweisen, zeige ich, dass irgend ein Glied der Oberreihe $\left(d(n-e)+1,\ 0,\ \frac{d}{d-1}\right)$ gerade um $d(n-e)$ grösser ist als das entsprechende Glied der Oberreihe $\left(1, n-e, \frac{d}{d-1}\right)$. Für die beiden Anfangsglieder gilt diese Beziehung. Angenommen nun, sie bestände auch noch für die beiden beliebigen entsprechenden Glieder T und t der beiden Reihen, es wäre also

$$T=d(n-e)+t,$$

dann lässt sich zeigen, dass dieselbe Beziehung auch noch für die beiden folgenden Glieder T' und t' gilt. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} T'=\left[T\cdot\frac{d}{d-1}\right]&=\left[\left(d(n-e)+t\right)\cdot\frac{d}{d-1}\right]\\ &=\left[(d-1)(n-e)\cdot\frac{d}{d-1}+(n-e+t)\cdot\frac{d}{d-1}\right]\\ &=d(n-e)+\left[(n-e+t)\cdot\frac{d}{d-1}\right]=d(n-e)+t'. \end{aligned}$$

Wegen dieser damit als allgemeingültig erwiesenen Beziehung zwischen den beiden Oberreihen ist nun immer

$$dn+1-T=dn+1-d(n-e)-t=de+1-t,$$

und damit ist die Schubert'sche Lösung auf die vorige zurückgeführt und ihre Richtigkeit bewiesen.

Die zweite Lösung ist offenbar nur eine Modification des Schubert'schen Verfahrens, aus dem ich sie auch ursprünglich abgeleitet habe. Bei der zweiten Lösung hat man im Allgemeinen mit kleineren Zahlen zu rechnen als bei der dritten, aber dieser Vortheil wird reichlich dadurch aufgewogen, dass man bei der dritten Lösung eine Oberreihe mit dem Summanden Null, also eine möglichst einfache Oberreihe zu berechnen hat. Wenn n nicht sehr gross ist, führt übrigens die erste Lösung wohl am schnellsten zum Ziele, bei sehr grossem n aber verdient die Schubert'sche Methode auch bei der practischen Anwendung den Vorzug, besonders dann, wenn d einen verhältnissmässig kleinen Werth hat. Die höheren Glieder einer Oberreihe wachsen nämlich ungefähr ebenso wie die Glieder einer geometrischen Reihe mit demselben Quotienten.

Anmerkung. Ich habe das hier behandelte Problem nach Bachet benannt, weil es dadurch am besten als ein „problème plaisant et délectable qui se fait par les nombres" gekennzeichnet wird. Aus Herrn M. Cantor's Geschichte der Mathematik sehe ich, dass es schon von Cardano den Namen „Josephsspiel" erhalten hat. Herr Cantor erwähnt das Spiel auf den Seiten 332, 460, 700, 701 des 2ten und auf Seite 14 des 3ten Bandes seiner Vorlesungen.

Partialbruchzerlegung rationaler Functionen eines algebraischen Gebildes zweier Veränderlichen.

Von

P. Hoyer in Burg b./Magdeburg.

Im „Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung für 1893“ theilt Herr Noether (Abschn. VII, 10 des Berichtes „Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit“ von A. Brill und M. Noether) zur Darstellung der rationalen Functionen $R(x, y)$, die an vorgeschriebenen Stellen des Gebildes (x, y) mit vorgeschriebenen Ordnungen unendlich werden, eine Methode des Herrn Weierstrass mit, mit der eine, dem gleichen Zweck dienende Methode des Herrn Noether (Math. Ann. Bd. 37, p. 455 u. 457) darin übereinstimmt, dass die Bestimmung der darzustellenden Functionen auf die Bestimmung gewisser rationaler Functionen des Gebildes zurückgeführt wird, die ich als *„Partialbruchformen eines gewissen Gebietes des Gebildes* (x, y)“ bezeichnen möchte. Diese Functionen haben nämlich das Gemeinsame, dass jede *innerhalb eines Gebietes* $(x, y)'$, das aus dem Gebilde (x, y) durch Ausschluss gewisser fester Stellen erhalten wird, nur an *einer einzigen* Stelle mit vorgeschriebener Ordnung unendlich wird. Bei Weierstrass sind dies die Functionen $F(x, y;\, x_\lambda, y_\lambda)_\mu$, resp. $f(x, y;\, x_\lambda, y_\lambda)_\mu$, bei Noether die Functionen $P_{\xi,\eta}^{(i)}(x_i)$*) und die ausgeschlossenen Stellen sind bei Weierstrass die Stellen $(a_i\, b_i^{(\nu)})$, resp. $(x = \infty,\, y)$, bei Noether die Punkte $a_1 \ldots a_p$. Man kann diese Functionen als *specielle* Partialbruchformen 1ter, 2ter, ... Ordnung der betreffenden Gebiete bezeichnen. Die *allgemeine*, zu einer Stelle $(x_\lambda\, y_\lambda)$ des zu Grunde gelegten Gebiets gehörige Partialbruchform $(\mu + 1)^{\text{ter}}$ $(\mu = 0, 1, \ldots)$ Ordnung dieses Gebietes, also die allgemeinste an dieser Stelle unendlich von der $(\mu + 1)^{\text{ten}}$ Ordnung werdende, an allen übrigen Stellen des Gebiets endlich bleibende rationale Function $R(x, y)$ ergiebt sich dann, wenn man zu einer

*) Das vollständige Analogon zur Noether'schen Darstellung wäre übrigens nach Weierstrass die Darstellung durch die Functionen $\mathsf{H}(x, y, x_\alpha, y_\alpha)_\mu$.

linearen homogenen Function $\mu + 1$ solcher speciellen Partialbruchformen noch hinzufügt eine Partialbruchform nullter Ordnung des Gebiets, d. h. eine Function, die an keiner Stelle des Gebiets unendlich wird, also nur an den ausgeschlossenen Stellen, *auf der Grenze* des Gebiets unendlich werden kann. Bei der Noether'schen Darstellung kommen solche Partialbruchformen nullter Ordnung, wenigstens als besondere Functionen, nicht zur Anwendung, was daran liegt, dass die speciellen Partialbruchformen $P_{\xi,\eta}^{(i)}(x_i)$ dort so bestimmt sind, dass sie auf der, nur p Stellen enthaltenden Grenze des Gebiets von der ersten Ordnung unendlich werden. Die allgemeine Partialbruchform nullter Ordnung endlich lässt sich wieder als lineare homogene Function specieller Partialbruchformen nullter Ordnung darstellen. Durch diese speciellen Partialbruchformen nullter und höherer Ordnung eines Gebiets $(x, y)'$ stellt nun Weierstrass eine beliebige rationale Function $R(x, y)$, die an vorgeschriebenen Stellen des Gebildes (x, y) unendlich von vorgeschriebenen Ordnungen wird, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten dar, welche letzteren gewissen linearen homogenen Gleichungen genügen müssen, da $R(x, y)$ auf der Grenze des Gebiets $(x, y)'$ nicht beliebig unendlich werden darf. Die Darstellung einer solchen Function ist damit auf die Darstellung der allgemeinen Partialbruchform eines Gebiets $(x, y)'$ zurückgeführt, d. h. *auf die Ermittelung der speciellen Partialbruchformen dieses Gebiets, aus denen sich die allgemeine Form als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten zusammensetzen lässt.*

Die Bestimmung dieser speciellen Partialbruchformen, deren sich Herr Weierstrass bedient, geschieht nun — wenigstens nach Herrn Noether's Bericht — fast durchweg durch Reihenentwickelungen gewisser Integranden. Eine Ausnahme bildet nur in der früheren Bearbeitung (Abschn. VII, 4 des Noether'schen Berichts) die Ableitung der Partialbruchformen nullter Ordnung (des durch Ausschluss der Stellen $(x = \infty, y)$ gewonnenen Gebiets) aus der Kronecker'schen Darstellung der algebraischen ganzen Function $G(x)$, ferner die directe Aufstellung der Functionen $f(x, y;\, x', y')$, $F(x, y;\, x', y')$, die zur Herstellung jener Integranden dienen und selbst zu (x', y') gehörige Partialbruchformen erster Ordnung sind, aber nur, solange (x', y') keine singuläre Stelle des Gebildes ist. Bei der Wichtigkeit des Gegenstandes dürfte es nun gerechtfertigt erscheinen, für die Herleitung solcher Partialbruchformen noch eine andere Methode zu geben, die ich mir im Folgenden mitzutheilen erlauben werde. Dieselbe unterscheidet sich von derjenigen des Herrn Weierstrass dadurch, dass sie auf rein algebraischen Betrachtungen*) beruht, und sie ist (ebenso wie die

*) Einem successiven Auflösen von Systemen linearer Gleichungen, ohne Zuhilfenahme sog. conjugirter Functionen.

Weierstrass'sche Ableitung aus den erwähnten Reihenentwickelungen) völlig allgemein gültig, d. h. sie gilt auch für die singulären Stellen des Gebildes.

Den folgenden Betrachtungen lege ich ein Gebilde (x, y) zu Grunde, in dem y eine *ganze* algebraische Function von x ist, und ein Gebiet $(x, y)'$, das aus (x, y) durch Ausschluss der Stellen $(x=\infty, y)$ erhalten wird, also die im Endlichen liegenden Stellen des Gebildes umfasst. Unter einer Partialbruchform ist dann stets eine Partialbruchform des Gebiets $(x, y)'$ im oben erläuterten Sinne zu verstehen. Die (irreductible) Gleichung zwischen x, y, die das Gebilde definirt, sei in Beziehung auf y vom Grade n.

I. Da man jede rationale Function des Gebildes (x, y) in der Form:

$$(1)\qquad R(x, y) = R_0(x) + R_1(x)y + \cdots + R_{n-1}(x)y^{n-1}$$

darstellen kann, wo $R_0 \ldots R_{n-1}$ rationale Functionen von x sind, so folgt durch Zerlegung von $R_0, \ldots R_{n-1}$ in Partialbrüche, dass man $R(x, y)$ auch in der Form darstellen kann:

$$(2)\qquad R(x, y) = r(x, y) + P(x, y, \xi_1) + P(x, y, \xi_2) + \cdots,$$

wo $r(x, y)$ eine rationale ganze Function von x, y (also eine lineare homogene Function von Partialbruchformen nullter Ordnung $x^\alpha y^\beta$) bedeutet, $x - \xi_1$, $x - \xi_2, \ldots$ die verschiedenen, in den nothwendigen Nennern von $R_0(x), \ldots R_{n-1}(x)$ enthaltenen Linearfactoren sind und $P(x, y, \xi_\alpha)$ die Gestalt hat:

$$P(x, y, \xi_\alpha) = \frac{r_0(x)}{(x-\xi_\alpha)^{k_0}} + \frac{r_1(x)}{(x-\xi_\alpha)^{k_1}}y + \cdots + \frac{r_{n-1}(x)}{(x-\xi_\alpha)^{k_{n-1}}}y^{n-1},$$

in der $r_0, r_1, \ldots r_{n-1}$ Null oder rationale ganze, durch $x - \xi_\alpha$ nicht theilbare Functionen von x von resp. niedrigeren Graden als $k_0, k_1, \ldots k_{n-1}$ sind. Wir wollen eine solche Function $P(x, y, \xi)$ auch durch $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ bezeichnen, wenn sie in Beziehung auf y vom Grade β ist und der grösste der in ihr vorkommenden Exponenten $k_0, \ldots k_\beta$ gleich α ist. Die im Endlichen liegenden Unendlichkeitsstellen einer Function $P(x, y, \xi)$ können keine andern, als die zu $x = \xi$ gehörigen Stellen des Gebildes (x, y) sein, und die Functionen $P(x, y, \xi_1), P(x, y, \xi_2) \ldots$, die man durch Anwendung der Zerlegung (2) auf eine Partialbruchform nullter Ordnung $R(x, y)$ erhält, müssen daher wieder Partialbruchformen nullter Ordnung sein. Es sollen jetzt die Functionen $P(x, y, \xi)$ weiter zerlegt, d. h. die unter ihnen enthaltenen Partialbruchformen ermittelt werden.

II. Soll die Function

$$P_{1,\beta}(x, y, \xi) = \frac{c_0 + c_1 y + \cdots + c_\beta y^\beta}{x - \xi} \quad (\beta \leq n-1)$$

eine Partialbruchform nullter Ordnung sein, so müssen die Constanten $c_0 \ldots c_\beta$ einem System von n linearen homogenen Gleichungen genügen. Wird nämlich die Function y in der Umgebung von $x = \xi$ durch die Elemente dargestellt:

$$(3) \quad x = \xi + t^\alpha, y = \eta + t\mathfrak{P}_0(t); \; x = \xi + t_1^{\alpha_1}, \; y = \eta_1 + t_1\mathfrak{P}_1(t_1);$$
$$\ldots x = \xi + t_{\nu-1}^{\alpha_{\nu-1}}, \; y = \eta_{\nu-1} + t_{\nu-1}\mathfrak{P}_{\nu-1}(t_{\nu-1}),$$

wo $\mathfrak{P}_0, \ldots \mathfrak{P}_{\nu-1}$ gewöhnliche Potenzreihen bedeuten, so müssen in der durch Einsetzen des ersten Elements im Zähler von $P_{1,\beta}(x, y, \xi)$ sich ergebenden Reihe die Coefficienten von $t^0 \ldots t^{\alpha-1}$, in der durch Einsetzen des zweiten sich ergebenden Reihe die Coefficienten von $t_1^0 \ldots t_1^{\alpha_1-1}$ u. s. f. verschwinden, was $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_{\nu-1} = n$ lineare homogene Gleichungen für $c_0 \ldots c_\beta$ ergiebt. Ist nun für kein $\beta \leq n - 1$ das System dieser Gleichungen durch ein Grössensystem $(c_0 \ldots c_\beta)$ zu befriedigen, in dem c_β von Null verschieden ist, so existirt unter den Functionen $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ keine Partialbruchform nullter Ordnung; denn wäre $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ eine solche, so müsste die Anwendung der Zerlegung (2) auf $(x-\xi)^{\alpha-1}P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ auf eine Partialbruchform nullter Ordnung $P_{1,\beta'}(x, y, \xi)$ $(\beta' \leq \beta)$ führen. Besitzt aber für einen Index β das System jener n Gleichungen ein Lösungssystem $(c_0 \ldots c_\beta)$ mit von Null verschiedenem c_β, so sei $\beta = \beta_1$ der kleinste Index β, für den dieses gilt, und $(\bar{c}_0 \ldots \bar{c}_{\beta_1-1}, \bar{c}_{\beta_1} = 1)$ sei ein solches Lösungssystem. Dann sind die Functionen

$$\bar{P}_{1,\beta_1}(x, y, \xi)_0 = \frac{\bar{c}_0 + \bar{c}_1 y + \cdots + \bar{c}_{\beta_1-1} y^{\beta_1-1} + y^{\beta_1}}{x - \xi}$$
$$\bar{P}_{1,\beta_1+1}(x, y, \xi)_0 = y\bar{P}_{1,\beta_1}(x, y, \xi)_0, \; \bar{P}_{1,\beta_1+2}(x, y, \xi) = y^2\bar{P}_{1,\beta_1}(x, y, \xi)_0,$$
$$\ldots \bar{P}_{1,n-1}(x, y, \xi)_0 = y^{n-1-\beta_1}\bar{P}_{1,\beta_1}(x, y, \xi)_0$$

Partialbruchformen nullter Ordnung. Dagegen giebt es unter den Functionen $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$, für die $\alpha \geq 1$, $\beta < \beta_1$ ist, keine Partialbruchform nullter Ordnung; denn wäre $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ eine solche, so würde man durch Anwendung der Zerlegung (2) auf $(x-\xi)^{\alpha-1}P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)$ zu einer Partialbruchform nullter Ordnung $P_{1,\beta'}(x, y, \xi)$ gelangen, für die $\beta' < \beta_1$ wäre, was mit der über β_1 getroffenen Festsetzung im Widerspruch steht. Daraus folgt, dass jede Function $P_{1,\beta}(x, y, \xi)$ $(\beta \geq \beta_1)$, die eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, sich in der Form:

$$P_{1,\beta}(x, y, \xi)_0 = \sum_{\alpha=0}^{\beta-\beta_1} c'_\alpha \bar{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0$$

darstellen lassen muss, wenn die Constanten $c_0' \ldots c'_{\beta-\beta_1}$ so bestimmt werden, dass in der Differenz der rechten und linken Seite dieser Gleichung die Coefficienten von $y^{\beta_1}, \ldots y^\beta$ verschwinden.

Bilden wir jetzt die Function

$$P_{2,\beta_1+\beta}(x, y, \xi) = \frac{1}{x-\xi}\left(\sum_{\alpha=0}^{\beta_1+\beta} c_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{\beta} c'_\alpha \overline{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0\right),$$

so kann vielleicht auch das System der n Gleichungen, welches ausdrückt, dass diese Function eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, ein Lösungssystem $(c_0 \ldots c_{\beta_1+\beta}\, c_0' \ldots c'_\beta)$ mit von Null verschiedenem c'_β besitzen. Sei $\beta = \beta_1'$ der kleinste Index β, für den dieses gilt, und $(\overline{c}_0 \ldots \overline{c}_{\beta_1+\beta_1'}\, \overline{c}_0' \ldots \overline{c}'_{\beta_1'-1}\, \overline{c}'_{\beta_1'} = 1)$ ein solches Lösungssystem, so sind die Functionen:

$$\underset{(\beta_2=\beta_1+\beta_1')}{\overline{P}_{2,\beta_2}(x, y, \xi)_0} = \frac{1}{x-\xi}\left(\sum_{\alpha=0}^{\beta_2} \overline{c}_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{\beta_1'} \overline{c}'_\alpha \overline{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0\right),$$

$$\overline{P}_{2,\beta_2+1}(x, y, \xi)_0 = y\,\overline{P}_{2,\beta_2}(x, y, \xi)_0, \quad \overline{P}_{2,\beta_2+2}(x, y, \xi)_0 = y^2\,\overline{P}_{2,\beta_2}(x, y, \xi)_0,$$

$$\ldots\ \overline{P}_{2,n-1}(x, y, \xi)_0 = y^{n-1-\beta_2}\,\overline{P}_{2,\beta_2}(x, y, \xi)_0$$

Partialbruchformen nullter Ordnung. Ebenso erhält man eine dritte Reihe solcher Partialbruchformen nullter Ordnung:

$$P_{3,\beta_3}(x, y, \xi)_0, \quad \overline{P}_{3,\beta_3+1}(x, y, \xi)_0, \ \ldots,\ \overline{P}_{3,n-1}(x, y, \xi)_0,$$

wenn das Gleichungssystem, welches ausdrückt, dass die Function

$$P_{3,\beta_2+\beta}(x, y, \xi)$$

$$= \frac{1}{x-\xi}\left(\sum_{\alpha=0}^{\beta_2+\beta} c_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{\beta_1'+\beta} c'_\alpha \overline{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0 + \sum_{\alpha=0}^{\beta} c''_\alpha \overline{P}_{2,\beta_2+\alpha}(x, y, \xi)_0\right)$$

eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, durch ein Grössensystem

$$(c_0 \ldots c_{\beta_2+\beta}\, c_0' \ldots c'_{\beta_1'+\beta}\, c_0'' \ldots c''_\beta)$$

mit von Null verschiedenem c''_β zu lösen ist. So kann man fortfahren und gelangt zu einer Anzahl solcher Reihen von Partialbruchformen nullter Ordnung, die jedenfalls endlich ist, da der Index α in einer Partialbruchform nullter Ordnung $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ nicht über jede Grenze hinaus wachsen kann (denn $(x-\xi)^\alpha$ muss ein Theiler der Discriminante von y sein*)). Die Anzahl dieser Reihen sei l und die Anzahl der in ihnen enthaltenen Partialbruchformen

$$nl - (\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_l) = r_\xi.$$

III. Es soll jetzt gezeigt werden, dass durch diese r_ξ Partialbruchformen sich jedes $P_{\alpha,\beta}(x,y,\xi)_0$, d. h. jede Function $P_{\alpha,\beta}(x,y,\xi)$, die eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten darstellen lässt. Hierzu beweisen wir,

---

*) Die Partialbruchformen nullter Ordnung des Gebiets $(x, y)'$ sind algebraische ganze Functionen von x.

dass für keinen der Indices $k = 1, 2, \ldots, l+1$ eine Partialbruchform $P_{\alpha,\beta_k}(x, y, \xi)_0$ existirt, für die $\alpha \geqq k$, $\beta < \beta_k (\beta_{l+1} = n)$ ist, und dass jede Partialbruchform $P_{k,\beta}(x, y, \xi)_0$, die existirt, sich als lineare homogene Function der Partialbruchformen

$$\overline{P}_{\alpha,\beta_\alpha+\gamma}(x, y, \xi)_0 \; (\alpha = 1, \ldots, k, \; \gamma = 0, 1, \ldots, n-1-\beta_\alpha)$$

darstellen lässt. Da dieser Satz bereits oben für den Index $k = 1$ bewiesen ist, so werden wir zum Beweise desselben für die Indices $1, 2, \ldots, k$ ihn für die Indices $1, 2, \ldots, k-1$ als bewiesen voraussetzen dürfen. Existirte nun eine Partialbruchform $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$, für die $\alpha \geqq k$, $\beta < \beta_k$ wäre, so würde die Anwendung der Zerlegung (2) auf $(x-\xi)^{\alpha-k} P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ zu einer Partialbruchform $P_{k,\beta'}(x, y, \xi)_0$ führen, für die wieder $\beta' < \beta_k$ wäre. Sei nun in dieser $y^{\beta''}$ die höchste Potenz von y, deren Coefficient $(x-\xi)^k$ als Nenner hat. Dann wäre auch $\beta'' < \beta_k$, dagegen müsste $\beta'' \geqq \beta_{k-1}$ sein. Denn sonst würde man durch Fortschaffen der Potenzen $y^{\beta_{k-1}}, y^{\beta_{k-1}+1}, \ldots, y^{\beta'}$ aus $P_{k,\beta'}(x, y, \xi)_0$ mittelst Subtraction der mit gewissen Constanten multiplicirten Formen $\overline{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ $(\alpha \leqq k-1, \beta \geqq \beta_{k-1})$ eine Partialbruchform

$$P_{k,\beta''+\delta}(x, y, \xi)_0 \; (0 \leqq \delta < \beta_{k-1} - \beta'')$$

erhalten, für die also $\beta'' + \delta < \beta_{k-1}$ wäre, was gegen die Voraussetzung ist. Man könnte nun wegen $\beta'' \geqq \beta_{k-1}$ aus $P_{k,\beta'}(x, y, \xi)_0$ die Potenzen $y^{\beta''+1}, y^{\beta''+2}, \ldots, y^{\beta'}$ durch Subtraction der mit gewissen Constanten multiplicirten Formen $\overline{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ $(\alpha \leqq k-1, \beta > \beta'')$ fortschaffen und erhielte eine Partialbruchform $P_{k,\beta''}(x, y, \xi)_0$. Dann wäre

$$(x-\xi) P_{k,\beta''}(x, y, \xi)_0 = c_0 + c_1 y + \cdots + c_{\beta''} y^{\beta''} + P_{k-1,\beta''}(x, y, \xi)_0,$$

$$\begin{aligned} P_{k,\beta''}(x, y, \xi)_0 = \frac{1}{x-\xi} \Bigg(& \sum_{\alpha=0}^{\beta''} c_\alpha y^\alpha + \sum_{\alpha=0}^{\beta''-\beta_1} c'_\alpha \overline{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0 \\ & + \sum_{\alpha=0}^{\beta''-\beta_2} c''_\alpha \overline{P}_{2,\beta_2+\alpha}(x, y, \xi)_0 + \cdots \\ & \cdots + \sum_{\alpha=0}^{\beta''-\beta_{k-1}} c^{(k-1)}_\alpha \overline{P}_{k-1,\beta_{k-1}+\alpha}(x, y, \xi)_0 \Bigg) \end{aligned}$$

und es wäre also das Gleichungssystem, welches ausdrückt, dass die rechte Seite dieser Gleichung eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, durch ein Grössensystem

$$\left(c_0 \ldots c_{\beta''} \; c_0' \ldots c'_{\beta''-\beta_1} \; c_0'' \ldots c''_{\beta''-\beta_2} \ldots c_0^{(k-1)} \ldots c^{(k-1)}_{\beta''-\beta_{k-1}}\right)$$

zu lösen, in dem $c^{(k-1)}_{\beta''-\beta_{k-1}}$ von Null verschieden und $\beta'' - \beta_{k-1} < \beta_k - \beta_{k-1}$

wäre, was der über β_k getroffenen Festsetzung widerspricht und für $k = l + 1$ überhaupt nicht mehr möglich ist. Schafft man daher aus einer Form $P_{k,\beta}(x, y, \xi)_0$ durch Subtraction der mit gewissen Constanten multiplicirten Formen

$$\bar{P}_{\alpha,\beta_k}(x, y, \xi)_0, \ \bar{P}_{\alpha,\beta_k+1}(x, y, \xi)_0 \ldots, \bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0 \ (\alpha = 1 \ldots k)$$

die Potenzen $y^{\beta_k}, y^{\beta_k+1}, \ldots, y^{\beta}$ fort, so kann die sich ergebende Form nur eine Form $P_{k-1,\beta'}(x, y, \xi)_0$ sein, die sich durch die Formen $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$, in denen $\alpha \leqq k - 1$ ist, darstellen lässt.

Aus der Gestalt der r_ξ Partialbruchformen $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ folgt leicht, dass zwischen diesen Formen keine lineare homogene Gleichung mit von Null verschiedenen, constanten Coefficienten stattfinden kann. Gleiches gilt von den zu verschiedenen Linearfactoren $x - \xi_1, x - \xi_2 \ldots$ der Discriminante von y gehörigen Formen $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_1)_0, \bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_2)_0 \ldots$ Nimmt man zu der Gesammtheit dieser Formen, deren Anzahl r endlich ist, die Formen $x^\alpha y^\beta$, deren Anzahl unendlich ist, hinzu, so erhält man ein vollständiges System von einander linear unabhängiger Partialbruchformen nullter Ordnung, durch die (zufolge (2)) sich jede Partialbruchform nullter Ordnung linear darstellen lässt.

IV. Bilden wir wieder das System der n Gleichungen, welche ausdrücken, dass die Function:

$$\begin{aligned} P(x, y, \xi) = \frac{1}{x - \xi}\Bigg(\sum_{\alpha=0}^{n-1} c_\alpha y^\alpha &+ \sum_{\alpha=0}^{n-1-\beta_1} c'_\alpha \bar{P}_{1,\beta_1+\alpha}(x, y, \xi)_0 \\ &+ \sum_{\alpha=0}^{n-1-\beta_2} c''_\alpha \bar{P}_{2,\beta_2+\alpha}(x, y, \xi)_0 + \cdots \\ &\cdots + \sum_{\alpha=0}^{n-1-\beta_l} c^{(l)}_\alpha \bar{P}_{l,\beta_l+\alpha}(x, y, \xi)_0\Bigg) \end{aligned}$$

eine Partialbruchform nullter Ordnung ist, so kann von diesen Gleichungen keine eine Folge der übrigen mehr sein. Denn sonst wäre dieses Gleichungssystem durch ein Grössensystem

$$\left(c_0 \ldots c_{n-1}\ c_0' \ldots c'_{n-1-\beta_1} \ldots c_0^{(l)} \ldots c^{(l)}_{n-1-\beta_l}\right)$$

mit wenigstens $r_\xi + 1$ von einander unabhängigen Grössen zu lösen und dadurch würde $P(x, y, \xi)$ eine lineare homogene Function von wenigstens $r_\xi + 1$ linear von einander unabhängigen Partialbruchformen $P_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$, während es nur r_ξ solcher Functionen giebt. Lässt man daher aus jenem Gleichungssystem diejenige Gleichung fort, die das Verschwinden des Coefficienten von $t^{\alpha-1}$ in der durch Einsetzen des ersten der Elemente (3) in der eingeklammerten Summe sich ergebenden Reihe ausdrückt, so kann man das System der übrigen Gleichungen

durch ein Grössensystem $\left(\bar{c}_0 \ldots \bar{c}_{n-1} \bar{c}_0' \ldots \bar{c}'_{n-1-\beta_1} \ldots \bar{c}_0^{(l)} \ldots \bar{c}^{(l)}_{n-1-\beta_l}\right)$ lösen, das der fortgelassenen Gleichung nicht genügt. Dann ist $P(x, y, \xi)$ eine zu (ξ, η) gehörige Partialbruchform erster Ordnung, die wir durch $\bar{P}(x, y, \xi, \eta)_1$ bezeichnen. Durch diese und die r_ξ Formen $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi)_0$ lässt sich jedes $P(x, y, \xi, \eta)_1$, d. h. jede Function $P(x, y, \xi)$, die eine zu (ξ, η) gehörige Partialbruchform erster Ordnung ist, als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten darstellen. Wäre nun weiter in dem System der n Gleichungen, die ausdrücken, dass

$$P(x, y, \xi) = \frac{1}{x-\xi}\left(\sum_{\alpha=0}^{n-1} c_\alpha y^\alpha + P(x, y, \xi, \eta)_1\right)$$

eine zu (ξ, η) gehörige Partialbruchform erster Ordnung ist, eine Gleichung eine Folge der übrigen, so wäre dies Gleichungssystem durch ein aus den $r_\xi + 1$ Coefficienten in $P(x, y, \xi, \eta)_1$ und $c_0 \ldots c_{n-1}$ gebildetes Grössensystem mit wenigstens $r_\xi + 2$ unabhängigen Grössen zu lösen, und durch Einsetzen dieses Coefficientensystems in $P(x, y, \xi)$ gelangte man zu wenigstens $r_\xi + 2$ unabhängigen Functionen $P(x, y, \xi, \eta)_1$, während es nur $r_\xi + 1$ solcher linear von einander unabhängigen Functionen giebt. Lässt man daher diejenige Gleichung fort, die das Verschwinden des Coefficienten von $t^{\alpha-2}$ in der Entwickelung der eingeklammerten Summe nach Potenzen von t ausdrückt, so kann man das System der übrigen Gleichungen durch ein Coefficientensystem lösen, das der fortgelassenen Gleichung nicht genügt. Durch Einsetzen dieses Coefficientensystems in $P(x, y, \xi)$ ergiebt sich dann eine zu (ξ, η) gehörige Partialbruchform zweiter Ordnung $\bar{P}(x, y, \xi, \eta)_2$. So fortfahrend gelangt man zu einer Reihe von Partialbruchformen

$$\bar{P}(x, y, \xi, \eta)_1, \ \bar{P}(x, y, \xi, \eta)_2, \ldots, \bar{P}(x, y, \xi, \eta)_\lambda.$$

Fügt man diese den bereits ermittelten Partialbruchformen nullter Ordnung $x^\alpha y^\beta$, $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_1)_0$, $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_2)_0, \ldots$ hinzu, so erhält man ein vollständiges System linear von einander unabhängiger specieller Partialbruchformen, durch die man jede zu (ξ, η) gehörige Partialbruchform λ. Ordnung als lineare homogene Function mit constanten Coefficienten darstellen kann.

Dass die Anzahl r der Formen $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_1)_0$, $\bar{P}_{\alpha,\beta}(x, y, \xi_2)_0, \ldots$ gleich dem Grade der Quadratwurzel aus dem ausserwesentlichen Theiler der Discriminante von y ist, lässt sich leicht dadurch zeigen, dass man durch geeignete lineare Verbindungen dieser Formen mit passend gewählten Coefficienten ein Kronecker'sches Fundamentalsystem herstellt.

Schnepfenthal, Juli 1895.

Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen.

Von

Alfred Pringsheim in München.

Die *elementare* d. h. lediglich auf die Lehre von den *Potenzreihen*, nicht aber auf die Anwendung der *Infinitesimalrechnung*, insbesondere der *complexen Integration* gegründete *Theorie der analytischen Functionen*, wie sie vornehmlich durch die Vorlesungen und Arbeiten des Herrn Weierstrass und die Publicationen seiner Schüler ausgebildet und verbreitet worden ist, scheint mir bei allen ihren ausserordentlichen Vorzügen in mancher Beziehung noch der wünschenswerthen Kürze und Einfachheit zu ermangeln und zwar wesentlich aus dem Grunde, weil der sogenannte *Laurent'sche Satz* *), bezw. dessen Ueber-

---

*) Darunter ist der von Laurent für „*monogene*" Functionen (im Cauchy'schen Sinne) bewiesene Satz zu verstehen, dass eine in einem Ringgebiete $R_0 < |x| < R$ *eindeutige* und *monogene* bezw. *analytische* Function sich daselbst durch eine convergirende Potenzreihe von der Form $\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu x^\mu$ darstellen lässt.

In Kronecker's Vorlesungen über Integrale findet sich p. 177 die Bemerkung: „Diese Entwickelung wird manchmal als der Laurent'sche Satz bezeichnet; aber da sie eine unmittelbare Folge des Cauchy'schen Integrals ist, so ist es unnütz, einen besonderen Urheber zu nennen. Die dabei benützte Entwickelung von $\frac{1}{z-\zeta}$ in eine geometrische Reihe kann man als besondere Erfindung nicht betrachten." Letzteres ist zweifellos richtig: nichts desto weniger steht doch die Thatsache fest, dass weder Cauchy, noch irgend ein Anderer vor Laurent, den *entscheidenden* Schritt gethan hat, bei einem über die Peripherien *zweier* concentrischer Kreise zu erstreckenden Integrale von der Form $\int \frac{f(z)\cdot dz}{z-\zeta}$ die Entwickelung nach Potenzen von $\frac{\zeta}{z}$ und $\frac{z}{\zeta}$ vorzunehmen. Und da Cauchy selbst in seinem Akademiebericht über die betreffende Laurent'sche Arbeit (C. R. 1843, T. 17, p. 939) ausdrücklich sagt: „L'extension donnée par M. Laurent au theorème sur la convergence des séries ou *plutôt le nouveau théorème* qu'il a

tragung auf *„analytische“* Functionen im Sinne des Herrn Weierstrass, innerhalb jener Theorie noch keineswegs eine ausreichend einfache Ableitung und hiermit den ihm eigentlich zukommenden Platz erhalten hat.

Um die grundlegende Bedeutung jenes Satzes gerade für die *elementare**) Functionentheorie mit einigen Worten zu charakterisiren, sei darauf hingewiesen, dass dieselbe *ohne* ihn thatsächlich nicht im Stande ist, über den analytischen Charakter einer Function $f(x)$ für irgend eine Stelle $x = a$ etwas auszusagen, falls das Verhalten von $f(x)$ dort nicht *a priori* feststeht, mag im übrigen auch $f(x)$ für *jede* von a verschiedene Stelle x_0 als *regulär***) erkannt sein.

établi sur ce sujet, nous paraît digne de remarque“ — so wird man wohl den fraglichen Satz auch fernerhin den Laurent'schen nennen, zumal es bei einem so fundamentalen und darum häufig zu citirenden Satze ganz besonders wünschenswerth erscheint, denselben mit einem bestimmten Namen kurz und unzweideutig bezeichnen zu können.

*) Die *nicht-elementare* (Cauchy'sche) Functionentheorie besitzt für Zwecke der gedachten Art die Darstellung einer Function durch ein *Randintegral*, und der Laurent'sche Satz erscheint hierbei schliesslich als ein besonderer Fall dieser allgemeinen Darstellung.

**) Ich nenne eine eindeutige Function $f(x)$ für $x = a$ *regulär*, wenn sie für eine gewisse Umgebung von a d. h. für alle x, welche einer Bedingung von der Form $|x - a| < \varrho$ (wo $\varrho > 0$) genügen, durch eine $\mathfrak{P}(x|a)$, d. h. eine convergirende Potenzreihe von der Form $\sum_0^\infty {}_\mu a_\mu \cdot (x-a)^\mu$ darstellbar ist. Jede Stelle a', für welche $f(x)$ sich *nicht* regulär verhält, heisst eine *singuläre*.

Es ist dies diejenige Definition, welche Herr Weierstrass in der *ersten* Ausgabe seiner Abhandlung: *„Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen“* (Abh. der Berl. Akademie von 1876, p. 12) aufgestellt hat. In der *zweiten* Ausgabe der nämlichen Abhandlung (in den 1886 veröffentlichten „Abhandlungen aus der Functionenlehre“) findet sich hingegen statt der obigen Definition (a. a. O. p. 1 desgl. Ges. Werke, Bd. II, p. 77) die folgende: „Ich will von einer eindeutigen analytischen Function $f(x)$ der complexen Veränderlichen x sagen, sie verhalte sich *regulär* in der Umgebung einer bestimmten Stelle $(x = a)$, wenn sie innerhalb eines gewissen Bezirks, dessen Mittelpunkt a ist, überall einen endlichen und mit x stetig sich ändernden Werth hat. *Nach einem bekannten Satze existirt dann eine Potenzreihe* $\mathfrak{P}(x|a)$, *welche innerhalb des genannten Bezirks die Function darstellt.*“ Durch die letzte Aussage wird nun diese Definition mit der zuerst angeführten freilich völlig gleichwerthig. Allein ich muss gestehen, dass jener „bekannte“ Satz, auf dem die fragliche Aussage beruht, mir leider *keineswegs* bekannt ist, sofern nicht etwa der Laurent'sche Satz gemeint sein sollte, welcher in der That das verlangte leisten würde. Da indessen diese Annahme mit ziemlicher Sicherheit ausgeschlossen erscheint (näheres hierüber s. im Text etwas weiter unten), so möchte ich vermuthen, dass sich jenes Citat auf einen Satz bezieht, der von Herrn Weierstrass zwar in seinen Vorlesungen mitgetheilt, aber bisher noch nicht publicirt worden ist. (Eine nicht auf dem Cauchy'schen Randintegral oder den Laurent'schen Satze, aber immerhin auf der complexen Integration und dem

Wenn z. B. $f(x)$ in beliebiger Nähe von $x = \alpha$ *eindeutig*, *regulär* ist und durchaus *unter einer endlichen Grenze* bleibt, ja sogar wenn die daselbst zur Darstellung von $f(x)$ dienenden Potenzreihen $\mathfrak{P}(x-x_0)$ noch für $x=\alpha$ sämmtlich *absolut convergiren*, sodass $f(x)$ für $x=\alpha$ noch als *eindeutige* und *stetige* Function von x definirt ist, so scheint mir die elementare Functionentheorie *ohne* den Laurent'schen Satz keinerlei Hülfsmittel zu besitzen, um das reguläre Verhalten von $f(x)$ für $x = \alpha$ d. h. die Existenz einer für eine gewisse Umgebung von α convergirenden und $f(x)$ darstellenden Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|\alpha)$ zu erschliessen*). Bleibt dagegen $f(x)$ in der Nähe von $x = \alpha$ *nicht* unter einer endlichen Grenze, in welchem Falle dann die Stelle $x = \alpha$ jedenfalls eine *singuläre* sein muss, so lässt sich wiederum über die mögliche Beschaffenheit einer solchen singulären Stelle ohne den Laurent'schen Satz nichts genaueres aussagen: und nur aus dem Umstande, dass bei den bisherigen Darstellungen der elementaren Functionentheorie der Laurent'sche Satz, wie bereits bemerkt, keineswegs an der ihm zukommenden Stelle erscheint, mag es zu erklären sein, dass man da über die Natur der singulären Stellen theils völlig unbewiesene, theils geradezu unrichtige Angaben findet.

Herr Weierstrass hat in seiner fundamentalen Abhandlung: „*Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*“ und, soweit ich feststellen konnte, auch in seinen Vorlesungen den Laurent'schen Satz weder explicite bewiesen noch direct angewendet**). Dagegen hat er in der genannten Abhandlung ein anderes, daselbst als „Hülfssatz“ bezeichnetes Theorem von wesentlich verwickelterem Charakter abgeleitet***), welche für den dort vorliegenden Zweck dasselbe leistet, was man einfacher mit Hülfe des Laurent'schen Satzes erreichen kann. In der That lässt dieser letztere sich auch geradezu aus jenem Hülfssatze des Herrn Weierstrass ableiten, wie Herr Mittag-

Cauchy'schen Satze von der Entwickelbarkeit einer „synektischen“ Function beruhende Methode, um die Richtigkeit der fraglichen Aussage zu erschliessen, hat Herr Hölder gegeben: Math. Ann. Bd. 20, p. 138).

*) D. h. natürlich eventuell abgesehen von dem in der vorhergehenden Fussnote erwähnten, mir unbekannten Satze des Herrn Weierstrass.

**) In dem kürzlich erschienenen Bd. I der Ges. Werke des Herrn Weierstrass findet sich S. 51—66 eine, wie es scheint, bisher ungedruckte Mittheilung aus dem Jahre 1841 (also noch 2 Jahre vor der Laurent'schen Publication), in welcher der fragliche Satz zwar ohne Benützung der allgemeinen Cauchy'schen Integralsätze, aber immerhin mit Hülfe der complexen Integration bewiesen wird. Das Integral $\int f(x)dx$, erstreckt über einen Kreis mit dem Radius r, wird dabei durch die Substitution $x = r\cdot\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ in ein reelles Integral nach λ zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ transformirt.

***) a. a. O. p. 37. — Auch: Abh. aus der Functionenlehre p. 28, desg. Ges. W. Bd. II, p. 103.

Leffler in einem Aufsatze mit dem Titel: *Démonstration nouvelle du Théorème de Laurent*" gezeigt hat*). Obschon nun der auf diesem Wege gewonnene Beweis in *dem* Sinne *elementar* ist, dass dabei die Cauchy'schen Integraltheoreme nicht benützt werden, so ist er doch in Wahrheit von recht verwickelter Natur und bereitet dem Auffassungsvermögen des Lesers so erheblich grössere Schwierigkeiten, als der gewöhnliche Cauchy-Laurent'sche Beweis, dass man wohl ohne Ungerechtigkeit sagen darf, es erscheine hier die Consequenz der Methode auf Kosten der Einfachheit allzu theuer erkauft.

Das eigentliche Princip dieses Beweises, nämlich die Abbildung einer Ringfläche auf ein einfach zusammenhängendes Flächenstück, bildet auch die Grundlage eines um dieselbe Zeit veröffentlichten Beweises von L. Scheeffer**). Erscheint dieser auch von dem erwähnten Weierstrass'schen Hülfssatze vollständig losgelöst und auf diese Weise gegen den Mittag-Leffler'schen Beweis merklich vereinfacht, so erfordert derselbe eine Reihe von Vorkenntnissen, namentlich aus der Lehre von den *mehrdeutigen* Functionen, welche es von vornherein unmöglich machen, den fraglichen Satz als Fundamentalsatz für die Theorie der *eindeutigen* Functionen an der ihm zukommenden Stelle erscheinen zu lassen. Aber auch abgesehen hiervon beruht jener Beweis, der in der Scheeffer'schen Darstellung ziemlich kurz und einfach aussieht, noch auf der Voraussetzung verschiedener, keineswegs besonders einfach zu beweisender Hülfssätze***), sodass derselbe bei vollständiger und strenger Durchführung sich in Wahrheit noch recht umständlich gestaltet.

Nach alledem erschien es mir dringend wünschenswerth, die fragliche Potenzreihenentwickelung auf einem kürzeren und zugleich möglichst

*) Acta mathematica, T. IV, p. 80.

**) Acta mathematica, T. IV, p. 375.

***) Dahin gehört insbesondere der Satz, dass die Gültigkeit der Beziehung:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu \cdot x^\mu$$

für ein *beschränktes* Ringgebiet $(r_0 r)$ diejenige für jedes grössere $(R_0 R)$ (wo: $R_0 < r_0 < r < R$) nach sich zieht, sobald $f(x)$ daselbst sich regulär und eindeutig verhält.

Dieses Resultat basirt aber wiederum auf einem weiteren Hülfssatze des Inhalts, dass die *wahren* Convergenzradien einer zunächst für $r_0 < |x| < r$ als convergent erkannten Reihe $r_0 + \varrho_0$ bez. $r + \varrho$ sind, falls ϱ_0 bezw. ϱ die unteren Grenzen für die Convergenzradien der aus $f(x)$ für $r_0 < |x_0| < r$ ableitbaren Reihen von der Form

$$\sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu$$

bedeuten.

elementaren Wege begründen zu können. Dieses Ziel glaube ich erreicht zu haben durch weitere Ausbildung einer Methode, deren vollständige Grundlagen schon Cauchy in einem Aufsatze mit dem Titel: „*Considérations nouvelles sur la théorie des suites et sur les lois de leur convergence*“ (1840)*) entwickelt hat, und deren Kern in der Einführung gewisser *Mittelwerthe* einer Function $f(x)$ an Stelle der sonst benützten *Integrale* besteht. Allein abgesehen davon, dass die dort gegebene Darstellung sich ausschliesslich auf die Entwickelung einer Function nach *positiven* Potenzen (also auf die Taylor'sche bezw. Mac Laurin'sche Reihe) bezieht, so enthält dieselbe auch gewisse Lücken principieller Natur**) und basirt ausserdem auf der Darstellung der n^{ten} Einheitswurzeln in der transcendenten Form $e^{\frac{2\varkappa\pi i}{n}}$, deren Vermeidung mir bei dem elementaren Charakter des fraglichen Satzes gerade principiell wichtig erschien.

Was nun zunächst den Charakter der hierbei einzuführenden *Mittelwerthe* betrifft, so erscheinen dieselben als Grenzwerthe von der Form: $\lim_{n=\infty}\left\{\frac{1}{n}\cdot\sum_0^{n-1}{}_{\nu} f(x_{n,\nu})\right\}$, wo die $x_{n,\nu}$ für jedes n und ν *arithmetisch wohl definirte Zahlen* von der Beschaffenheit bedeuten, dass $n\,.\,|x_{n,\nu+1}-x_{n,\nu}|$ bei jedem bestimmten Werthe von n einen für alle möglichen ν *constanten*, mit unbegrenzt wachsendem n einer festen Grenze zustrebenden Werth besitzt. Es liegt auf der Hand, dass man derartige Mittelwerthe, wenn man sie in die Form setzt:

$$\lim_{n=\infty}\sum_0^{n-1}{}_{\nu}\left\{f(x_{n,\nu})\cdot\frac{1}{n}\right\},$$

stets als Specialfälle bestimmter Integrale ansehen kann. Immerhin

---

*) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, T. I, p. 269.

**) Bei Serret, *Cours de Calcul différentiel et intégral* T. I, p. 570 (in der deutschen Ausgabe von Harnack: T. I, p. 528) findet sich gleichfalls eine Ableitung der Mac Laurin'schen Reihenentwickelung mit Hülfe von *Mittelwerthen*. Die dort gegebene Darstellung ist im wesentlichen eine Reproduction der erwähnten Cauchy'schen, bei welcher die fraglichen Lücken vermieden sind: allein der betreffende Beweis hat hierbei vollständig seinen *elementaren* Charakter verloren. Die dabei benützten „*Mittelwerthe*“ sind in Wahrheit nur umständlicher geschriebene *bestimmte Integrale* mit *veränderlichen Grenzen*, die ausserdem noch von einem *veränderlichen Parameter* abhängen. Nach beiden Grössen wird *differenzirt*, wobei der Satz von der *Differentiation eines bestimmten Integrales nach der oberen Grenze*, sodann auch derjenige von der *Vertauschbarkeit der Differentiationsordnung* in Anwendung kommt: kurzum dieser Beweis gehört vollständig der Infinitesimalrechnung an und erscheint in der That weit einfacher und durchsichtiger, wenn man für die benützten „Mittelwerthe“ die üblichen Integralbezeichnungen einführt.

hat ihre ursprüngliche Definition mit dem *Infinitesimalbegriffe* in Wahrheit absolut *nichts* zu thun, da es sich bei der Bildung von

$$\lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1}{n} \cdot \sum_{0}^{n-1} {}^{\nu} f(x_{n,\nu}) \right\}$$

keineswegs, wie bei derjenigen eines bestimmten Integrales, um eine Summe schliesslich „*unendlich klein*" werdender, vielmehr um das arithmetische Mittel *wohl definirter, stets endlich bleibender* Grössen handelt. Hiernach scheinen mir aber derartige Mittelwerthe genau in demselben Sinne „*elementar*", wie jeder gewöhnliche, von einer positiv wachsenden ganzen Zahl abhängige Grenzwerth z. B. die sogenannte Summe einer unendlichen Reihe (die man ja schliesslich auch stets als speciellen Fall eines bestimmten Integrales auffassen kann), sodass gegen die Einführung solcher Mittelwerthe in die *elementare* Functionentheorie selbst vom Standpunkte einer rigorosen Methodik begründete Einwendungen sich schwerlich erheben lassen dürften.

Um der gesammten Darstellung einen möglichst elementaren Charakter zu wahren, habe ich nicht nur, wie schon oben bemerkt, die *transcendente* Darstellungsform der Einheitswurzeln, sondern auch deren *allgemeinen algebraischen Begriff* vollständig vermieden, insbesondere auch den Satz von der Wurzel-Existenz einer *beliebigen algebraischen* oder selbst auch nur einer *binomischen Gleichung* nicht benützt: hieraus ergiebt sich, abgesehen davon, dass es mir principiell wichtig erscheint, die Theorie der „*eindeutigen*" Functionen mit einem möglichst geringen Aufwande von *algebraischen* Hülfsmitteln begründen zu können, der Vortheil, dass die auf diesem Wege gewonnenen Ergebnisse u. a. auch dazu dienen können, den Fundamentalsatz der Algebra völlig streng und ohne jeden *circulus vitiosus* in der einfachsten Weise zu begründen.

Im übrigen erstrecken sich die Vortheile, welche der elementaren Functionentheorie aus der Einführung der gedachten Mittelwerthe erwachsen, nicht bloss auf die Ableitung der Laurent'schen d. h. nach positiven und negativen Potenzen fortschreitenden Reihenentwickelung und der unmittelbar darauf basirenden Kenntnisse über die Natur der singulären Stellen, sondern in nicht geringerem Maasse auf die Theorie der Taylor'schen bez. Mac Laurin'schen Reihe (welche hier, gerade wie bei Cauchy-Laurent, lediglich als ein specieller Fall der Entwickelung nach positiven und negativen Potenzen erscheint, insbesondere auf die Feststellung ihres *Geltungs- und Convergenzbereiches*. Die beiden hierzu nothwendigen und bei der bisherigen Darstellung besondere Beweise erfordernden Sätze, nämlich: 1) dass der wahre Convergenzbereich einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ mindestens *eine singuläre*

Stelle auf der Begrenzung enthalten muss*); 2) dass der Convergenz- und Geltungsbezirk einer Beziehung von der Form $f(x) = \mathfrak{P}(x|x_0)$ sich andererseits auch wirklich bis zu der an x_0 am nächsten gelegenen singulären Stelle von $f(x)$ erstreckt**) — diese beiden Sätze ergeben sich hier ganz ohne weiteres aus dem Beweise des Laurent'schen Satzes, da die betreffende Methode ausser der *Form* der fraglichen Entwickelung auch sofort die *Grenzen ihrer Gültigkeit* angiebt. Andererseits gestattet schon die blosse Darstellung der Coefficienten einer *gegebenen* Potenzreihe durch Mittelwerthe der gedachten Art, verschiedene wichtige Eigenschaften der Potenzreihen in etwas einfacherer und übersichtlicherer Weise abzuleiten als mit Hülfe der bisherigen Methoden.

Nachdem ich nun den angedeuteten Beweis des Laurent'schen Satzes kürzlich bereits an anderer Stelle publicirt habe***), schien es mir zweckmässig, alle jene an die Mittelwerthdarstellung der Reihencoefficienten zwanglos anzuschliessenden Sätze über Potenzreihen einmal im Zusammenhange darzustellen und bei dieser Gelegenheit auch die Grundlagen der fraglichen Mittelwerthstheorie in etwas ausführlicher Weise zu entwickeln, als in der eben genannten ersten Mittheilung. Letzteres geschieht insbesondere in den §§ 1 und 2 des folgenden Aufsatzes, während § 3 zunächst die Darstellung der Reihencoefficienten durch Mittelwerthe und sodann eine Anzahl wichtiger Folgerungen bringt, u. a. den Cauchy'schen Satz über die obere Grenze der Reihencoefficienten, den Identitätssatz für Potenzreihen, deren Summen für unendlich viele Stellen eines endlichen Bereiches übereinstimmen, den Weierstrass'schen Doppelreihensatz. Die §§ 4 und 5 enthalten den Beweis des Laurent'schen Satzes mit seinen Hülfssätzen, während § 6 die singulären Stellen eindeutiger Functionen behandelt.

---

§ 1.

Ueber die Wurzeln der Gleichung $x^{2^n} = 1$.

Ist die Gleichung:

$$x^2 = \beta + \gamma i \tag{1}$$

vorgelegt, so ergiebt die Substitution $x = \xi + \eta i$ zur Bestimmung von ξ und η die beiden Gleichungen:

$$\xi^2 - \eta^2 = \beta,$$
$$2\xi\eta = \gamma$$

---

*) Stolz a. a. O. p. 183.

**) Desgl. p. 186.

***) „Ueber die Entwickelung eindeutiger analytischer Functionen in Potenzreihen" — Sitz.-Ber. der Bayr. Akad. Bd. XXV, p. 75.

und man erhält hieraus zunächst für ξ die beiden offenbar stets *reellen* Werthe:

$$\xi_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\tfrac{1}{2}\beta}, \quad \xi_2 = -\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\tfrac{1}{2}\beta},$$

wobei sämmtliche Quadratwurzeln im *positiven* Sinne zu verstehen sind. Da ferner nach der zweiten der obigen Bestimmungsgleichungen $\xi.\eta$ das Vorzeichen von γ haben muss, so ergeben sich als beziehungsweise zugehörige, gleichfalls stets *reelle* Werthe von η die beiden folgenden:

$$\eta_1 = \frac{\gamma}{|\gamma|}\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\tfrac{1}{2}\beta}, \quad \eta_2 = -\frac{\gamma}{|\gamma|}\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\tfrac{1}{2}\beta}.$$

Ist nun insbesondere $\gamma > 0$, so wird, ohne dass β irgend welcher Beschränkung unterliegt, *eine* Lösung der Gl. (1) die Form haben:

(2a) $$\sqrt{\beta+\gamma i} = \xi_1 + \eta_1 i$$

wo ξ_1, η_1 *beide positiv* sind, nämlich:

(2b) $$\xi_1 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}+\tfrac{1}{2}\beta}, \quad \xi_2 = +\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\beta^2+\gamma^2}-\tfrac{1}{2}\beta}$$

und dieser Wurzel-Werth soll der Kürze halber im folgenden schlechthin als der *positive* bezeichnet und durch das Symbol: $[\sqrt{\beta+\gamma i}]$ dargestellt werden.

Betrachtet man jetzt die Gleichung:

(3) $$x^N = 1,$$

wo:

$$N = 2^n,$$

so folgt zunächst wegen:

$$x^N = (x^{2^{n-1}})^2,$$

dass $x^{2^{n-1}}$ nur die beiden Werthe haben kann:

$$x^{2^{n-1}} = \pm\sqrt{1} = \pm 1;$$

sodann analog:

$$x^{2^{n-2}} = \pm\sqrt{\pm 1},$$

und so weiter fort schliessend findet man, dass alle überhaupt möglichen Lösungen von Gl. (3) in der Form enthalten sein müssen:

(4) $$x = \pm\underset{n-1}{\sqrt{\pm\underset{n-2}{\sqrt{\pm\cdots\pm\underset{1}{\sqrt{\pm 1}}}}}},$$

(wobei die Indices unter den Wurzelzeichen lediglich deren Anzahl charakterisiren sollen). Man erhält auf diese Weise im ganzen offenbar genau $2^n = N$ Werthe für x, woraus zunächst nur so viel folgt, dass jene Gleichung *höchstens N verschiedene* Wurzeln haben kann. Um zu zeigen, dass die Anzahl der verschiedenen Wurzeln auch wirklich gleich N ist, verfahre ich folgendermassen. Ich setze zunächst:

(5) $$\alpha_1 = \sqrt[2]{1} = -1,$$

(6) $$\alpha_2 = \sqrt[2^2]{1} = \sqrt{\alpha_1} = +i$$

und definire sodann α_3 und allgemein $\alpha_\varkappa$ als die im oben bezeichneten Sinne *positive* Quadratwurzel aus α_2 bezw. α_{k-1}, sodass also:

(7) $$\alpha_3 = \sqrt[2^3]{1} = [\sqrt{\alpha_2}] = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

$$\alpha_4 = \sqrt[2^4]{1} = [\sqrt{\alpha_3}] = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}}}.$$

Setzt man allgemein:

(8) $$\alpha_k = \sqrt[2^k]{1} = [\sqrt{\alpha_{k-1}}] = \beta_k + \gamma_k i$$

und beachtet, dass:

$$\alpha_{k-1}^{2^{k-1}} = 1, \quad \left|\alpha_k^{2^{k-1}}\right| = |\alpha_k|^{2^{k-1}} = 1$$

und daher auch:

(9) $$|\alpha_{k-1}| = \sqrt{\beta_{k-1}^2 + \gamma_{k-1}^2} = 1,$$

so folgt aus:

$$\beta_k + \gamma_k i = [\sqrt{\beta_{k-1} + \gamma_{k-1} i}]$$

dass:

(10) $$\beta_k = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\beta_{k-1}}, \quad \gamma_k = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta_{k-1}},$$

d. h. die β_k, γ_k sind durchweg < 1 und zwar nehmen die β_k mit wachsendem k beständig *zu*, die γ_k beständig *ab*.

Für $k = n$ findet man insbesondere:

(11) $$\beta_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\beta_{n-1}}, \quad \gamma_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\beta_{n-1}}$$

wobei:

$$\beta_n + \gamma_n i = \alpha_n = \sqrt[2^n]{1}.$$

Drückt man in (11) β_{n-1} in analoger Weise durch β_{n-2} aus, so wird:

$$\beta_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \beta_{n-2}}}, \qquad \gamma_n = \sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{1}{2} + \beta_{n-2}}}$$

und durch successive Anwendung der Recursionsformel (10):

$$\beta_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdot\ \cdot + \tfrac{1}{2}\underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\beta_3}}}}}}$$

also mit Berücksichtigung von Gl. (7) schliesslich:

$$(12)\quad \begin{cases} \beta_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{n-2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}}}}} \\[2ex] \gamma_n = \underset{1}{\sqrt{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \underset{2}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \cdots + \tfrac{1}{2} \underset{n-3}{\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \underset{n-2}{\sqrt{\tfrac{1}{2}}}}}}}}} \end{cases} \qquad (\beta_n + \gamma_n i)^N = 1.$$

Man erkennt zunächst aus der Art der Herleitung, dass es keine *complexe* Wurzel der Gleichung $x^N = 1$ mit *numerisch grösserem, reellen* Theile geben kann, als β_n. Denn da allgemein für:

$$\alpha = \beta + \gamma i$$

wo β, γ beliebig *positiv oder negativ* und $\beta^2 + \gamma^2 = 1$ die *beiden überhaupt möglichen* Werthe von $\sqrt{\alpha}$ in der Form enthalten sind:

$$\sqrt{\alpha} = \varepsilon_1 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\beta} + \varepsilon_2 \cdot i \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\beta},$$

wo $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$ in der oben angegebenen Weise zu bestimmen sind, so folgt, dass der *reelle* Theil von $\sqrt{\alpha}$ *absolut genommen* bei *positiven* Werthen von β stets *grösser* ausfällt, als bei den entsprechenden *negativen*, und wiederum noch um so *grösser*, je *grösser* β selbst ist. Da nun zunächst α_3 unter allen möglichen Werthen von $\sqrt[2^3]{1}$ einen *positiven reellen* Theil besitzt, der von keinem anderen (selbstverständlich immer mit Ausschluss des Wurzelwerthes $+1$) übertroffen wird, so gilt das analoge für α_4 und schliesslich für α_n.

Es lässt sich nun zunächst zeigen, dass die N Grössen:

$$\alpha_n^0,\ \alpha_n^1,\ \alpha_n^2,\ \ldots\ \alpha_n^{N-1},$$

welche offenbar wegen: $(\alpha_n^{\pm\nu})^N = (\alpha_n^N)^{\pm\nu} = 1$ durchweg der Gleichung $x^N = 1$ genügen, wirklich N *verschiedene* Wurzeln dieser Gleichung und somit *alle möglichen* darstellen.

Wäre nämlich für $0 \leq \nu < \nu' \leq N - 1$:

$$\alpha_n^{\nu'} = \alpha_n^{\nu},$$

so hätte man:

$$\alpha_n^{\nu' - \nu} = 1,$$

wo: $0 < \nu' - \nu \leq N - 1$, d. h. es gäbe mindestens einen *von Null verschiedenen* und *unterhalb* N liegenden Exponenten, welcher zu α_n gesetzt den Werth 1 liefert. Angenommen nun es sei μ der *kleinste* (von Null verschiedene) solche Exponent. Dann erkennt man zunächst,

dass μ keine Zahl von der Form 2^k sein kann ($k = 0, 1, 2, \ldots$), da ja offenbar $\alpha_n^{2^k} = \alpha_{n-k}$, also stets von 1 verschieden ist. Da hiernach μ *kein Theiler* von N sein kann, so kann man setzen:

$$N = p \cdot \mu + \mu',$$

wo p eine positive ganze Zahl und μ' der Reihe $1, 2, \ldots (\mu - 1)$ angehört. Hiernach wäre aber:

$$\alpha_n^{p \cdot \mu + \mu'} = \alpha_n^{\mu'} = 1,$$

d. h. es gäbe einen von Null verschiedenen Exponenten $\mu' < \mu$, was der Voraussetzung widerspricht. Da es hiernach überhaupt keinen von Null verschiedenen positiven Exponenten $\mu < N$ geben kann, sodass $\alpha_n^\mu = 1$, so ergiebt sich, dass die Grössen α_n^ν für $\nu = 0, 1. 2, \ldots (N-1)$ sämmtlich von einander verschieden sein müssen.

Es erscheint für das folgende wünschenswerth, über die Anordnung der den Grössen:

$$\alpha_n^0, \; \alpha_n^1, \; \alpha_n^2, \ldots \alpha_n^{N-1}$$

(bei der üblichen Darstellung complexer Zahlen) entsprechenden Punkte sich etwas genauer zu orientiren. Da für jedes ν:

$$|\alpha_n^\nu| = 1 \qquad |\alpha_n^\nu - \alpha_n^{\nu+1}| = |\alpha_n^\nu| \, |1 - \alpha_n| = |1 - \alpha_n|$$

so folgt zunächst, dass jenen complexen Grössen ebensoviele aequidistante Punkte auf dem Einheitskreise mit dem gegenseitigen Abstande $|1 - \alpha_n|$ entsprechen. Beachtet man, dass $\alpha_n^0 = 1$, $\alpha_n^1 = \beta_n + \gamma_n i$, wo β_n und γ_n *beide positiv*, und dass *niemals* $\alpha_n^{\nu+1} = \alpha_n^{\nu-1}$ werden kann, so folgt, dass die Punkte $\alpha_n^0, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots$ in der Richtung der wachenden Winkel und nach der Reihenfolge der Exponenten auf einander folgen. Und zwar ist leicht zu sehen, dass bei Verfolgung der Punkte $\alpha_n^\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots N-1)$ in dem durch die Reihenfolge der Exponenten angegebenen Sinne die Peripherie des Einheitskreises gerade *einmal* durchlaufen wird, derart dass der *letzte* Punkt: α_n^{N-1} von dem *ersten:* α_n^0 wiederum den Abstand $|1 - \alpha_n|$ besitzt. Würde nämlich die Kreisperipherie hierbei mehr als *einmal* durchlaufen, so müsste *entweder* mindestens *ein* Punkt $\alpha_n^\nu (1 \leq \nu \leq N - 1)$ mit dem Ausgangspunkte $\alpha_n^0 = 1$ *zusammenfallen*, was nach dem oben gesagten unmöglich ist, *oder* es müsste ein solcher Punkt α_n^ν *zwischen* α_n^0 und α_n^1 liegen: in diesem Falle würde aber dieser Werth α_n^ν eine Wurzel der Gleichung $x^N = 1$ darstellen, deren *reeller* Theil *grösser* wäre als derjenige von α_n, was ebenfalls ausgeschlossen ist. Da ausserdem:

$$|\alpha_n^{N-1} - \alpha_n^0| = |\alpha_n^{N-1} - \alpha_\nu^N| = |\alpha_n^{N-1}| \, |1 - \alpha_n| = |1 - \alpha_n|$$

so erkennt man die Richtigkeit der oben ausgesprochenen Behauptung.

Wie bereits bemerkt, nehmen die β_n mit wachsendem n beständig *zu*, die γ_n beständig *ab*. Um diese Grössen in leichter zu berechnende Grenzen einzuschliessen, hat man zunächst, wenn man in (2) die innerste $\sqrt{\frac{1}{2}}$ durch 1 ersetzt, für jedes noch so grosse endliche n:

$$\beta_n < 1, \quad \gamma_n > 0. \tag{13}$$

Andererseits, wenn man bemerkt, dass für jeden ächten Bruch ϑ: $\vartheta < \sqrt{\vartheta}$ und sodann:

$$\tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2} = 1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-2},$$

so folgt:

$$\begin{cases} \beta_n > \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}} > 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, \\ \gamma_n = \sqrt{1 - \beta_n^2} \qquad < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \end{cases} \tag{14}$$

und schliesslich:

$$|1 - \alpha_n| \leq |1 - \beta_n| + |\gamma_n| < \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}. \tag{15}$$

Als Hauptresultat der in diesem Paragraphen angestellten Betrachtungen ergiebt sich: Es ist durch einfache arithmetische Operationen, nämlich durch eine Reihe successiver Quadratwurzelausziehungen für jeden positiven ganzzahligen Werth n eine complexe Zahl α_n von der Beschaffenheit definirt, dass den Zahlen $\alpha_n^0, \alpha_n^1, \alpha_n^2, \ldots \alpha_n^{N-1}$ N aequidistante, mit $\alpha_n^0 = 1$ anfangende und bei Hinzufügung von α_n^N auch mit 1 aufhörende Punkte auf dem Einheitskreise entsprechen, deren constanter Abstand $|1 - \alpha_n|$ der Grenzbedingung (15) genügt. —

§ 2.

Definition und allgemeine Eigenschaften eines grossen Mittelwerthes.

Es sei $f(x)$ eindeutig definirt für alle Werthe x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, und es werde gesetzt:

$$\mathfrak{M}_n\big(f(r)\big) = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} {}^{\nu} f(\alpha_n^\nu . r), \tag{1}$$

sodass also $\mathfrak{M}_n\big(f(r)\big)$ das arithmetische Mittel aus den N Werthen bedeutet, welche $f(x)$ an den n Stellen $x = \alpha_n^\nu . r$ $\big(\nu = 0, 1, 2, \ldots (N-1)\big)$ annimmt.

Ist dann $f(x)$ längs des Kreises mit dem Radius r *stetig*, so lässt

sich zeigen, dass $\mathfrak{M}_n\bigl(f(r)\bigr)$ für $n=\infty$ einen bestimmten Grenzwerth besitzt. Da nämlich:

$$\alpha_{n+p} = \left[\sqrt[2^p]{\alpha_n}\right],$$

also:

$$\alpha_n = \alpha_{n+p}^{2^p},$$

so kann man setzen:

$$\mathfrak{M}_n\bigl(f(r)\bigr) = \frac{1}{2^{n+p}} \cdot \sum_0^{2^n-1} 2^p \cdot f(\alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p}\cdot r)$$

und da andererseits:

$$\mathfrak{M}_{n+p}\bigl(f(r)\bigr) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_0^{2^{n+p}-1}{}_{\nu}\, f(\alpha_{n+p}^{\nu}\cdot r) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_0^{2^n-1}{}_{\nu} \sum_0^{2^p-1}{}_{\mu}\, f(\alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p+\mu}.r),$$

so ergiebt sich:

$$(2)\quad \mathfrak{M}_{n+p}\bigl(f(r)\bigr) - \mathfrak{M}_n\bigl(f(r)\bigr) = \frac{1}{2^{n+p}} \sum_0^{2^n-1}{}_{\nu} \sum_0^{2^p-1}{}_{\mu} \left\{ f(\alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p+\mu}.r) - f(\alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p}.r) \right\}.$$

Nun kann man in Folge der vorausgesetzten Stetigkeit von $f(x)$ für $|x| = r$ nach Vorgabe einer beliebig kleinen positiven Grösse ε eine andere positive Grösse δ so fixiren, dass:

$$(3)\qquad |f(\alpha r) - f(\alpha' r)| < \varepsilon,$$

wenn:

$$r.|\alpha - \alpha'| < \delta$$

(wobei α, α' zwei complexe Grössen mit dem absoluten Betrage 1 bedeuten). Nimmt man also m von vorn herein so gross an, dass:

$$(4)\qquad r.|1-\alpha_n| < \delta$$

wird — eine Bedingung, die nach Ungl. (15) des § 1 offenbar befriedigt wird, falls:

$$(5)\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}} \cdot r < \varepsilon,$$

d. h.

$$2^n > \frac{8r^2}{\varepsilon^2},$$

so wird *a fortiori* für $\mu = 0, 1, \ldots 2^{p-1}$:

$$(6)\qquad r\cdot\left|\alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p+\mu} - \alpha_{n+p}^{\nu\cdot 2^p}\right| < r.|1-\alpha_n| < \delta$$

sodass aus Gl. (2) mit Berücksichtigung von Ungl. (3) folgt:

$$(7)\qquad \left|\mathfrak{M}_{n+p}\bigl(f(r)\bigr) - \mathfrak{M}_n\bigl(f(r)\bigr)\right| < \varepsilon,$$

d. h. $\mathfrak{M}_n\big(f(r)\big)$ strebt in der That mit wachsendem m einer festen Grenze zu, sodass man setzen kann:

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{M}_n\big(f(r)\big) = \mathfrak{M}\big(f(r)\big). \tag{8}$$

Der Vollständigkeit halber werde bemerkt, dass diese Betrachtung offenbar ihre Gültigkeit behält, wenn die Function $f(x)$ an einzelnen Stellen oder selbst auch für gewisse unendliche Punktmengen *endlich-unstetig* oder innerhalb endlicher Grenzen *unbestimmt* wird; auch braucht $f(x)$ keine *eindeutige* Function in dem Sinne zu sein, dass

$$f(\alpha_n^N \cdot r) = f(r).$$

Unmittelbar aus der Definition jenes *Mittelwerthes* $\mathfrak{M}\big(f(r)\big)$ ergeben sich alsdann die Beziehungen:

$$\mathfrak{M}\big(K \cdot f(r)\big) = K \cdot \mathfrak{M}\big(f(r)\big), \tag{9}$$

wenn K einen für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ constanten Factor bedeutet, und:

$$\mathfrak{M}\left(\sum_0^m{}^\mu f_\mu(r)\right) = \sum_0^m{}^\mu \mathfrak{M}\big(f_\mu(r)\big), \tag{10}$$

wenn man mit $f_0(x), f_1(x), \ldots f_m(x)$ Functionen mit denselben Eigenschaften wie $f(x)$ bezeichnet.

Die Relation (10) bleibt offenbar auch noch für $m = \infty$ gültig, falls die Reihe $\sum_0^\infty{}^\mu f_\mu(x)$ für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ *gleichmässig* convergirt*). Denn bestimmt man m' so, dass für $m \geqq m'$ und $|x| = r$;

$$|R_m(x)| = \left|\sum_{m+1}^\infty{}^\mu f_\mu(x)\right| < \varepsilon,$$

so wird:

$$\mathfrak{M}\left(\sum_0^\infty{}^\mu f_\mu(r)\right) = \sum_0^m{}^\mu \mathfrak{M}\big(f_\mu(r)\big) + \mathfrak{M}\big(R_m(r)\big),$$

wo:

$$\left|\mathfrak{M}\big(R_m(r)\big)\right| < \varepsilon,$$

*) Die *gleichmässige* Convergenz ist offenbar — genau wie bei der gliedweisen Integrabilität einer Reihe — eine *hinreichende*, aber *keine nothwendige* Bedingung. Ueber die *nothwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen vergl. Arzela, „*Sulla integrabilità di una serie di funzioni*" und „*Sulla integrazione per serie*" (Rendic. dell' Accad. dei Lincei, 1885, Serie 4ª, Vol. I⁰, p. 326 und p. 538).

und daher schliesslich:

$$(10a)\qquad \mathfrak{M}\left(\sum_0^\infty{}^{\mu} f_\mu(r)\right) = \sum_0^\infty{}^{\mu}\, \mathfrak{M}\left(f_\mu(r)\right). -$$

Für das folgende erscheint es nützlich, den besonderen Fall $f(x) = x^{\pm\mu}$ für *positive, ganzzahlige* μ zu betrachten. Nimmt man m von vornherein so gross an, dass $N = 2^n > \mu$, *also* $\alpha_m^{\pm\mu}$ sicher von 1 verschieden, so hat man:

$$\mathfrak{M}_n(r^{\pm\mu}) = \frac{1}{N}\sum_0^{N-1}{}^{\nu}\, \alpha_n^{\pm\mu\cdot\nu}\,.\,r^{\pm\mu}$$

$$= \frac{1}{N}\, r^{\pm\mu}.\ \frac{1-\alpha_n^{\pm N\cdot\mu}}{1-\alpha_n^{\pm\mu}} = 0,$$

also auch:

$$(11)\qquad \mathfrak{M}(r^{\pm\mu}) = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dagegen hat man offenbar für $\mu = 0$:

$$\mathfrak{M}_n(r^0) = 1$$

und daher auch:

$$(12)\qquad \mathfrak{M}(r^0) = 1. -$$

Ferner soll hier gezeigt werden, dass ein Ausdruck von der Form:

$$\mathfrak{M}\left(\frac{r\,.\,f(r)}{r-x_0}\right),$$

falls $f(x)$ wiederum für $|x| = r$ im allgemeinen stetig ist und x_0 eine beliebige complexe Grösse bedeutet, welche nur der Bedingung: $|x_0| \lesseqgtr r$ zu genügen hat, sich in eine convergirende Reihe nach positiven oder negativen Potenzen von x_0 entwickeln lässt, je nachdem $|x_0| < r$ oder $|x_0| > r$.

Man hat zunächst für $|x_0| < |x|$:

$$\frac{x\,.\,f(x)}{x-x_0} = f(x)\,\frac{1}{1-\frac{x_0}{x}}$$

$$= f(x)\left\{\sum_0^{m-1}{}^{\mu}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\mu} + \left(\frac{x_0}{x}\right)^{m}\cdot\frac{1}{1-\frac{x_0}{x}}\right\}$$

und daher, wenn man der Reihe nach $x = \alpha_m^\nu\,.\,r$ $(\nu = 0, 1, \ldots N-1)$ setzt, durch Addition der resultirenden Gleichungen und Uebergang zur Grenze für $N = \infty$, mit Berücksichtigung von Gl. (9) und (10):

$$(13)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r-x_0}\right) = \sum_0^{m-1}{}^{\mu}\,\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.f(r)\right)\cdot x_0^\mu + x_0^m\cdot\mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r^m\left(1-\frac{x_0}{r}\right)}\right).$$

Da nun:

$$(14)\qquad \left| x_0^m \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r^m\left(1-\frac{x_0}{r}\right)}\right)\right| < \left|\frac{x_0}{r}\right|^m \cdot \frac{F(r)}{1-\left|\frac{x_0}{r}\right|},$$

wenn $F(r)$ die obere Grenze der absoluten Beträge von $f(x)$ für $|x|=r$ bedeutet, so folgt, dass dieser letztere Ausdruck mit wachsendem m gegen Null convergirt — und zwar, wenn $r' < r$ beliebig angenommen wird, offenbar *gleichmässig* für alle x_0, welche der Bedingung genügen: $|x_0| \leq r'$.

Hiernach lässt sich Gl. (13) auch durch die folgende ersetzen:

$$(15)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r-x_0}\right) = \sum_0^\infty{}^\mu \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\cdot f(r)\right)\cdot x_0^\mu,$$

wobei die betreffende Potenzreihe für $|x_0| \leq r' < r$ *gleichmässig* convergirt.

Analog ergiebt sich für $|x_0| > |x|$:

$$\frac{x\cdot f(x)}{x-x_0} = -f(x)\cdot\frac{x}{x_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}$$

$$= -f(x)\left\{\sum_1^{m-1}{}^\mu\left(\frac{x}{x_0}\right)^\mu + \left(\frac{x}{x_0}\right)^m\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{x_0}}\right\}$$

und daher:

$$(16)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r-x_0}\right) = -\left\{\sum_1^{m-1}{}^\mu \mathfrak{M}\left(r^\mu\cdot f(r)\right)\cdot x_0^{-\mu} + x_0^{-m}\cdot\mathfrak{M}\left(\frac{r^m\cdot f(x)}{1-\frac{r}{x_0}}\right)\right\}.$$

Da auch hier wiederum:

$$(17)\qquad \left| x_0^{-m}\cdot\mathfrak{M}\left(\frac{r^m\cdot f(r)}{1-\frac{r}{x_0}}\right)\right| < \left|\frac{r}{x_0}\right|^m\cdot\frac{F(r)}{1-\left|\frac{r}{x_0}\right|}$$

so folgt, wie oben:

$$(18)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{f(r)}{r-x_0}\right) = -\sum_1^\infty{}^\mu \mathfrak{M}\left(r^\mu\cdot f(r)\right).x_0^{-\mu},$$

wobei diese Reihe *gleichmässig* convergirt für $|x_0| \geq r' > r$.

Setzt man in den Gleichungen (15) und (18) speciell: $f(r)=1$, so ergiebt sich mit Berücksichtigung von Gleichung (11) und (12):

$$(19)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{r}{r-x_0}\right) = 1 \quad \text{für } |x_0| < r,$$

$$(20)\qquad \mathfrak{M}\left(\frac{r}{r-x_0}\right) = 0 \quad \text{für } |x_0| > r.$$

Zusatz: Die vorstehenden Betrachtungen lassen sich ohne weiteres auf den Fall übertragen, dass statt der Nullstelle irgend eine beliebige Stelle $x = x'$ als Mittelpunkt des Kreises mit dem Radius r auftritt. Man hat alsdann:

$$(21) \qquad \mathfrak{M}\left(f(x'+r)\right) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2^n} \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} f(x' + \alpha_n^{\nu} \cdot r).$$

§ 3.

Darstellung der Coefficienten einer Potenzreihe durch Mittelwerthe*).

Lehrsatz: *Ist die Reihe:*

$$(1) \qquad P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu \cdot x^\mu$$

gleichmässig convergent für $|x| = r$, *so gilt die Beziehung:*

$$(2) \qquad a_\mu = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} . P(r)\right) \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Beweis. Schreibt man:

$$P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu . x^\nu,$$

so ist für $\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$,

$$x^{-\mu} . P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_\nu . x^{\nu-\mu}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\nu} a_{\mu+\nu} . x^\nu,$$

wobei diese Reihe für alle x mit dem absoluten Betrage r gleichmässig convergirt. In Folge dessen hat man nach Gl. (10a) und (9) des vorigen Paragraphen:

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu} . P(r)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{\mu+\nu} . \mathfrak{M}(r^\nu)$$

d. h. mit Benützung von Gl. (11) und (12):

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu} . P(r)\right) = a_\mu \qquad (\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist**).

---

*) Serret, Cours d'Algèbre supérieur, T. I, p. 468.

**) Diese Darstellung der Coefficienten einer Potenzreihe durch Mittelwerthe ist nicht nur äusserlich einfacher, sondern in Wahrheit viel naturgemässer, als die entsprechende durch bestimmte Integrale, welche die Einführung des völlig

Zusätze und Folgerungen. I. Ist:

$$f(x) = P(x-x_0) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, a_\mu\,.\,(x-x_0)^\mu,$$

so ergiebt sich analog:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_\mu &= \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\,.\,P(r)\right) \\ &= \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.f(x_0+r)\right) \quad (\mu=0,\pm1,\pm2,\ldots), \end{aligned}$$

wenn die obige Reihe für alle x, welche der Bedingung $|x-x_0| = r$ genügen, gleichmässig convergirt.

II. Ist die Reihe $P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, a_\mu\,.\,x^\mu$ *gleichmässig* (und in diesem Falle offenbar stets auch *absolut*) *convergent* nicht nur für alle x mit einem absoluten Betrage $|x| = r$, sondern für alle möglichen $|x| = r$, falls r der Bedingung genügt: $R_0 < r < R$, so hat man offenbar für *jeden* solchen Werth r:

$$a_\mu = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}\,.\,P(r)\right)$$

d. h. die betreffenden Mittelwerthe sind innerhalb der Grenzen $R_0 < r < R$ von r unabhängig.

Reducirt sich $P(x)$ auf eine für $|x| = r < R$ convergirende Reihe mit lediglich positiven Potenzen:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, a_\mu\,.\,x^\mu,$$

so dass also:

$$a_0 = \mathfrak{P}(0), \quad a_\mu = \frac{1}{\mu\,!}\,\mathfrak{P}^{(\mu)}(0), \quad a_{-\mu} = 0 \quad (\mu=1,2,3,\ldots),$$

so ergiebt sich für $r < R$:

$$(4)\ \mathfrak{M}\left(\mathfrak{P}(r)\right) = \mathfrak{P}(0),\ \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.\,\mathfrak{P}(r)\right) = \frac{1}{\mu!}\,\mathfrak{P}^{(\mu)}(0),\ \mathfrak{M}\left(r^{\mu}.\,\mathfrak{P}(r)\right) = 0.$$

III. Bedeutet P_r das Maximum von $|P(x)|$ für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, so ist offenbar:

$$(5)\qquad |a_\mu| \leqq r^{-\mu}.\,P_r$$

und daher:

$$(6)\qquad |a_\mu.\,r^\mu| \leqq P_r.$$

---

fremdartigen d. h. zu der Potenzentwickelung einer *beliebigen* analytischen Function in *gar keiner nothwendigen* Beziehung stehenden Factors $\frac{1}{2\pi i}$ nach sich zieht. Derselbe rührt lediglich davon her, dass die Function unter dem Integralzeichen mit dem Bogenelement der Integrationscurve multiplicirt erscheint, und dass der Einfluss dieses Factors schliesslich wieder eliminirt werden muss.

IV. Ist $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{0}^{\infty}{}^{\mu} a_\mu \,.\, x^\mu$ *beständig* convergent, und bedeutet a_m irgend einen von Null verschiedenen Coefficienten, so hat man nach (6):

$$\mathfrak{P}_r \geqq | a_m . r^m |,$$

wenn $\mathfrak{P}_r$ wieder das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ für $|x| = r$ bezeichnet. Da man die rechte Seite dieser Ungleichung durch Wahl von $r \geqq R$ *beliebig gross* machen kann, so ergiebt sich: es lässt sich R *so gross* annehmen, dass $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| \geqq R$ unter anderen Werthen auch *beliebig grosse* annimmt.

Das Analoge ergiebt sich für eine Potenzreihe von der Form

$$\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} a_{-\mu} \,.\, x^{-\mu}$$

und daher auch für:

$$P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu} a_\mu . x^\mu,$$

falls diese Reihen für *beliebig kleine* Werthe von $|x|$ convergiren, d. h. man kann alsdann eine positive Grösse σ *so klein* annehmen, dass $\mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ bezw. $P(x)$ für $|x| \leqq \varrho$ unter anderen Werthen *beliebig grosse* annimmt.

V. Ist $\mathfrak{P}(x) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_\mu \,.\, x^\mu$ für $x = 0$ von Null verschieden, also $|a_0| > 0$, so lässt sich eine bestimmte Umgebung der Stelle $x = 0$ angeben, für welche $\mathfrak{P}(x)$ *nicht* verschwindet.

Angenommen nämlich, es convergire $\mathfrak{P}(x)$ noch gleichmässig für $|x| = r$, so hat man:

$$|a_\mu| \,.\, r^\mu \leqq \mathfrak{P}_r,$$

wenn wiederum $\mathfrak{P}_r$ das Maximum von $|\mathfrak{P}(x)|$ für $|x| = r$ bedeutet, und daher für $|x| < r$:

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} a_\mu \,.\, x^\mu \right| \leqq \mathfrak{P}_r \cdot \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} \left| \frac{x}{r} \right|^\mu = \mathfrak{P}_r \cdot \frac{|x|}{r - |x|}.$$

Folglich wird:

$$\left| \sum_{1}^{\infty}{}^{\mu} a_\mu . x^\mu \right| < |a_0|$$

wenn:

$$\mathfrak{P}_r \cdot \frac{|x|}{r - |x|} < |a_0|$$

d. h. wenn:

(7) $$|x| < \varrho,$$

wo:

$$\varrho = \frac{|a_0| \cdot r}{|a_0| + \mathfrak{P}_r},$$

so dass in diesem Falle:

$$|\mathfrak{P}(x)| = \left| \sum_0^\infty {}^\mu a_\mu \cdot x^\mu \right| \geqq |a_0| - \left| \sum_1^\infty {}^\mu a_\mu \cdot x^\mu \right| > 0$$

wird.

Ist $\mathfrak{P}(x) = 0$ für $x = 0$, so muss offenbar $a_0 = 0$ sein. Sei dann a_m, wo $m \geqq 1$, der erste von Null verschiedene unter den Coefficienten a_μ, so hat man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}(x) = \sum_m^\infty {}^\mu a_\mu \cdot x^\mu &= x^m \cdot \sum_0^\infty {}^\mu a_{m+\mu} \cdot x^\mu \\ &= x^m \cdot \mathfrak{P}_1(x),\end{aligned}$$

wo $\mathfrak{P}_1(0) = a_m$ *von Null verschieden.* Man sagt in diesem Falle, $\mathfrak{P}(x)$ habe für $x = 0$ eine *m-fache* Nullstelle. Da nach dem eben gesagten eine angebbare positive Grösse ϱ existiren muss, sodass $\mathfrak{P}_1(x)$ für $|x| < \varrho$ überhaupt nicht verschwindet, so folgt, dass auch $\mathfrak{P}(x)$ ausser $x = 0$ *keine weitere* Nullstelle x' mit einem absoluten Betrage $|x'| < \varrho$ besitzen kann.

Hieraus lässt sich aber erschliessen, dass allemal, wenn $\mathfrak{P}(x)$ *in jeder beliebigen Nähe* von $x = 0$ Nullstellen besitzt (in welchem Falle dann offenbar die Stelle $x = 0$ ein Häufungspunkt von Nullstellen sein muss), $\mathfrak{P}(x)$ identisch verschwindet, sodass also sämmtliche Coefficienten $a_\mu = 0$ ($x=0, 1, 2, \ldots$) sind. Denn wäre a_m der erste *von Null verschiedene* Coefficient, so hätte man, wie oben:

$$\mathfrak{P}(x) = x^m \cdot \mathfrak{P}_1(x).$$

wo:

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^\infty {}^\mu a_{m+\mu} \cdot x^\mu$$

und es müsste sich sodann eine bestimmte positive Grösse ϱ fixiren lassen, sodass $\mathfrak{P}(x)$ für $|x| < \varrho$ keine weitere Nullstelle ausser $x = 0$ besitzt.

Diese Betrachtungen sind ohne weiteres auf den Fall zu übertragen, dass an die Stelle von $x = 0$ ein beliebiger anderer Punkt $x = x_0$ tritt.

VI. Ist $P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^\mu a_\mu \cdot x^\mu$ für $|x| = r$ *unbedingt convergent* und *beständg Null*, so folgt aus: $a_\mu = \mathfrak{M}\big(r^{-\mu} \cdot P(r)\big)$, dass sämmtliche Coefficienten a_μ verschwinden müssen. Mit Hülfe von Nr. V lässt sich

aber zeigen, dass letzteres auch dann schon der Fall ist, wenn nur $P(x)$ für unendlich viele Stellen in der Nähe eines *im Innern* des Convergenzbereiches gelegenen Punktes x_0 verschwindet.

Es sei ϱ eine positive Grösse von der Beschaffenheit, dass ein mit dem Radius ϱ um x_0 beschriebener Kreis (K) noch *innerhalb* des Convergenzbereiches von $P(x)$ liegt. Dann ist für dieses Gebiet K:

$$P(x) = \sum_0^\infty {}^\nu \frac{1}{\nu!} P^{(\nu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^\nu,$$

und es muss somit nach Nr. V $P(x)$ für *das ganze Gebiet K verschwinden*, insbesondere also für denjenigen Theil einer mit dem Radius $|x_0| = r$ beschriebenen Kreislinie, welche dem Gebiete K angehört. Sei dann etwa x_1 ein Endpunkt dieses Kreisbogens, also $|x_1 - x_0| = \varrho$, so erkennt man auf dieselbe Weise das Verschwinden von $P(x)$ für ein weiteres Stück $\widehat{x_1 x_2}$ jenes Kreises, wo wiederum $|x_2 - x_1| = \varrho$, und so weiter schliessend für die ganze Kreisperipherie $|x_0| = r$. Alsdann folgt aber aus dem oben gesagten, dass $P(x)$ identisch verschwindet.

Hieraus ergiebt sich die *Identität* zweier Potenzreihen $P_1(x)$, $P_2(x)$, sobald ihre Summen für unendlich viele Stellen in der Nähe irgend einer im Innern ihres Convergenzbereiches gelegenen Stelle x_0 übereinstimmen.

Das Analoge gilt dann wiederum für Potenzreihen von der Form

$$P(x - x').$$

VII. *Hat man unendlich viele für $|x| = r$ gleichmässig, also für $|x| < r$ gleichmässig und absolut convergirende Potenzreihen von der Form:*

$$f_\nu(x) = \sum_0^\infty {}^\mu a_\nu^{(\mu)} \cdot x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

deren Summe:

$$F_0(x) = \sum_0^\infty {}^\nu f_\nu(x)$$

für $|x| \leqq r$ ebenfalls convergirt und zwar gleichmässig für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$ (wenn auch eventuell nur bedingt), so kann man für $|x| < r$ setzen:

$$F_0(x) = \sum_0^\infty {}^\mu A_0^{(\mu)} \cdot x^\mu$$

wo:

$$A_0^{(\mu)} = \sum_0^\infty {}^\nu a_\nu^{(\mu)}.$$

Beweis. Nach dem Hauptsatze dieses Paragraphen hat man:

$$a_\nu^{(\mu)} = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f_\nu(r)\right) \cdot$$

Setzt man sodann für $n = 0, 1, 2, \ldots$ allgemein:

$$F_n(x) = \sum_n^\infty{}_\nu f_\nu(x),$$

so wird in Folge der Voraussetzung jede solche Reihe $F_n(x)$ für $|x| \leqq r$ convergiren und zwar speciell für $|x| = r$ *gleichmässig*. Da das letztere offenbar auch von jeder Reihe der Form $\sum_n^\infty{}_\nu x^{-\mu} \cdot f_\nu(x)$ gilt, so hat man nach § 2, Gl. (10a):

$$\mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot F_n(r)\right) = \sum_n^\infty{}_\nu \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot f_\nu(r)\right)$$

oder wenn man:

$$(8) \qquad \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} \cdot F_n(r)\right) = A_\nu^{(\mu)}$$

setzt (sodass das $A_n^{(\mu)}$ für jedes endliche n und μ einen bestimmten Werth besitzt):

$$(9) \qquad A_n^{(\mu)} = \sum_n^\infty{}_\nu a_\nu^{(\mu)}.$$

Bedeutet dann g_n das Maximum von $|F_n(x)|$ für $|x| = r$, so folgt aus Gl. (8), dass:

$$|A_n^{(\mu)}| \leqq g_n \cdot r^{-\mu}$$

und somit die Reihe:

$$(10) \qquad \mathfrak{P}_n(x) = \sum_0^\infty{}_\mu A_n^{(\mu)} \cdot x^\mu$$

für $|x| < r$ unbedingt convergirt. Man hat nämlich:

$$(11) \qquad |\mathfrak{P}_n|(x)| \leqq g_n \cdot \sum_0^\infty{}_\mu \left|\frac{x}{r}\right|^\mu = \frac{r}{r - |x|} \cdot g_n.$$

Setzt man jetzt speciell $n = 0$, so hat man (als convergent für $|x| < r$):

$$\mathfrak{P}_0(x) = \sum_0^\infty{}_\mu A_0^{(\mu)} \cdot a^\mu = \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^{n-1}{}_\nu a_\nu^{(\mu)}\right) x^\mu + \mathfrak{P}_n(x).$$

Andererseits ist:

$$F_0(x) = \sum_0^{n-1}{}_\nu f\ (x) + F_n(x) = \sum_0^\infty{}_\mu \left(\sum_0^{n-1}{}_\nu a_\nu^{(\mu)}\right) \cdot x^\mu + F_n(x)$$

und daher:

$$(12) \qquad F_0(x) - \mathfrak{P}_0(x) = F_n(x) - \mathfrak{P}_n(x).$$

Nun lässt sich, wenn x beliebig so angenommen wird, dass $|x| < r$, in Folge der gleichmässigen Convergenz von $\Sigma f_\nu(x)$ für $|x| = r$, zunächst eine positive Zahl m so fixiren, dass für $n \geq m$ zunächst $|F_n(x)|_{|x|=r}$, also auch g_n und daher nach Ungl. (11) $|\mathfrak{P}_n(x)|$ beliebig klein wird; sodann kann man n so gross nehmen, dass

$$|F_n(x)| = \left|\sum_n^\infty {}_\nu f_\nu(x)\right|$$

gleichfalls beliebig klein wird. Hiernach zeigt aber Gl. (12), dass $|F_0(x) - \mathfrak{P}_0(x)|$ unter jeder noch so kleinen Grösse liegen muss, und man findet somit schliesslich (für $|x| < r$):

$$F_0(x) = \mathfrak{P}_0(x) \text{ d. h. } = \sum_0^\infty {}_\mu A_0^{(\mu)} x^\mu \quad \text{— q. e. d.} \tag{13}$$

NB. Man bemerke, dass hier die *Gleichmässigkeit* der Convergenz von $F_0(x) = \sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x)$ und somit die *Stetigkeit* von $F_0(x)$ nur für $|x| = r$, nicht aber für $|x| < r$ vorausgesetzt wurde*). Das gefundene Resultat zeigt, dass alsdann $F_0(x)$ *eo ipso* für $|x| < r$ durchweg *stetig* ist.

VIII. Findet die unbedingte Convergenz der Reihen

$$f_\nu(x) = \sum_0^\infty {}_\mu a_\nu^{(\mu)} x^\mu$$

und die gleichmässige Convergenz von

$$F_0(x) = \sum_0^\infty {}_\nu f_\nu(x)$$

für $|x| = r$ bei *jedem* Werthe $r < R$ statt, so gilt offenbar die Entwickelung

$$F_0(x) = \sum_0^\infty {}_\mu A_0^{(\mu)} x^\mu$$

schliesslich für alle x, welche der Bedingung $|x| < R$ genügen.

Ein analoges Resultat ergiebt sich für eine unendliche Anzahl von Reihen der Form:

$$f_\nu(x) = \sum_0^\infty a_\nu^{(\mu)} . x^{-\mu},$$

---

*) Auch hier ist die *Gleichmässigkeit* der Convergenz von $\Sigma f_\nu(x)$ eine *hinreichende*, aber keineswegs eine *nothwendige* Bedingung für die Gültigkeit des betreffenden Satzes. Vgl. Runge, Zur Theorie der analytischen Functionen. (Acta mathem. Bd. VI, p. 245). Arzela, Sulla teoria delle funzioni analitiche. (Rendic. dell' Accad. di Bologna, 1888).

sobald dieselben für $|x| > R_0$ convergiren und ihre Summe für alle $|x| = r$ bei jedem Werthe $r > R_0$ gleichmässig convergent ist.

Aus der Zusammenfassung beider Resultate folgt dann schliesslich der Satz:

Sind die Reihen:

$$f_\nu(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, a_\nu^{(\mu)} \cdot x^\mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

convergent für $R_0 < |x| < R$ und convergirt ihre Summe:

$$F_0(x) = \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, f_\nu(x)$$

jedesmal gleichmässig für alle x mit dem absoluten Betrage $|x| = r$, sofern nur: $R_0 < r < R$, so hat man für $R_0 < |x| < R$:

$$F_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_0^{(\mu)} \cdot x^\mu,$$

wo:

$$A_0^{(\mu)} = \sum_0^{\infty}{}^{\nu}\, a_\nu^{(\mu)}.$$

(W e i e r s t r a s s'scher Doppelreihensatz)*).

§ 4.

Der Mittelwerth $\mathfrak{M}\big(f(r)\big)$ ist unter gewissen Bedingungen von r unabhängig.

A. H ü l f s s a t z. *Ist $f(x)$ eindeutig und regulär für einen gewissen Bereich T, so ist der Differenzenquotient $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ bei hinlänglich kleinen Werthen von h eine gleichmässig stetige Function von h für alle x im Innern und auf der Begrenzung eines jeden innerhalb T liegenden Bereiches T' d. h. jeder beliebig kleinen positiven Grösse ε lässt sich eine positive Grösse δ so zuordnen, dass für alle Stellen x von T' die Beziehung besteht:*

$$\text{(1)} \qquad \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \right| < \varepsilon$$

falls

$$\left\{ \begin{matrix} |h| \\ |k| \end{matrix} \right\} < \delta.$$

---

*) Abh. aus der Functionenlehre, p. 73.

Beweis. Für jede dem Bereiche T' angehörige Stelle x muss nach Voraussetzung eine Entwickelung von der Form existiren:

$$(2) \qquad f(x+h) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(x) . h^\nu ,$$

deren wahrer Convergenzradius bekanntlich eine mit x stetig veränderliche positive Grösse ist und demnach ein bestimmtes von Null verschiedenes Minimum ϱ besitzt. Nimmt man jetzt eine positive Grösse

$$\delta < \varrho ,$$

im übrigen willkürlich an, so ist für alle x des Bereiches T' und alle h, welche der Bedingung genügen $|h| \leqq \delta$, die Reihenentwickelung (2) gültig und absolut convergent. Das gleiche gilt auch von:

$$(3) \qquad f''(x+h) = \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu+2)}(x) . h^\nu ,$$

und da $f''(x+h)$ für den bezüglich x und h fixirten Werthebereich eine stetige Function von $(x+h)$ ist, also $|f''(x+h|$ ein bestimmtes endliches Maximum g besitzen muss, so hat man nach Zusatz III des vorigen Paragraphen:

$$(4) \qquad \left| \frac{1}{\nu!} f^{(\nu+2)}(x) . h^\nu \right| \leqq g$$

(für alle x des Bereiches T' und $|h| \leqq \delta$). Setzt man nun Gl. (2) in die Form:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = h \cdot \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{(\nu+2)!} f^{(\nu+2)}(x) . h^\nu ,$$

so ergiebt sich mit Benützung von Ungl. (4) für $|h| \leqq \delta$:

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) \right| \leqq g . |h| \sum_0^\infty{}^{\nu} \frac{1}{(\nu+1)(\nu+2)} \text{ d. h. } \leqq g . |h,|$$

und daher, wenn auch $|k| \leqq \delta$ angenommen wird:

$$(5) \qquad \left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \right| \leqq g \cdot \{|h| + |k|\} \\ \leqq 2g . \delta ,$$

sodass also die fragliche Differenz unter ε herabsinkt, sofern nur von vornherein $\delta < \frac{\varepsilon}{2g}$ angenommen wird. —

B. Hauptsatz. *Ist $f(x)$ eindeutig und regulär für alle x des Gebietes $R_0 \leqq |x| \leqq R$ (wobei eventuell auch $R_0 = 0$ sein kann), so*

besitzt $\mathfrak{M}\big(f(r)\big)$ *für alle* r *des Intervalles* $R_0 \leqq r \leqq R$ *einen bestimmten von* r *unabhängigen Werth, sodass also:*

$$\mathfrak{M}\big(f(r)\big) = \mathfrak{M}\big(f(r')\big),$$

wenn:

$$R_0 \leqq r < r' \leqq R.$$

Beweis. Nachdem man r, r' innerhalb der vorgeschriebenen Grenzen willkürlich angenommen, fixire man zunächst eine positive ganze Zahl m so gross, dass die positive Grösse:

$$\frac{r'-r}{m} = \delta \tag{6}$$

klein genug ausfällt, damit auf Grund des vorigen Hülfssatzes für $|h| \leqq \delta$, $|k| \leqq \delta$:

$$\left| \frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{f(x+k)-f(x)}{k} \right| < \varepsilon$$

wird Wählt man hierauf die positive ganze Zahl n bezw. $N = 2^n$ gross genug, dass:

$$r'.|1-\alpha_n| \leqq \delta \quad \text{(also } a\ fortiori\text{: } r.|1-\alpha_n| < \delta) \tag{7}$$

so hat man:

$$\left| \frac{f\big(\alpha_n^\nu.(r+\delta)\big)-f(\alpha_n^\nu.r)}{\alpha_n^\nu.\delta} - \frac{f\big(\alpha_n^{\nu+1}.r\big)-f\big(\alpha_n^\nu.r\big)}{\alpha_n^\nu.(\alpha-1).r} \right| < \varepsilon$$

oder nach Multiplication mit δ, wenn man noch berücksichtigt, dass $|\alpha_n^\nu| = 1$:

$$\left| f\big(\alpha_n^\nu(r+\delta)\big) - f(\alpha_n^\nu\cdot r) - \delta\cdot\frac{f\big(\alpha_n^{\nu+1}.r\big)-f\big(\alpha_n^\nu.r\big)}{(\alpha-1).r} \right| < \delta.\varepsilon.$$

Setzt man hier der Reihe nach $\nu = 0, 1, \ldots (N-1)$ und summirt die resultirenden Ungleichungen (wobei mit Berücksichtigung von: $\alpha_n^0 = \alpha_n^N$ alle von dem dritten Gliede der linken Seite herrührenden Bestandtheile sich wegheben), so ergiebt sich:

$$\left| \sum_0^{N-1}{}_\nu f\big(\alpha_n^\nu.(r+\delta)\big) - \sum_0^{N-1}{}_\nu f(\alpha_n^\nu.r) \right| < N.\delta.\varepsilon$$

oder nach Division mit N:

$$\mathfrak{M}_n\big(f(r+\delta)\big) - \mathfrak{M}_n\big(f(r)\big) < \delta.\varepsilon,$$

und daher, wenn man n über alle Grenzen wachsen lässt:

$$\mathfrak{M}\big(f(r+\delta)\big) - \mathfrak{M}\big(f(r)\big) \leqq \delta.\varepsilon. \tag{8}$$

Ersetzt man in dieser Ungleichung r durch $r + (\mu-1)\delta$, was sicher

gestattet ist, wenn $1 \leq \mu \leq m$, da ja alsdann immer noch $r + (\mu - 1)\delta < r'$, also nach Ungl. (7):

$$\{r + (\mu - 1)\delta\} \cdot |1 - \alpha_n| \leq \delta$$

wird, so findet man zunächst:

$$\mathfrak{M}\big(f(r + \mu\delta)\big) - \mathfrak{M}\Big(f\big(r + (\mu - 1)\delta\big)\Big) \leq \delta \,.\, \varepsilon$$

und hieraus für $\mu = 1, 2, \ldots m$ und Addition der resultirenden Ungleichungen mit Berücksichtigung von Gl. (6) $(m.\delta = r' - r)$:

$$(9) \qquad \mathfrak{M}\big(f(r')\big) - \mathfrak{M}\big(f(r)\big) \leq (r' - r) \,.\, \varepsilon.$$

Da aber ε von vorn herein beliebig klein angenommen werden kann, und andererseits $\mathfrak{M}\big(f(r')\big)$, $\mathfrak{M}\big(f(r)\big)$ nach § 2 bestimmte Werthe besitzen, so muss geradezu:

$$(10) \qquad \mathfrak{M}\big(f(r')\big) - \mathfrak{M}\big(f(r)\big) = 0$$

sein, womit der oben ausgesprochene Satz bewiesen ist.

Zusatz. Die Gültigkeit der letzten Beziehung, welche die eigentliche Grundlage der Laurent'schen bezw. Mac Laurin'schen Entwickelung bildet (s. den folgenden Paragraphen), beruht, wie der Beweis lehrt, nicht direct auf dem *regulären Verhalten* von $f(x)$, sondern lediglich auf der *gleichmässigen Stetigkeit des Differenzenquotienten*. In der stillschweigend gemachten Annahme dass diese Eigenschaft eine unmittelbare Folge der Differenzirbarkeit oder gar schon der Stetigkeit von $f(x)$ sein müsse, liegt die Schwäche der Cauchy'schen Beweisführung, nicht bloss bei der hier zunächst in Betracht kommenden, oben citirten Abhandlung, sondern auch bei dem früheren Beweise seines Integralsatzes*).

§ 5.

Der Cauchy-Laurent'sche Satz.

Lehrsatz. *Ist $f(x)$ eindeutig und regulär für alle Stellen x des Gebietes $R_0 \leq |x| \leq R$, so lässt sich $f(x)$ in eine für die genannten Werthe unbedingt und gleichmässig convergirende Reihe von der Form:*

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, a_\mu \,.\, x^\mu$$

entwickeln, wo:

$$a_\mu = \mathfrak{M}\big(a^{-\mu} . f(r)\big)$$

*) Vgl. meinen Aufsatz: „*Ueber den Cauchy'schen Integralsatz*". Sitz.-Ber. der k. Bayer. Akad. d. Wiss. 1895. Bd. XXV, p. 42, desgl. „*Zum Cauchy'schen Integralsatze*" a. a. O. p. 295 ff. Hier wird gezeigt, dass die fragliche Beziehung sich aus der Existenz eines *stetigen* Differentialquotienten $f'(x)$ deduciren lässt.

und r einen ganz beliebigen Werth des Intervalles $R_0 \leq r \leq R$ bedeutet. Ist insbesondere $R_0 = 0$, so reducirt sich diese Entwickelung auf die folgende:

$$f(x) = \sum_0^\infty {}_\mu\, a_\mu \,.\, x^\mu .$$

Beweis. Bezeichnet man mit x_0 irgend eine willkürlich gewählte Stelle *im Innern* des fraglichen Bereiches, sodass also $R_0 < |x_0| < R$ und setzt man:

$$\varphi(x) = x \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

so ist $\varphi(x)$ für alle x des Bereiches $R_0 \leq x \leq R$ gleichfalls eindeutig und regulär. Man erkennt dies ohne weiteres für jede von x_0 verschiedene Stelle x; in der Umgebung der Stelle x_0 selbst hat man aber zunächst:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_1^\infty {}_\mu \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(x_0) \,.\, (x - x_0)^\mu$$

und daher:

$$\varphi(x) = x \cdot \sum_1^\infty {}_\mu \frac{1}{\mu!} f^{(\mu)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{\mu - 1}$$

d. h. $\varphi(x)$ ist für $x = x_0$ gleichfalls regulär.

In Folge dessen hat man nach dem Satze des vorigen Paragraphen

$$\mathfrak{M}\left(R_0 \cdot \frac{f(R_0) - f(x_0)}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(R \cdot \frac{f(R) - f(x_0)}{R - x_0}\right)$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichungen (9) und (10) des § 2:

$$(1) \qquad f(x_0) \,.\, \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) - f(x_0) \cdot \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = \mathfrak{M}\left(\frac{R \,.\, f(R)}{R - x_0}\right) - \mathfrak{M}\left(\frac{R_0\, f(R_0)}{R_0 - x_0}\right).$$

Nun ist aber wegen $|x_0| < R$ und $|x_0| > R_0$ nach Gl. (19) und (20) des § 2:

$$(2) \qquad \mathfrak{M}\left(\frac{R}{R - x_0}\right) = 1, \quad \mathfrak{M}\left(\frac{R_0}{R_0 - x_0}\right) = 0,$$

und es bestehen nach Gl. (15) und (18) des § 2 für $|x_0| < R$ bezw. $|x_0| > R$ die unbedingt und gleichmässig convergenten Entwickelungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{M}\left(\dfrac{R \,.\, f(R)}{R - x_0}\right) = \displaystyle\sum_0^\infty {}_\mu\, \mathfrak{M}\left(R^{-\mu} \,.\, f(R)\right) . \, x_0^\mu , \\[2ex] \mathfrak{M}\left(\dfrac{R_0 \cdot f(R_0)}{R_0 - x_0}\right) = - \displaystyle\sum_1^\infty {}_\mu\, \mathfrak{M}\left(R_0^\mu \,.\, f(R_0)\right) . \, x_0^{-\mu} . \end{cases}$$

Beachtet man noch, dass man bei den hier als Coefficienten auftretenden

Mittelwerthen $\mathfrak{M}\left(R^{-\mu}.f(R)\right)$, $\mathfrak{M}\left(R_0^{\mu}.f(R_0)\right)$ nach dem Hauptsatze des § 4 die Grössen R und R_0 durch einen beliebigen Werth r des Intervalles $R_0 \leq r \leq R$ ersetzen darf*), so geht die Gl. (1), wenn man schliesslich noch x statt x_0 schreibt, in die folgende über:

$$(4) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.f(r)\right).x^{\mu},$$

wobei diese Entwickelung zunächst für alle x des Bereiches $R_0 < |x| < R$ unbedingt convergirt. Um zu erkennen, dass dies auch für die Grenzen $|x| = R$, bezw. $|x| = R_0$ der Fall ist, bemerke man, dass nach Voraussetzung auch noch zu jeder Stelle x' mit dem absoluten Betrage $|x'| = R$ noch eine gewisse angebbare Umgebung $|x - x'| < \varrho$ gehören muss, für welche $f(x)$ noch regulär ist. Bezeichnet man das sicher von Null verschiedene Minimum dieser Umgebung mit ϱ_0 und wählt eine positive Grösse $\delta < \varrho_0$, so folgt, dass $f(x)$ auch noch für alle x mit dem absoluten Betrage $(R+\delta)$ regulär ist. Alsdann ist aber die Entwickelung (4) unbedingt convergent für $|x| < R+\delta$, also insbesondere für $|x| = R$.

Das gleiche ergiebt sich offenbar auf die nämliche Weise für $|x| = R_0$, allemal wenn R_0 von Null verschieden ist.

Ist hingegen $R_0 = 0$, so kann man in den Coefficienten von der Form:

$$\mathfrak{M}\left(r^{\mu}.f(r)\right)$$

für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$ den Werth $r = 0$ einführen, wobei dann:

$$\mathfrak{M}\left(r^{\mu}.f(r)\right) = 0$$

resultirt, und Gl. (4) in die folgende übergeht:

$$(5) \qquad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}^{\mu}\, \mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.f(r)\right).x^{\mu},$$

zunächst für $0 < |x| \leq R$. Diese letztere Gleichung gilt aber dann offenbar auch noch für $x = 0$ selbst, da sich für $x = 0$ die rechte Seite auf das Glied $\mathfrak{M}\left(f(r)\right)$ reducirt und dieses den Werth $\mathfrak{M}\left(f(0)\right)$ d. h. $f(0)$ besitzt.

Damit ist der Satz in dem oben ausgesprochenen Umfange bewiesen.

Zusatz I. Ist $f(x)$ nur für das Gebiet $R_0 < |x| < R$ eindeutig und regulär, so gilt die Entwickelung (4) zunächst für jedes Gebiet

---

*) Hierbei ist zunächst $R_0 > 0$ vorausgesetzt. Ist speciell $R_0 = 0$, so darf man in denjenigen Coefficienten, die ursprünglich R enthielten, also in denjenigen von der Form $\mathfrak{M}\left(r^{-\mu}.f(r)\right)$ für $\mu = 1, 2, \ldots$ der Grösse r offenbar *nicht* den Werth Null beilegen.

$R_0' \leqq |x| \leqq R'$, falls $R_0 < R_0' < R' < R$, wobei auch die in den Coefficienten auftretende Grösse r beliebig aus dem Intervalle $R_0' \leqq r \leqq R'$ gewählt werden kann: sie gilt somit schliesslich für alle x des Gebietes $R_0 < |x| < R$ und für beliebige Wahl von r aus dem Intervalle $R_0 < r < R$.

Hieraus ergiebt sich mit Hülfe bekannter Methoden*), dass wenn $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ die *wahren* Convergenzradien einer Potenzreihe:

$$P(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_\mu \,.\, x^\mu$$

sind, $P(x)$ für $|x| = R$ bezw. $|x| = R_0$ mindestens je eine *singuläre* Stelle besitzen muss; und falls $|x| = R$ den *wahren* Convergenzradius der Reihe:

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{0}^{\infty} a_\mu \,.\, x^\mu$$

darstellt, das analoge für $|x| = R$ gilt.

Ist daher insbesondere $f(x)$ eindeutig und regulär für jede im Endlichen gelegene Stelle x_0, so folgt, dass der Convergenz- und Gültigkeitsbereich der Entwickelung:

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, a_\mu \,.\, x^\mu$$

unbegrenzt sein muss; $f(x)$ ist also durch eine *beständig* convergirende Reihe nach positiven Potenzen darstellbar und wird dann bekanntlich als *ganze transcendente Function* bezeichnet, die sich auf eine *ganze rationale* reducirt, falls die Entwickelung bei einer endlichen Stellenzahl abbricht. Als einzige *singuläre* Stelle von $f(x)$ erscheint alsdann die Stelle $x = \infty$.

Zusatz II. Erscheint an Stelle von $x = 0$ irgend ein anderer Punkt $x = x_0$ als Mittelpunkt des Ring- bezw. Kreisgebietes, innerhalb dessen $f(x)$ als regulär bekannt ist, etwa:

$$R_0 < |x - x_0| < R. \quad \text{bezw.} \quad 0 \leqq |x - x_0| < R,$$

so ergiebt sich ohne weiteres:

$$(6) \qquad f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mu}\, a_\mu . (x - x_0)^\mu \quad \text{bezw.} \quad f(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_{\mu}\, a_\mu . (x - x_0)^\mu .$$

wo:

$$(7) \qquad a_\mu = \mathfrak{M}\left(r^{-\mu} . f(x_0 + r)\right) \quad \left(\begin{matrix} R_0 < r < R \\ \text{bezw. } 0 \leqq r < R \end{matrix}\right).$$

---

*) Vgl. z. B. Stolz, Vorlesungen über allg. Arithm. Bd. II, p. 182.

Ist ferner die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x|x_0)$ als Functionenelement vorgelegt, so muss wiederum die Peripherie des *wahren* Convergenzkreises mindestens *eine singuläre* Stelle enthalten.

§ 6.

Die singulären Stellen eindeutiger Functionen*).

Es sei $f(x)$ eindeutig und regulär für jede Stelle x_0 einer gewissen Umgebung der Stelle $x = \alpha$: das Verhalten in α selbst sei unbekannt. Alsdann kann man nach § 5 $f(x)$ in die Form setzen:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mu} a_\mu . (x - \alpha)^\mu . \tag{1}$$

Wir wollen nun hierbei *drei* Fälle unterscheiden, nämlich je nachdem in der obigen Entwickelung die Reihe der *negativen* Potenzen gänzlich fehlt oder mit einem bestimmten Gliede *abbricht* oder *unbegrenzt* ist.

I. Fehlen in der Entwickelung (1) die negativen Potenzen, so ist $f(x)$ für $x = \alpha$ regulär. Hierzu ist offenbar *nothwendig*, dass $f(x)$ in beliebiger Nähe von $x = \alpha$ stets *unter einer endlichen Grenze* bleibt. Die Bedingung ist aber auch *hinreichend*, da das Auftreten von negativen Potenzen stets zur Folge haben würde, dass $f(x)$ in der Nähe von $x = \alpha$ *beliebig grosse* Werthe annimmt (cf. II und III).

II. Die Reihe der negativen Potenzen breche mit dem Gliede $a_{-m}(x - \alpha)^m$ ab (wo also a_{-m} endlich und von Null verschieden). Alsdann wird:

$$\begin{aligned}(x - \alpha)^m . f(x) &= \sum_{-m}^{+\infty} {}^{\mu} a_\mu . (x - \alpha)^{\mu + m} \\ &= \sum_{0}^{\infty} {}^{\mu} a_{\mu - m} . (x - \alpha)^\mu ,\end{aligned}$$

d. h. $(x - \alpha)^m . f(x)$ ist dann für $x = \alpha$ regulär, und zwar hat man:

$$\lim_{x = \alpha} (x - \alpha)^m . f(x) = a_{-m} .$$

d. h. endlich und von Null verschieden.

Die Stelle $x = \alpha$ heisst in diesem Falle — d. h. allemal wenn $(x - \alpha)^m . f(x)$ für $x = \alpha$ *von Null verschieden und regulär* ist — eine *ausserwesentlich singuläre Stelle* (oder: *ein Pol*) *m*^ter^ *Ordnung* der Function $f(x)$.

Da nach Nr. V des § 3 eine angebbare Umgebung der Stelle $x = \alpha$

*) Vgl. Hölder, Beweis des Satzes, dass eine eindeutige analytische Function in unendlicher Nähe einer wesentlich singulären Stelle jedem Werth beliebig nahe kommt. — Math. Ann. Bd. 20, p. 138.

existiren muss, für welche $(x-a)^m.f(x)$ gleichfalls von Null verschieden ist, so folgt, dass $\frac{1}{(x-a)^m.f(x)}$ für $x=a$ gleichfalls regulär (übrigens auch von Null verschieden) ist, sodass man setzen kann:

$$\frac{1}{f(x)}=(x-a)^m\left\{b_0+\sum_0^\infty{}^\mu b_\mu.(x-a)^\mu\right\}\quad\left(\text{wo offenbar: } b_0=\frac{1}{a_{-m}}\right).$$

d. h. die für $f(x)$ *ausserwesentlich singuläre Stelle* m^{ter} Ordnung ist für $f(x)$ eine *m-fache Nullstelle.*

Dieses Ergebniss ist offenbar umkehrbar, d. h. jede m-fache *Nullstelle* von $\frac{1}{f(x)}$ ist eine *ausserwesentlich singuläre Stelle* m^{ter} Ordnung für $f(x)$, sodass diese Eigenschaft gleichfalls als *Definition* der ausserwesentlich singulären Stelle m^{ter} Ordnung dienen kann. Auch sagt man in dem betrachteten Falle, es werde $f(x)$ für $x=a$ *unendlich gross von der* m^{ten} *Ordnung*, oder es sei a eine *m-fache* Unendlichkeitsstelle.

III. Jede Stelle a, welche für die *eindeutige* Function $f(x)$ *weder* eine Stelle *regulären* Verhaltens, noch eine *ausserwesentlich singuläre* ist, soll eine *wesentlich singuläre* heissen. Aus dieser zunächst rein negativen Definition ergiebt sich mit Rücksicht auf die vorangehenden Betrachtungen folgendes:

1) *Jede wesentlich singuläre Stelle a von $f(x)$ ist auch eine wesentliche singuläre Stelle für* $\frac{1}{f(x)}$. Denn wäre $\frac{1}{f(x)}$ daselbst regulär und von Null verschieden, so würde $f(x)$ sich ebenso verhalten; wäre dagegen $x=a$ für $\frac{1}{f(x)}$ eine m-fache Null- bezw. ausserwesentlich singuläre Stelle, so müsste a für $f(x)$ eine ausserwesentlich singuläre bezw. Nullstelle m^{ter} Ordnung sein.

2) Jede *Häufungsstelle* von unendlich vielen *Nullstellen* oder *ausserwesentlich singulären Stellen* ist stets eine *wesentlich singuläre Stelle.*

Betrachten wir jetzt den Fall $f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^\mu a_\mu.(x-a)^\mu$, wobei die Reihe der negativen Potenzen unbegrenzt ist, so muss auf Grund der oben gegebenen Definition die Stelle $x=a$ jedenfalls eine *wesentlich singuläre* sein. Nach § 3, Zusatz IV folgt nun zunächst, dass $f(x)$ in hinlänglicher Nähe von $x=a$ unter anderen Werthen jedenfalls *beliebig grosse* annimmt. Sei sodann A ein ganz beliebiger endlicher Werth einschliesslich der Null: dann ist jedenfalls die Stelle $x=a$ auch eine wesentlich singuläre für $f(x)-A$. Besitzt nun $f(x)-A$ in *jeder* Nähe von $x=a$ *Nullstellen*, so *nimmt* $f(x)$ *den Werth* A in der Umgebung von a *unendlich oft an.* Besitzt dagegen $f(x)-A$

innerhalb einer gewissen Umgebung von α *keine* Nullstellen, so ist $\frac{1}{f(x)-A}$ für alle Stellen dieser Umgebung (abgesehen von α selbst) *eindeutig* und *regulär* mit der wesentlich singulären Stelle α, und somit in der Form darstellbar:

$$\frac{1}{f(x)-A} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mu}\, b_\mu . (x-\alpha)^\mu .$$

Folglich muss aber $\frac{1}{f(x)-A}$ in hinlänglicher Nähe von α *beliebig grosse*, also $f(x) - A$ *beliebig kleine* Werthe annehmen: in diesem Falle kommt also $f(x)$ dem Werthe A in der Nähe der Stelle α *beliebig nahe.*

Hieraus erkennt man zunächst folgendes:

In beliebiger Nähe jeder isolirten, d. h. von lauter Stellen regulären Verhaltens umgebenen, wesentlich singulären Stelle α nimmt $f(x)$ jeden beliebigen Werth A entweder unendlich oft an oder kommt ihm zum mindesten beliebig nahe.

Dieser Satz bleibt aber auch bestehen, wenn α keine *isolirte* wesentlich singuläre Stelle, sondern eine *Häufungsstelle* von *lediglich ausserwesentlich singulären* Stellen ist (womit implicite schon gesagt ist, dass jene ausserwesentlich singulären Stellen *in beliebiger Nähe* von α keine weiteren Häufungsstellen besitzen sollen, insbesondere also nicht in Linien oder Flächenstücken überall dicht liegen). Denn *entweder* besitzt $\frac{1}{f(x)-A}$ in der Nähe der wesentlich singulären Stelle α keine weiteren singulären Stellen, nimmt also nach dem bisher gesagten u. a. beliebig grosse Werthe an, in welchem Falle $f(x)$ dem Werthe A *beliebig nahe* kommen muss; *oder* $\frac{1}{f(x)-A}$ besitzt in jeder Nähe von α ausserwesentlich singuläre Stellen, also $f(x) - A$ ebensoviele Nullstellen, d. h. $f(x)$ *nimmt* dann den Werth A *unendlich oft an.*

Dagegen *kann* der obige Satz seine Gültigkeit verlieren, wenn α eine Häufungsstelle von *wesentlich singulären* Stellen, insbesondere ein Punkt einer *singulären* d. h. aus lauter (dann *eo ipso wesentlich*) *singulären* Stellen bestehenden Linie ist. Man betrachte z. B. die bei anderer Gelegenheit*) von mir untersuchte Function $f(x) = \sum^{\mu} \frac{1}{\mu!} \cdot x^{a^\nu}$ (wo a eine ganze positive Zahl $\geqq 2$): hier ist jede Stelle α mit dem absoluten Betrage $|\alpha| = 1$ eine *wesentlich singuläre*, obschon $f(x)$ für $x = |\alpha|$ und die Umgebung dieser Stelle, soweit von einer solchen überhaupt die Rede sein kann, mit allen Ableitungen vollkommen endlich und stetig ist. Der *wesentlich singuläre* Charakter von α documentirt sich

*) Math. Annalen Bd. 42, p. 182.

in diesem Falle *ausschliesslich* darin, dass *keine* $\mathfrak{P}(x-\alpha)$ existirt, welche mit $f(x)$ oder $(x-\alpha)^m.f(x)$ in der Nähe von $x=\alpha$ übereinstimmt. —

Die vorstehenden Betrachtungen sind leicht auf den Fall zu übertragen, dass an der Stelle eines im Endlichen gelegenen Werthes $x=\alpha$ der Werth $x=\infty$ tritt. Die Stelle $x=\infty$ wird für $f(x)$ als eine Stelle *regulären* Verhaltens, bezw. als *ausserwesentlich* oder *wesentlich singuläre* zu gelten haben, je nachdem das analoge bezüglich der Stelle $y=0$ für $f\left(\frac{1}{y}\right)$ der Fall ist, d. h. mit anderen Worten, je nachdem die Entwickelung von $f(x)$ nach ganzen Potenzen von x für alle $|x|$ die eine gewisse Grösse R übersteigen, *positive* Potenzen von x *überhaupt nicht* bezw. in *endlicher* oder *unendlich grosser* Anzahl enthält.

Hieraus folgt insbesondere, dass die Stelle $x=\infty$ für eine *ganze rationale* Function eine *ausserwesentlich singuläre*, für eine *ganze transcendente* eine *wesentlich singuläre* sein muss; und dass umgekehrt eine für jedes endliche x *reguläre* und *eindeutige* Function eine *ganze rationale* oder *transcendente* sein muss, je nachdem sie die Stelle $x=\infty$ als eine *ausserwesentlich* oder *wesentlich singuläre* besitzt. Ist also die im Endlichen durchweg *reguläre* und *eindeutige* Function $f(x)$ auch für $x=\infty$ *regulär*, so muss sie eine *Constante* sein; hierzu ist, ausser der Regularität und Eindeutigkeit im *Endlichen*, nach den gesagten offenbar *hinreichend*, dass $|f(x)|$ stets *unter einer endlichen Grenze bleibt.*

Es muss also jede eindeutige analytische Function, welche *keine* Constante ist, mindestens *eine* singuläre Stelle haben. Ist insbesondere $g(x)$ eine *ganze rationale* Function, so muss $\frac{1}{g(x)}$ mindestens *eine* im *Endlichen* gelegene singuläre Stelle besitzen $\Big($denn die Stelle $x=\infty$ ist als *ausserwesentlich singuläre* Stelle von $g(x)$ eine *Nullstelle* von $\frac{1}{g(x)}\Big)$. Diese kann *keine wesentlich singuläre* sein, da sie dann eine ebensolche Stelle für $g(x)$ sein müsste. Sie ist somit eine *ausserwesentlich singuläre* und folglich eine *Nullstelle* für $g(x)$, d. h.: *Jede ganze rationale Function hat mindestens eine im Endlichen gelegene Nullstelle.*

München, im April 1895.

Sur l'extension des idées de Galois à la théorie des équations différentielles.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein).

Par

Mr. Emile Picard à Paris.

En traitant cette année dans mon cours de l'étude des *groupes de transformations* des équations différentielles linéaires, au sujet de laquelle je vous ai envoyé récemment un article pour votre journal (Math. Annalen, tome 46), je m'aperçois qu'une équation auxiliaire, jouant un rôle essentiel, est définie dans cet article d'une manière trop particulière qui pourrait conduire à restreindre la notion de groupe de transformations.

Si vous voulez bien vous reporter à l'endroit cité, je considère à un certain moment l'équation différentielle algébrique

$$f\left(x,\ V,\ \frac{dV}{dx},\ \ldots,\ \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0 \quad (p < m^2) \tag{4}$$

ayant avec l'équation (2) une solution commune σ n'appartenant pas à l'équation (3)

$$\varphi\left(x,\ V,\ \ldots,\ \frac{d^k V}{dx^k}\right) = 0. \tag{3}$$

Je suppose ensuite que cette équation (4) est irréductible. Cela n'est pas nécessaire, il suffit de prendre parmi toutes les équations algébriques telles que (4), celle qui est *d'ordre moindre* (ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs). On peut d'ailleurs admettre que l'équation (4) est algébriquement irréductible par rapport à $\frac{d^p V}{dx^p}$; il est clair alors que toute solution de f, qui n'appartient pas à (3), appartient à l'équation (2), car autrement la solution σ satisferait à une équation d'ordre inférieur à p.

Tous les raisonnements faits dans l'hypothèse plus particulière, que j'avais adoptée, subsistent intégralement, et c'est ainsi qu'on est

conduit de la manière la plus satisfaisante à la notion de *groupe de transformations* d'une équation différentielle linéaire.

Permettez moi d'ajouter une remarque *sur l'extension des idées de Galois á la théorie des équations non linéaires.* Soit une équation différentielle algébrique

$$P\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0.$$

Je considère l'expression

$$V = R(y_1, y_2, \ldots, y_\mu, x)$$

R étant une fonction rationnelle arbitrairement choisie de μ intégrales quelconques $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ de l'équation précédente et de la variable x. On peut former l'équation d'ordre $m\mu$ à laquelle satisfait V, équation que nous désignerons par E. On aura d'ailleurs pour les y des fonctions rationnelles de V et de ses dérivées.

Si l'équation F est arbitraire, l'équation E n'aura aucune intégrale commune avec une équation algébrique d'ordre moindre, si ce n'est avec certaines équations faciles à former et provenant de la supposition que dans V deux ou plusieurs intégrales y sont identiques; nous désignerons par φ l'ensembles de ces équations.

Si on quitte le cas général, il peut arriver que E ait une intégrale commune, n'appartenant pas à φ, avec une équation différentielle algébrique d'ordre moindre; soit

$$f\left(x, V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right) = 0$$

une telle équation. Parmi les équations de cette sorte, considérons celle qui est *d'ordre moindre* (ou l'une d'elles s'il y en a plusieurs). Cette équation conduit à une théorie toute semblable à celle que nous avons développée pour les équations linéaires. On aura alors une relation algebrique entre les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_\mu$ et leurs dérivées, *le groupe intervenant ici sera celui des opérations remplaçant dans cette relation ce système d'intégrales par un autre.*

Vous voyez que l'indétermination du nombre μ vient donner à cette théorie un tout autre caractère que pour le cas des équations linéaires où on pouvait se borner à prendre $\mu = m$.

Paris, le 27. Novembre 1895.

Ueber Riemann'sche Formenschaaren auf einem beliebigen algebraischen Gebilde.

Von

Ernst Ritter in Göttingen.

Einleitung.

Eine lineare Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^n y}{dz^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \cdots + p_{n-1} \frac{dy}{dz} + p_n y = 0,$$

deren Coefficienten algebraische Functionen eines bestimmten algebraischen Gebildes vom Geschlechte p sind, definirt uns eine gewisse Functionenschaar y, deren sämmtliche Functionen sich aus irgend n linear unabhängig ausgewählten Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ linear mit constanten Coefficienten zusammensetzen:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

Die Functionen $y_1, y_2, \ldots y_n$ erleiden eine gewisse discontinuirliche Gruppe linearer homogener Substitutionen, wenn die Variable z auf dem algebraischen Gebilde entweder gewisse singuläre Punkte umkreist oder Periodenwege beschreibt, die nicht auf Punkte zusammenzuziehen sind.

Setzt man

$$(2) \qquad Y = q\left(q_1 \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + q_2 \frac{d^{n-2} y}{dz^{n-2}} + \cdots + q_n y\right),$$

unter $q_1, q_2, \ldots q_n$ beliebige algebraische, unter q eine beliebige multiplicative Function des Gebildes verstanden, so genügt auch Y einer linearen Differentialgleichung derselben Art und stellt ebenfalls eine sich linear substituirende Functionenschaar auf dem algebraischen Gebilde vor, und zwar eine solche, deren Substitutionen sich von den entsprechenden Substitutionen der Functionenschaar y nur durch simultane Multiplication aller Zweige mit bestimmten Constanten, den Multiplicatoren von q, unterscheiden; umgekehrt, wenn die Substitutionen einer Functionenschaar Y von denen einer Schaar y sich nur

in der geschilderten Weise unterscheiden, hängt sie mit y durch eine Gleichung von der Form (2) zusammen.

Alle Differentialgleichungen (1), welche sich durch Transformationen der Gestalt (2) in einander überführen lassen, betrachten wir mit Riemann als zu einer „Classe“ gehörig und wollen sie untereinander „verwandt“ nennen. Ebenso sprechen wir von „verwandten Functionenschaaren“, oder von einer „Classe von Functionenschaaren“, indem wir alle Functionenschaaren zusammenfassen, deren Substitutionen sich nur um simultane Multiplicationen aller Zweige mit Constanten unterscheiden.

Riemann unternimmt in dem nachgelassenen Fragment: „Zwei allgemeine Sätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten“ (20. Febr. 1857) die Aufgabe, Functionenclassen der genannten Art genauer zu untersuchen. Er stellt sich dabei, genau wie in seiner berühmten Arbeit über die P-Function, auf den Standpunkt, nicht von der Formel, der Differentialgleichung, auszugehen, sondern von den charakteristischen functionentheoretischen Eigenschaften der Functionen.

Indem auch wir die Riemann'sche Betrachtungsweise annehmen, werden wir als gegeben ansehen:

1) Ein bestimmtes algebraisches Gebilde vom Geschlechte p und auf diesem eine endliche Anzahl s von singulären Punkten $e_i (i=1,2,..s)$.

2) $2p$ lineare homogene Substitutionen von n Variablen, welche bestimmten $2p$ unabhängigen Periodenwegen entsprechen und s ebensolche Substitutionen, welche den Umkreisungen der einzelnen singulären Punkte e_i entsprechen.

Da das Verhalten einer Functionenschaar in einem Punkte e_i durch Angabe der zugehörigen Substitution noch nicht völlig bestimmt ist, so geben wir auch noch, natürlich in Einklang mit den Substitutionscoefficienten, die Exponenten der Schaar in jedem Punkte an, d. h. die Wurzeln der „determinirenden Fundamentalgleichung“ von Fuchs.

Den Beweis für die Existenz solcher Formenschaaren bei beliebig vorgegebener Gruppe wollen wir als durch Poincaré's Construction der „fonctions zétafuchsiennes“ erbracht ansehen. Es handelt sich für mich in dieser Arbeit nur darum, die Beziehungen zwischen den verschiedenen Functionenschaaren einer gegebenen Classe näher zu erforschen, wobei wir nur algebraische Hülfsmittel heranzuziehen brauchen.

Diese Untersuchung wird aber für die transcendenten Untersuchungen, z. B. für die Theorie der „homomorphen Functionen“, wie ich nach Herrn Klein's Vorschlag die „fonctions zétafuchsiennes“ von Poincaré nennen will, in gleicher Weise die nothwendige Grundlage liefern, wie die Theorie der multiplicativen Formen für die automorphen Functionen.

Schon dieser Vergleich zeigt uns die Nothwendigkeit, von den Functionen zur formentheoretischen Formulirung überzugehen, statt der Functionenschaaren also Formenschaaren zu betrachten, welche sich bei Umläufen linear substituiren. Dabei werden wir uns aber unbedingt auf die Theorie der multiplicativen Formen auf einem algebraischen Gebilde stützen müssen, welche ich in Math. Ann. Bd. 44, 1893 entwickelt habe. Ich will diese Arbeit, da ich sehr oft auf dieselbe hinzuweisen habe, kurz mit (44) citiren.

§ 1.

Definitionen.

Wir denken uns die vorgelegte Riemann'sche Fläche von irgend einem nichtsingulären Punkte aus durch p Paare von Rückkehrschnitten $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ so in ein einfach zusammenhängendes Flächenstück verwandelt, dass sie sich ohne Zerreissung nach Art der Figur in (44), Seite 264 in die Ebene ausbreiten lässt, und dass die $4p$ Ufer der Rückkehrschnitte in der angedeuteten Weise aufeinander folgen.

Ferner ziehe ich von der Ecke zwischen A_p^+ und B_1^- noch s Einschnitte nach den s singulären Punkten $e_1, e_2, \ldots e_s$.

Es sei z irgend eine m-werthige algebraische Function der Fläche, deren Unendlichkeitsstellen $\infty_1, \infty_2, \ldots \infty_m$ sowohl untereinander, wie von den Punkten $e_1, e_2, \ldots e_s$ getrennt liegen mögen.

Ich spalte z in zwei theilerfremde ganze multiplicative Formen $z_1 : z_2$, welche als unabhängige Variable dienen sollen. Um das Verhalten irgend einer Form gegenüber geschlossenen Wegen des Werthsystems z_1, z_2 vollständig zu charakterisiren, ist es zweckmässig, auf der Riemann'schen Fläche noch m weitere Schnitte nach den Punkten $z_2 = 0$, d. h. $\infty_1, \infty_2, \ldots \infty_m$ zu legen. Irgend einen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Weg des Werthsystems z_1, z_2, bei welchem der Werth z_2 für sich den Werth $z_2 = 0$ $\mathfrak{g}_2$-mal umkreist, kann ich mir zerlegen in einen geschlossenen Umlauf des Quotienten $z = \frac{z_1}{z_2}$ mit festgehaltenem Werthe von z_2 und in $\mathfrak{g}_2$ simultane Umläufe von z_1 und z_2 um 0. Den Weg des Quotienten z zerlege ich weiter in eine Aufeinanderfolge von Periodenwegen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, welche auf der zerschnittenen Fläche von einem Ufer $A_\varkappa^-$ zu $A_\varkappa^+$, bezw. von $B_\varkappa^-$ nach $B_\varkappa^+$ verlaufen, von Umkreisungen der Punkte e_ι, die von dem negativen Ufer des betreffenden Einschnitts zum positiven gehen, und in Umkreisungen der m Punkte ∞, deren Gesammtzahl $\mathfrak{g}$ sein möge.

Es seien jetzt

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$$

n linear unabhängige Zweige einer auf dem algebraischen Gebilde

nur in den Punkten $e_1, e_2 \ldots e_s$ verzweigten Formenschaar Π vom Grade δ in den multiplicativen Primformen, in z_1, z_2 gemessen also vom Grade $\frac{\delta}{m}$.

Wenn bei festgehaltenem Werthe von z_2 die Variable z einen Periodenweg $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ oder eine Umkreisung eines Punktes e_i ausführt, so soll das System $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ je eine bestimmte homogene lineare Substitution $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, S_i erfahren; wenn z einen der Punkte $\infty_1, \infty_2, \ldots \ldots \infty_m$ umkreist und z_2 festgehalten wird, müssen sich alle Zweige simultan mit $e^{-2i\pi\frac{\delta}{m}}$ multipliciren, wenn anders die Formenschaar in den Punkten $z_2 = 0$ unverzweigt sein soll.

Eine solche Formenschaar will ich, weil die entsprechenden Functionen zuerst von Riemann in der oben genannten nachgelassenen Arbeit definirt und besprochen sind, kurz als „*Riemann'sche Formenschaar*“ benennen.

Die Substitutionen A_k, B_k, S_i müssen, da ein Umlauf des z um den ganzen Rand der zerschnittenen Fläche sich auf die Umkreisung eines beliebigen nichtsingulären Punktes zusammenziehen lässt, der Relation genügen:

$$B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_1 \,.\, B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} A_2 \ldots B_p A_p^{-1} B_p^{-1} A_p \,.\, S_1 S_2 \,.\, S_s = e^{2i\pi\delta}.$$

In der Umgebung einer Stelle e_i möge die Formenschaar, natürlich im Einklang mit den Coefficienten der betreffenden Substitution S_i, die Exponenten

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$$

besitzen; die Summe

$$\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \cdots + \lambda_{in}$$

heisse λ_i.

Dann ist die Determinante der Substitution S_i gleich $e^{2i\pi\lambda_i}$.

Dann folgt aber aus der Fundamentalrelation der Substitutionen, dass

$$\sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i - n\delta \quad \textit{eine ganze Zahl}$$

sein muss.

An irgend einer von den Stellen e_i verschiedenen Stelle besitzt die Formenschaar ganzzahlige Exponenten, von denen keine zwei einander gleich sind:

$$l_1 < l_2 < l_3 < \cdots < l_n.$$

Eine Stelle mit den Exponenten $0, 1, 2, \ldots n-1$ heisst eine „*gewöhnliche Stelle*“.

Haben die Exponenten andere Werthe, so heisst die Stelle ein „*Nebenpunkt*“ der Formenschaar und zwar von der *Multiplicität*

$$\varrho = l_1 + l_2 + \cdots + l_n - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Die Multiplicität eines Nebenpunktes kann positiv, negativ oder auch 0 sein.

Es wird aber vorausgesetzt, dass nur eine endliche Anzahl von Nebenpunkten existiren und dass die Exponenten in jedem Nebenpunkt endliche Werthe haben. Dann ist auch die Multiplicität jedes Nebenpunktes eine endliche Zahl.

Ein Nebenpunkt, dessen niederster Exponent $l_1 = 0$ ist, heisst ein „*reiner Nebenpunkt*", ein solcher mit $l_1 > 0$ ein l_1-facher *Nullpunkt* und mit $l_1 < 0$ ein $(-l_1)$-facher *Unendlichkeitspunkt* der Formenschaar Unterscheiden sich die Exponenten eines Nullpunktes oder eines Unendlichkeitspunktes jeder folgende vom vorhergehenden nur um eine Einheit, so heisst der Punkt ein „*reiner Nullpunkt*" bezw. ein „*reiner Unendlichkeitspunkt*".

Jeder beliebige Nebenpunkt kann aufgefasst werden als Combination eines reinen Nebenpunktes mit einem reinen Nullpunkt oder einem reinen Unendlichkeitspunkt.

Ein l-facher reiner Nullpunkt zählt als Nullpunkt mit der Multiplicität nl, ein l-facher reiner Unendlichkeitspunkt mit der Multiplicität $-nl$.

§ 2.

Bestimmung und Anzahl der Nebenpunkte.

Es seien y_1, y_2 die Werthe von z_1, z_2 in einem willkürlichen Hülfspunkte, und $\underset{z,y}{D}$ folgender Differentiationsprocess:

$$\underset{z,y}{D} = -\frac{y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial z_2}}{(zy)}.$$

Diese Differentiation ist zwar von der Wahl des Hülfspunktes abhängig, doch gelten einfache Formeln für den Uebergang von einem Hülfspunkt y zu einem andern y'. Wenn nämlich r den Grad einer Form F in z_1, z_2 gemessen bedeutet, so ist:

$$\begin{aligned}\underset{z,y}{D^k} F = \underset{zy'}{D^k} F &+ \binom{k}{1}(r-k+1)\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)\underset{zy'}{D^{k-1}} F \\ &+ \binom{k}{2}(r-k+1)(r-k+2)\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)^2 \underset{z,y'}{D^{k-2}} F + \cdots \\ &+ \binom{k}{k}(r-k+1)\cdots r\left(\frac{(yy')}{(zy)(zy')}\right)^k \cdot F.\end{aligned}$$

Durch ein- und mehrmalige Anwendung des Symbols $\underset{zy}{D}$ auf eine Formenschaar Π erhält man weitere Formenschaaren, welche bei den Umläufen der Variablen z_1, z_2 genau dieselben Substitutionen erfahren, wie Π selbst. Die Determinante

$$\begin{vmatrix} \Pi_1, & \underset{zy}{D}\Pi_1, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_1 \\ \Pi_2, & \underset{zy}{D}\Pi_2, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_2 \\ \vdots & & & \\ \Pi_n, & \underset{zy}{D}\Pi_n, & \ldots & \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi_n \end{vmatrix}$$

oder kürzer geschrieben

$$\left|\underset{zy}{D^k}\Pi_h\right| \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots n-1 \\ h = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

wird sich daher bei Umläufen der Variablen auf der Riemann'schen Fläche nur mit Constanten multipliciren, ist also eine multiplicative Form der Fläche.

Man sieht leicht, dass für die Determinante der Hülfspunkt y des Differentiationsprocesses $\underset{zy}{D}$ keine besondere Rolle mehr spielt, denn die Determinante behält dieselbe Gestalt, wenn man vermittelst der oben angegebenen Formel y' statt y einführt.

Es ist das Verhalten der Determinante an den einzelnen Stellen der Ebene genauer zu untersuchen. Man findet ohne Schwierigkeit folgende Resultate:

1) In einem gewöhnlichen Punkte ist die Determinante endlich und von 0 verschieden.

2) In einem ϱ-fachen Nebenpunkte verschwindet die Determinante ϱ-fach, wenn der Punkt nicht zugleich ein Verzweigungspunkt der Fläche ist.

3) In einem singulären Punkte mit der Exponentensumme λ_i verschwindet die Determinante in der Ordnung $\lambda_i - \frac{n(n-1)}{2}$.

4) In einem ν-blättrigen Verzweigungspunkt der Fläche, welcher der Allgemeinheit halber zugleich ϱ-facher Nebenpunkt der Formenschaar sein möge, verschwindet die Determinante in z gemessen in der Ordnung $\frac{\varrho}{\nu} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{1}{\nu} - 1\right)$, also auf der Fläche gemessen in der Ordnung $\varrho - \frac{n(n-1)}{2}(\nu - 1)$.

Hierbei ist Verschwinden in negativer Ordnung als Unendlichwerden aufzufassen.

Verstehen wir jetzt unter $G(z_1, z_2)$ die Verzweigungsform der Fläche, d. h. eine ganze multiplicative Form vom Grade $2p - 2 + 2m$, welche an den Verzweigungspunkten der Fläche auf der Fläche gemessen $(\nu - 1)$-fach verschwindet, (44, S. 270) so hat der Ausdruck:

$$\Delta = G(z_1, z_2)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \left| D^k \Pi_h \right|_{zy} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \ldots n-1 \\ h = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

folgende Eigenschaften:

1) Δ ist eine multiplicative Form vom Grade $n\delta + n(n-1)(p-1)$.

2) Δ verschwindet an einem Punkte e_i in der Ordnung $\lambda_i - \frac{n(n-1)}{2}$.

3) Δ verschwindet an einem ϱ-fachen Nebenpunkte in der Ordnung ϱ.

4) Δ ist an jedem andern Punkte auf der Fläche unverzweigt, endlich und von 0 verschieden.

Hieraus folgt nun, da der Grad einer multiplicativen Form gleich der Anzahl ihrer 0-Stellen ist, jede mit ihrer Multiplicität gerechnet, wenn jetzt ϱ die Summe der Multiplicitäten aller Nebenpunkte bedeutet, die fundamentale Gleichung:

$$n\delta + n(n-1)(p-1) = \varrho + \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i - s\frac{n(n-1)}{2}$$

oder

$$\varrho = n\delta + n(n-1)(p-1) - \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i + s\frac{n(n-1)}{2}.$$

§ 3,

Verwandte Formenschaaren.

Zwei Formenschaaren heissen *„verwandt"* oder zur selben *„Riemann'schen Formenclasse"* gehörig, wenn ihre entsprechenden Substitutionen sich höchstens um simultane Multiplicationen aller Zweige mit Constanten unterscheiden.

Es thut jedoch der Allgemeinheit der Betrachtung keinen Abbruch, wenn ich nur solche Formenschaaren vergleiche, welche in den Substitutionen S_i genau übereinstimmen und welche bei Umläufen um jeden von den e_i verschiedenen Punkt sich genau reproduciren.

Denn wenn die Substitutionen S_i nicht genau übereinstimmen, sondern sich um simultane Multiplicationen mit Constanten unterscheiden, oder wenn die Zweige einer Formenschaar sich auch bei Umlauf um einen von den e_i verschiedenen Punkt simultan mit einer Constanten multipliciren, so kann ich durch Multiplication mit geeigneten Potenzen von multiplicativen Primformen bewirken, dass die Substitutionen S_i genau gleich werden und dass die e_i die einzigen Verzweigungspunkte auf der Fläche sind.

Die entsprechenden Exponenten verwandter Formenschaaren an den Stellen e_i können sich dann nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Bildet man die Fundamentalrelation der Substitutionen (S. 160) für

zwei in diesem Sinne verwandte Formenschaaren, so stimmen die linken Seiten der Relationen genau überein, da ja die simultanen Multiplicationen, um welche die $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ sich unterscheiden können, mit allen Substitutionen vertauschbar sind und sich daher ganz herausheben. Dann können aber auch die rechten Seiten nicht verschieden sein, und wir haben mithin den Satz:

Die Grade verwandter Formenschaaren können sich nur um ganze Zahlen unterscheiden.

Alle die bisherigen Definitionen und Sätze gelten uneingeschränkt, welcher Art auch die einzelnen Substitutionen S_i sein mögen. Für die nun folgenden Betrachtungen wird es aber vielfach bequemer sein, zunächst den Fall auszuschliessen, dass mehrere Elementartheiler einer Substitution S_i (vergl. Frobenius, Ueber die Elementartheiler der Determinanten, Berl. S. B. 1894, p. 31) dieselbe Nullstelle haben; d. h. wenn unter den Exponenten $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ eines Punktes e_i solche existiren, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, soll immer nur dem grössten dieser Exponenten ein Fundamentalzweig ohne logarithmische Glieder in der Entwicklung entsprechen. Welche Modificationen unsere Sätze in den ausgeschlossenen Ausnahmefällen erfahren, werden wir nachträglich leicht aussprechen können, während die Berücksichtigung derselben von vornherein zu manchen Weitläufigkeiten in der Darstellung führen würde.

Es soll jetzt ein bestimmtes in der Classe vorkommendes Exponentensystem

$$\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in} \quad (i = 1, 2, \ldots s)$$

als „*Normalexponentensystem*“ zu Grunde gelegt werden.

Wenn dann die Exponenten irgend einer Formenschaar der Classe an der Stelle e_i von den entsprechenden Normalexponenten verschieden sind, so sage ich, die Formenschaar habe an der Stelle e_i einen „*Nebenpunkt*“, und unter der Multiplicität desselben verstehe ich den Ueberschuss der Exponentensumme über die Summe der Normalexponenten.

Sind alle Exponenten an der Stelle e_i grösser als die entsprechenden Normalexponenten, so soll e_i eine „*Nullstelle*“ heissen, und zwar eine l-fache, wenn l der kleinste Ueberschuss eines Exponenten über den entsprechenden Normalexponenten ist; ist mindestens ein Exponent kleiner als der entsprechende Normalexponent, so heisse die Stelle eine „*Unendlichkeitsstelle*“, und zwar von der Multiplicität l, wenn der grösste Fehlbetrag eines Exponenten gegen den entsprechenden Normalexponenten gleich l ist.

Ein „*reiner Nullpunkt bezw. Unendlichkeitspunkt*“ liege vor, wenn alle Exponenten um ein und dieselbe Zahl grösser bezw. kleiner sind, als die entsprechenden Normalexponenten; ein „*reiner Nebenpunkt*“

wenn mindestens ein Exponent gleich dem entsprechenden Normalexponenten und keiner kleiner als der entsprechende Normalexponent ist.

Nach diesen Festsetzungen kann ich nun insbesondere von „*ganzen Formenschaaren*“ der Classe sprechen, d. h. solchen, die nirgends Unendlichkeitsstellen besitzen.

Jede nicht ganze Formenschaar der Classe kann ich jedenfalls durch Multiplication mit multiplicativen Primformen in eine ganze Formenschaar der Classe verwandeln. Desgleichen kann ich jeden Nullpunkt einer Formenschaar durch Division mit einer Potenz der multiplicativen Primform beseitigen.

Ferner will ich für die Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$, die sich ja bei den einzelnen Formenschaaren der Classe noch um simultane Multiplicationen mit Constanten unterscheiden können, ein System von „*Normalsubstitutionen*“ so festlegen, dass die Normalsubstitutionen sämmtlich die Determinante 1 haben. Diese Normirung der $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ enthält natürlich noch eine gewisse Willkür, insofern ja die Determinante einer solchen Substitution gleich 1 bleibt, wenn man die Substitution noch mit einer simultanen Multiplication mit einer $n$ten Einheitswurzel combinirt. Im Uebrigen hängt diese Normirung auch von der Auswahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 ab.

Mit Beziehung auf die ausgewählten Normalsubstitutionen sage ich, irgend eine Formenschaar besitze das „*Multiplicatorsystem*“ $\alpha_\varkappa = e^{2i\pi\sigma_\varkappa}$, $\beta_\varkappa = e^{2i\pi\tau_\varkappa}$, wenn ihre Substitutionen $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ aus den entsprechenden Normalsubstitutionen durch Combination mit einer simultanen Multiplication aller Zweige mit $\alpha_\varkappa$, $\beta_\varkappa$ hervorgehen.

Es gelten folgende evidenten Sätze:

Sind Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ *irgend n verwandte Formenschaaren von den Graden* δ_1, δ_2, ... δ_n *und mit den Multiplicatoren* $\alpha'_\varkappa$, $\beta'_\varkappa$, $\alpha''_\varkappa$, $\beta''_\varkappa$; ... $\alpha^{(n)}_\varkappa$, $\beta^{(n)}_\varkappa$, *so ist die aus ihren Zweigen gebildete Determinante*

$$\left|\Pi^{(k)}_h\right| \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n, \end{array}$$

wenn sie nicht identisch verschwindet, eine multiplicative Form vom Grade $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n$, *welche bei Umlauf um* e_i *den Multiplicator* $e^{2i\pi\lambda_i}$, *längs der Periodenwege* $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ *die Multiplicatoren* $\alpha'_\varkappa\, \alpha''_\varkappa \ldots \alpha^{(n)}_\varkappa$, $\beta'_\varkappa\, \beta''_\varkappa \ldots \beta^{(n)}_\varkappa$ *aufweist.*

Zwischen irgend $n + 1$ *Formenschaaren der Classe besteht eine identische Relation der Gestalt*

$$\varphi_0 \Pi + \varphi_1 \Pi' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)} = 0,$$

unter φ_0, φ_1, ... φ_n *unverzweigte multiplicative Formen der Fläche verstanden*, deren Grade und Multiplicatorsysteme die Grade und

Multiplicatorsysteme von $\Pi, \Pi', \ldots \Pi^{(n)}$ zu ein und demselben Grad und Multiplicatorsystem ergänzen.

Die φ sind nämlich einfach den Determinanten der Matrix

$$|\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{matrix} k = 0, 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

proportional.

Wenn n Formenschaaren $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ der Classe so ausgewählt sind, dass ihre Determinante

$$|\Pi_h^{(k)}| \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots n \\ h = 1, 2, \ldots n \end{matrix}$$

nicht identisch verschwindet, so lässt sich jede Formenschaar Π der Classe in der Gestalt darstellen:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ unverzweigte multiplicative Formen von den Graden $\delta - \delta_1, \delta - \delta_2, \ldots \delta - \delta_n$ und mit den Multiplicatoren $\frac{\alpha_x}{\alpha'_x}, \frac{\beta_x}{\beta'_x}; \frac{\alpha_x}{\alpha''_x}, \frac{\beta_x}{\beta''_x}; \ldots \frac{\alpha_x}{\alpha_x^{(n)}}, \frac{\beta_x}{\beta_x^{(n)}}$ bedeuten.

Umgekehrt liefert jede derartige Darstellung eine Formenschaar der Classe.

Es giebt gewiss n Formenschaaren der Classe, deren Determinante nicht identisch verschwindet, und durch welche man also alle Formenschaaren linear darstellen kann; z. B. unter Π irgend eine beliebige Formenschaar der Classe verstanden, die Schaaren

$$\Pi, \underset{zy}{D}\Pi, \underset{zy}{D^2}\Pi, \ldots \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi.$$

Hieraus folgt insbesondere der Satz:

Jede Formenschaar Π genügt einer linearen Differentialgleichung $n$ter Ordnung:

$$\underset{zy}{D^n}\Pi + \varphi_1 \underset{zy}{D^{n-1}}\Pi + \varphi_2 \underset{zy}{D^{n-2}}\Pi + \cdots + \varphi_{n-1} \underset{zy}{D}\Pi + \varphi_n \Pi = 0,$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ algebraische Formen von den Graden $-2m$, $-4m, \cdots -2nm$ sind, auf deren nähere Natur ich nicht eingehe.

§ 4.

Darstellung der ganzen Formenschaaren durch eine Basis.

Ein System von irgend n linear unabhängigen ganzen Formenschaaren der Classe nenne ich eine *„Basis“* der Classe.

Jede Formenschaar, die sich aus einer Basis mit Hülfe ganzer multiplicativer Formen als Coefficienten zusammensetzt, ist eine ganze

Form der Classe; jede gemeinsame Nullstelle der Coefficienten ist eine Nullstelle der dargestellten Form.

Aber das Umgekehrte, dass jede ganze Formenschaar der Classe durch die Basis vermittelst ganzer multiplicativer Formen als Coefficienten darstellbar sei und dass jede Nullstelle der dargestellten Formenschaar zugleich eine gemeinsame Nullstelle aller Coefficientenformen sei, — was beides auf dasselbe hinauskommt —, ist im Allgemeinen nicht richtig.

Eine Basis, welche diese Eigenschaft hat, dass sich durch sie alle ganzen Formenschaaren der Classe vermittelst ganzer Formen als Coefficienten darstellen, nenne ich eine „*Minimalbasis*".

Unter der *Determinante einer Basis* $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ verstehe ich die aus den n entsprechenden Zweigen der n Formenschaaren gebildete Determinante

$$D = \left| \Pi_h^{(k)} \right| \quad \begin{matrix} k = 1, 2, \dots n \\ h = 1, 2, \dots n. \end{matrix}$$

Die Determinante verschwindet an den Stellen e_i mindestens in der Ordnung $\lambda_i = \lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \dots + \lambda_{in}$ und hat im Uebrigen keine Unendlichkeitsstellen. Sie ist eine multiplicative Form, welche bei Umlauf um e_i den Multiplicator $e^{2i\pi\lambda_i}$, längs der Periodenwege $A_\varkappa$, $B_\varkappa$ die Multiplicatoren $\alpha'_\varkappa \alpha''_\varkappa \dots \alpha_\varkappa^{(n)}$, $\beta'_\varkappa \beta''_\varkappa \dots \beta_\varkappa^{(n)}$ erhält.

D hat also die Gestalt

$$D = \prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i} \,.\, F_q(z_1, z_2),$$

unter F_q eine unverzweigte ganze multiplicative Form vom Grade

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} \lambda_i$$

verstanden.

Wenn man irgend eine ganze Formenschaar der Classe durch die Basis darstellt, so können als Nenner der Coefficientenformen nur die Primfactoren von F_q auftreten. Ich bezeichne daher die Nullstellen von $F_q(z_1, z_2)$ als die „*Ausnahmepunkte*" der Basis, und zwar soll eine Stelle x ein „$\varkappa$*-facher Ausnahmepunkt*" heissen, wenn F_q daselbst, in Primformen gemessen, $\varkappa$-fach verschwindet.

Die Natur eines Ausnahmepunktes ist durch seine „*Elementarexponenten*" charakterisirt, welche in folgender Weise zu definiren sind:

Es sei zunächst x von jeder der Stellen e_i verschieden. Dann bedeute $\varkappa = \varkappa_1$ die Ordnung, in der die Determinante $\left|\Pi_h^k\right| \begin{matrix} k = 1, 2, \dots n \\ h = 1, 2, \dots n \end{matrix}$ an der Stelle x verschwindet, $\varkappa_2$ die Ordnung, in der alle ersten

Unterdeterminanten verschwinden, — wobei nicht ausgeschlossen ist, dass einzelne derselben, nur nicht alle, in höherer Ordnung verschwinden —, $\varkappa_3$ die Ordnung der zweiten Unterdeterminanten u. s. w., endlich $\varkappa_\nu$ die Ordnung der $(\nu-1)$ten Unterdeterminanten, während die νten Unterdeterminanten nicht mehr sämmtlich verschwinden mögen.

Die Differenzen

$$\varepsilon_1 = \varkappa_1 - \varkappa_2,\ \varepsilon_2 = \varkappa_2 - \varkappa_3,\ \ldots\ \varepsilon_{\nu-1} = \varkappa_{\nu-1} - \varkappa_\nu,\ \varepsilon_\nu = \varkappa_\nu,$$

welche sämmtlich positiv sind und den Ungleichungen

$$\varepsilon_1 \geqq \varepsilon_2 \geqq \cdot\ \cdot \geqq \varepsilon_{\nu-1} \geqq \varepsilon_\nu > 0$$

genügen, nenne ich, im Anschluss an den Weierstrass'schen Begriff der Elementartheiler, die „*Elementarexponenten*" der Stelle x.

Wenn x mit einer der Stellen e_i zusammenfällt, sind die Elementarexponenten in gleicher Weise, nur statt vermittelst des Formenschema's $\left|\Pi_h^{(k)}\right|$ vielmehr vermittelst des Systems $\left|\dfrac{\Pi_h^{(k)}}{P(ze_i)^{\lambda_{ih}}}\right|$ zu definiren.

In der Untersuchung der Natur eines solchen Ausnahmepunktes kann ich mich kurz fassen, indem ich auf eine Note von mir in Nr. 2 der Gött. Nachr. vom Jahre 1895 verweisen kann. Ich brauche nur anzugeben, welche Modificationen des dort angegebenen Beweises dadurch nothwendig werden, dass wir es hier mit Formen, statt mit Functionen, zu thun haben, und dass wir von den darzustellenden Formen dasselbe functionentheoretische Verhalten verlangen, wie es die Basisformen besitzen.

Man kann zuerst, eine passende Anordnung der Basisschaaren $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ vorausgesetzt, ν Systeme von Constanten

$$A_1^{(\nu+1)},\ A_1^{(\nu+2)}, \ldots A_1^{(n)};\ A_2^{(\nu+1)},\ A_2^{(\nu+2)}, \ldots A_2^{(n)}; \ldots A_\nu^{(\nu+1)},\ A_\nu^{(\nu+2)}, \ldots A_\nu^{(n)}$$

auf eindeutige Weise so bestimmen, dass gleichzeitig die $\nu.n$ Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&\Pi_h'(x_1,x_2) + A_1^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_1^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_1^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0,\\
&\Pi_h''(x_1,x_2) + A_2^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_2^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_2^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0,\\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\Pi_h^{(\nu)}(x_1,x_2) + A_\nu^{(\nu+1)}\Pi_h^{(\nu+1)}(x_1,x_2) + A_\nu^{(\nu+2)}\Pi_h^{(\nu+2)}(x_1,x_2) + \cdots + A_\nu^{(n)}\Pi_h^{(n)}(x_1,x_2) = 0
\end{aligned}$$

$$(h = 1, 2, \ldots n).$$

Man construire nun $n - \nu + 1$ ganz multiplicative Formen

$$A_1'(z_1, z_2),\ A_1^{(\nu+1)}(z_1, z_2),\ A_1^{(\nu+2)}(z_1, z_2), \ldots A_1^{(n)}(z_1, z_2)$$

deren Grade und Multiplicatoren sich mit denen der Schaaren

$$\Pi',\ \Pi^{(\nu+1)},\ \Pi^{(\nu+2)}, \ldots \Pi^{(n)}$$

zu ein und demselben Grade und Multiplicatorsystem ergänzen, und welche an der Stelle $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ die Werthe der Constanten $1, A_1^{(\nu+1)}, A_1^{(\nu+2)}, \ldots A_1^{(n)}$ besitzen. Die Construction solcher Formen ist bei hinreichend hoch gewähltem Grade immer möglich.

In gleicher Weise construire man $n - \nu + 1$ ganze multiplicative Formen

$$A_2''(z_1, z_2),\ A_2^{(\nu+1)}(z_1, z_2),\ A_2^{(\nu+2)}(z_1, z_2), \ldots A_2^{(n)}(z_1, z_2),$$

deren Grade und Multiplicatoren sich mit denen von

$$\Pi'',\ \Pi^{(\nu+1)},\ \Pi^{(\nu+2)}, \ldots \Pi^{(n)}$$

ergänzen und welche für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ die Werthe

$$1,\ A_2^{(\nu+1)},\ A_2^{(\nu+2)}, \ldots A_2^{(n)}$$

besitzen u. s. w.

Dann sind

$$\mathrm{P}' = \frac{A_1'(z_1, z_2)\Pi' + A_1^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_1^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_1^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

$$\mathrm{P}'' = \frac{A_2''(z_1, z_2)\Pi'' + A_2^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_2^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_2^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

$$\vdots$$

$$\mathrm{P}^{(\nu)} = \frac{A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu)} + A_\nu^{(\nu+1)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+1)} + A_\nu^{(\nu+2)}(z_1, z_2)\Pi^{(\nu+2)} + \cdots + A_\nu^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{P(z, x)},$$

wieder ganze Formenschaaren der Classe, und $\mathrm{P}', \mathrm{P}'', \ldots \mathrm{P}^{(\nu)}, \Pi^{(\nu+1)}, \ldots \Pi^{(n)}$ wieder eine Basis und zwar mit der Determinante:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\lambda_i} \cdot F_q(z_1, z_2) \cdot \frac{A_1'(z_1, z_2) \cdot A_2''(z_1, z_2) \ldots A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)}{P(z, x)^\nu},$$

Die Ordnung des Ausnahmepunktes x ist hierdurch um ν erniedrigt, und zwar so, dass jeder der ν Elementarexponenten um 1 verkleinert ist, wofür man den Beweis in der genannten Note in den Gött. Nachr. nachsehen mag.

Durch Wiederholung des geschilderten Verfahrens beweist man genau, wie an der genannten Stelle, den Satz:

Wenn $e_1, e_2, \ldots e_\nu$ die Elementarexponenten der Stelle x sind, nach abnehmender Grösse geordnet, so können die Darstellungscoefficienten $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ einer ganzen Formenschaar:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

an der Stelle x bis zur Ordnung e_1 unendlich werden; und zwar enthalten die e_1-fach unendlich werdenden Entwicklungsglieder der $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ so viele willkürliche Constanten linear und homogen, als Elementarexponenten $= e_1$ sind, die $e_1 - 1$-fach unendlich werdenden Glieder neben

den schon genannten so viele neue willkürliche Constanten linear und mit den ersteren zusammengenommen homogen, als Elementarexponenten $\geqq e_1 - 1$ *sind, die* $e_1 - 2$*-fach unendlich werdenden Glieder so viele weitere willkürliche Constanten, als Elementarexponenten* $\geqq e_1 - 2$ *sind, u. s. w.*

Die Gesammtzahl der willkürlichen Constanten in den unendlich werdenden Entwicklungsgliedern ist

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_\nu = \varkappa,$$

d. h. gleich der Multiplicität des Ausnahmepunktes.

Der Satz bleibt auch richtig, wenn x mit einer der Stellen e_i zusammenfällt; man hat beim Beweise nur statt mit dem Formensystem $\Pi_h^{(k)}$ mit dem System $\dfrac{\Pi_h^{(k)}}{P(z\,e_i)^{\lambda_{ih}}}$ zu operiren.

§ 5.

Specielle Folgerungen.

Die späteren Untersuchungen können wir so führen, dass nur zwei Specialfälle des aufgestellten allgemeinen Satzes benutzt zu werden brauchen, und ich will diese beiden Specialfälle daher noch besonders hervorheben.

1) *Einfacher Ausnahmepunkt:*

$$\varkappa_1 = 1, \; \nu = 1, \; e_1 = 1.$$

Die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *können an der Stelle* $z = x$ *je einfach unendlich werden mit Coefficienten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$*, die in dem wohlbestimmten Verhältniss stehen müssen*

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots : \alpha_n = A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

wo die $A_1, A_2, \ldots A_n$ den nicht durchweg verschwindenden zu einer Zeile gehörigen Unterdeterminanten der Determinante $|\Pi_h^{(k)}(x_1, x_2)|$ proportional sind.

2) $(n-1)$*-facher Ausnahmepunkt mit* $n-1$ *Elementarexponenten:*

$$\varkappa = n - 1, \; \nu = n - 1, \; e_1 = e_2 = \cdots = e_{n-1} = 1.$$

Die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *können an der Stelle* $z = x$ *je einfach unendlich werden mit Coefficienten* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$*, die der einzigen wohlbestimmten Gleichung genügen müssen:*

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n = 0,$$

wo die $A_1, A_2, \ldots A_n$ den nicht durchweg verschwindenden Gliedern einer Zeile der Determinante $|\Pi_h^{(k)}(x_1, x_2)|$ proportional sind.

Die Wichtigkeit dieser beiden speciellen Sätze, unmittelbar des ersten, beruht auf folgendem Satz, dessen Richtigkeit ebenfalls aus den Ueberlegungen des vorigen Paragraphen folgt:

Man kann stets eine Basis finden, welche nur einfache Ausnahmepunkte besitzt.

Denn indem man von der Basis $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ zu der Basis $P', P'', \dots P^{(\nu)}, \Pi^{(\nu+1)}, \dots \Pi^{(n)}$ übergeht, erniedrigt man die Multiplicität des Ausnahmepunktes x um ν. Wählt man dabei, — was stets möglich ist —, die multiplicativen Formen $A_1'(z_1, z_2)$, $A_2''(z_1, z_2)$, ... $A_\nu^{(\nu)}(z_1, z_2)$ so, dass ihr Product nur einfache Nullstellen besitzt, die von den Nullstellen der Form $F_q(z_1, z_2)$ sämmtlich verschieden sind, so hat man damit weder die Multiplicität eines andern Ausnahmepunktes erhöht, noch einen neuen mehrfachen Ausnahmepunkt eingeführt. Durch Wiederholung des Verfahrens kann man schliesslich erreichen, dass nur einfache Ausnahmepunkte übrig bleiben.

In dem speciellen Falle $p = 0$ kann man noch weiter gehen:

Wenn $p = 0$ ist, kann man stets eine Minimalbasis, d. h. eine Basis ohne Ausnahmepunkte finden.

Wenn nämlich $p = 0$ ist, kann ich als unabhängige Variable z eine einwerthige Function des algebraischen Gebildes zu Grunde legen, d. h. in einer schlichten z-Ebene operiren. Die Multiplicatoren kommen in Wegfall, die $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_n$ werden rationale Formen, $P(z, x)$ geht in die Determinante $(z, x) = z_1 x_2 - z_2 x_1$ über. Die Nullstellen irgend einer ganzen rationalen Form beliebigen Grades unterliegen ihrer Lage nach keiner Beschränkung.

Wenn nun x eine Ausnahmestelle der Basis $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ ist, so kann ich mindestens eine ganze Formenschaar von der Gestalt finden

$$P = \frac{A'(z_1, z_2)\Pi' + A''(z_1, z_2)\Pi'' + \cdots + A^{(n)}(z_1, z_2)\Pi^{(n)}}{(zx)},$$

in welcher nicht alle Formen $A', A'', \dots A^{(n)}$ bei $z = x$ verschwinden. Diejenigen der Formen, welche bei $z = x$ verschwinden, kann ich geradezu durch 0 ersetzen unbeschadet der Eigenschaft von P, eine ganze Formenschaar zu sein. Von den hiernach im Ausdruck von P noch übrig bleibenden Schaaren $\Pi', \Pi'', \dots \Pi^{(n)}$ habe $\Pi^{(\alpha)}$ den höchsten Grad. Dann kann ich den Coefficienten $A^{(\alpha)}(z_1, z_2)$ direct als eine Constante, etwa 1 annehmen, und die übrigen Coefficienten doch noch als ganze rationale Formen so bestimmen, dass P bei x nicht unendlich wird. Führe ich nun das so gefundene P statt $\Pi^{(\alpha)}$ in die Basis ein, so wird hierdurch die Determinante der Basis einfach durch (zx) dividirt, ohne dass neue Nullstellen eingeführt würden; durch Fortsetzung des Verfahrens kann man also alle Ausnahmepunkte beseitigen, w. z. b. w.

§ 6.

Einordnung der Fälle mit ganzzahligen Exponentendifferenzen.

Wir haben bei den Betrachtungen über Basisdarstellungen bisher die Fälle ausgeschlossen, wo eine Substitution S_i mehrere Elementartheiler mit derselben Nullstelle besitzt.

Denn die Angabe über das Verhalten einer Basisdeterminante an der Stelle e_i beruht wesentlich darauf, dass den Fundamentalzweigen einer Schaar Π', d. h. den Zweigen, welche zu den Exponenten λ_{i1}, $\lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ gehören, nur auch wieder die Fundamentalzweige einer andern Formenschaar Π'' cogredient sein können. Dies ist aber nur dann richtig, wenn die Substitution S_i nur solche Transformationen in sich gestattet, bei denen die Fundamentalzweige Fundamentalzweige bleiben, und dies ist nur dann der Fall, wenn die Elementartheiler der charakteristischen Function von S_i lauter verschiedene Nullstellen haben.*)

Es sei jetzt S eine solche der Substitutionen S_i, deren charakteristische Function mehrere Elementartheiler mit derselben Nullstelle α und den Elementarexponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_q$ besitzen möge. Wir brauchen die Aufmerksamkeit nur auf diejenigen $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_q$ Fundamentalzweige von Π' zu richten, welche diesen Elementartheilern entsprechen, da bei einer Transformation von S in sich selbst diese Zweige sich nur untereinander substituiren können. Man kann dann diese ε Fundamentalzweige so heraussuchen, dass ihre Substitution die Gestalt hat:

$$S = \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline S_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & S_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline 0 & 0 & & & S_q \\ \hline \end{array}\,.$$

Hierin bedeutet das in der μten Zeile und νten Colonne stehende Feld ein Coefficientenschema von ε_μ Zeilen und ε_ν Colonnen, nämlich

*) Für die Elementartheilertheorie der linearen Substitutionen vergleiche man die pag. 164 citirte Abhandlung von Frobenius.

$$\boxed{S_\nu} = \left|\begin{array}{cccccc} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \alpha \end{array}\right|, \qquad \boxed{0} = \left|\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right|.$$

Eine Substitution U, durch welche S in sich selbst transformirt wird:

$$USU^{-1} = S,$$

hat die allgemeine Gestalt:

$$U = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline U_{11} & U_{12} & \cdot & \cdot & U_{1q} \\ \hline U_{21} & U_{22} & \cdot & \cdot & U_{2q} \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline U_{q1} & U_{q2} & \cdot & \cdot & U_{qq} \\ \hline \end{array}$$

und zwar sind in dem einzelnen, aus ε_μ Zeilen und ε_ν Colonnen bestehenden Theilschema $U_{\mu\nu}$ alle diejenigen Glieder, welche in einer Diagonalreihe stehen, einander gleich und nur dann von 0 verschieden, wenn die betr. Diagonalreihe in der ersten Colonne und in der letzten Zeile endigt, also z. B.

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{array}{ccc} u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} \end{array}\right| \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = \varepsilon_\nu = 3;$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{array}{cccc} u'_{\mu\nu} & 0 & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \end{array}\right| \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = 3;\ \varepsilon_\nu = 4;$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ u'_{\mu\nu} & 0 & 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & 0 \\ u'''_{\mu\nu} & u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} \end{array}\right| \quad \text{für} \quad \varepsilon_\mu = 4,\ \varepsilon_\nu = 3.$$

Denken wir uns die Elementartheiler so geordnet, dass

$$\varepsilon_1 \leqq \varepsilon_2 \leqq \varepsilon_3 \leqq \cdots \leqq \varepsilon_q$$

ist, so ist

$$U_{\mu\mu} = \left|\begin{matrix} u'_{\mu\nu} & 0 & \dots 0 \\ u''_{\mu\mu} & u'_{\mu\mu} & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ u^{(\varepsilon_\mu)}_{\mu\mu} & u^{(\varepsilon_\mu - 1)}_{\mu\mu} & \dots u'_{\mu\mu} \end{matrix}\right|,$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{matrix} u'_{\mu\nu} & 0 & \dots 0 & 0 \dots 0 \\ u'_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & \dots 0 & 0 \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ u^{(\varepsilon_\mu)}_{\mu\nu} & u^{(\varepsilon_\mu - 1)}_{\mu\nu} & \dots u'_{\mu\nu} & 0 \dots 0 \end{matrix}\right|, \quad \text{wenn } \mu < \nu,$$

$$U_{\mu\nu} = \left|\begin{matrix} 0 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots 0 \\ u'_{\mu\nu} & 0 & \dots 0 \\ u''_{\mu\nu} & u'_{\mu\nu} & \dots 0 \\ \vdots & & \\ u^{(\varepsilon_\nu)}_{\mu\nu} & u^{(\varepsilon_\nu - 1)}_{\mu\nu} & \dots u'_{\mu\nu} \end{matrix}\right|, \quad \text{wenn } \mu > \nu.$$

Die Fundamentalzweige von Π' seien, den Elementartheilern entsprechend in Gruppen (Hamburger'sche Untergruppen nach der in der Theorie der linearen Differentialgleichungen üblichen Bezeichnung) eingetheilt:

$$y^{(1)}_1, y^{(1)}_2, \dots y^{(1)}_{\varepsilon_1};\ y^{(2)}_1, y^{(2)}_2, \dots y^{(2)}_{\varepsilon_2};\ \dots;\ y^{(q)}_1, y^{(q)}_2, \dots y^{(q)}_{\varepsilon_q},$$

ihre Exponenten

$$\lambda^{(1)}_1, \lambda^{(1)}_2, \dots \lambda^{(1)}_{\varepsilon_1};\ \lambda^{(2)}_1, \lambda^{(2)}_2, \dots \lambda^{(2)}_{\varepsilon_2};\ \dots;\ \lambda^{(q)}_1, \lambda^{(q)}_2, \dots \lambda^{(q)}_{\varepsilon_q}.$$

Dabei sind die Exponenten in jeder der Gruppen nach abnehmendem reellen Theil geordnet.

Durch die Transformation U gehen die Zweige in

$$Y^{(1)}_1,\ Y^{(1)}_2, \dots Y^{(1)}_{\varepsilon_1};\ Y^{(2)}_1,\ Y^{(2)}_2, \dots Y^{(2)}_{\varepsilon_2};\ \dots;\ Y^{(q)}_1,\ Y^{(q)}_2, \dots Y^{(q)}_{\varepsilon_q}$$

über, und zwar sind die Y der Reihe nach lineare Combinationen folgender Zweige y:

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_1}^{(1)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(2)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots\ y_{\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)};\ y_1^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)},\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_2}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots, y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_1^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)} \\
Y_2^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)}, y_2^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_3-\varepsilon_2,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{von} & y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)};\ \ldots\ y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
Y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)};\ y_1^{(2)}; y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+2}^{(q)} \\
\vdots & & \\
Y_{\varepsilon_3}^{(3)} & \text{von} & y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \ldots y_{\varepsilon_1}^{(1)};\ y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \ldots y_{\varepsilon_2}^{(2)};\ y_1^{(3)}, y_2^{(3)}, \ldots y_{\varepsilon_3}^{(3)}; \ldots y_1^{(q)}, y_2^{(q)}, \ldots y_{\varepsilon_3}^{(q)}
\end{array}\right\}\ \varepsilon_1,$$

u. s. w.

Die Exponenten der Zweige Y werden danach im Allgemeinen kleiner sein als diejenigen der entsprechenden Zweige y, nämlich gleich dem niedrigsten Exponenten, den einer der Zweige y hat, aus denen sich

das betreffende Y zusammensetzt. Sind $(\lambda)_1{}^1$, $(\lambda)_2{}^1$ u. s. w. die Exponenten der Y, so ist also:

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^1 & \text{die kleinste der Zahlen} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
(\lambda)_2^{(1)} & \text{„ „} & \lambda_2^{(1)}, \lambda_2^{(2)}, \ldots \lambda_2^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_1}^{(1)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^{(2)} & \text{„ „} & \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)} & \text{„ „} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_2}^{(2)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2}^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_1^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_1^{(3)}, \ldots \lambda_1^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_3-\varepsilon_2,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_1^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_2+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_2-\varepsilon_1,$$

$$\left.\begin{array}{lll}
(\lambda)_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_1^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2-\varepsilon_1+1}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3-\varepsilon_1+1}^{(q)} \\
\vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_3}^{(3)} & \text{„ „} & \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_{\varepsilon_2}^{(2)}, \lambda_{\varepsilon_3}^{(3)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_3}^{(q)}
\end{array}\right\} \varepsilon_1$$

u. s. w.

Die Exponenten $\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_1}^{(1)}, \lambda_1^{(2)}, \ldots \lambda_{\varepsilon_q}^{(q)}$, die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung der zu Π gehörigen linearen Differentialgleichung, will ich die eigentlichen, die Zahlen

$$(\lambda)_1^{(1)}, (\lambda)_2^{(1)}, \ldots (\lambda)_{\varepsilon_q}^{(q)}$$

die modificirten Exponenten von Π an der Stelle e_i nennen.

Um jetzt wieder zur früheren Bezeichnung der Exponenten einer Stelle e_i zurückzukehren, seien $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ die eigentlichen,

$(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$ die modificirten Exponenten, wobei natürlich diejenigen Exponenten, welche zu Elementartheilern mit lauter verschiedenen Nullstellen gehören, mit den entsprechenden modificirten Exponenten übereinstimmen.

Wenn nun die Zweige $\Pi_1', \Pi_2', \ldots \Pi_n'$ auch so ausgewählt sind, dass sie gerade zu den Eponenten $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ gehören, dass also $\frac{\Pi_1'}{P(ze_i)^{\lambda_{i1}}}, \frac{\Pi_2'}{P(ze_i)^{\lambda_{i2}}}, \ldots \frac{\Pi'_n}{P(ze_i)^{\lambda_{in}}}$ bei e_i endlich bleiben oder höchstens logarithmisch unendlich werden (letzteres nur in dem Falle, wenn mehrere gleiche Exponenten vorkommen), so brauchen doch die entsprechenden zu einer verwandten Formenschaar Π'' gebildeten Ausdrücke $\frac{\Pi_1''}{P(ze_i)^{\lambda_{i1}}}, \frac{\Pi_2''}{P(ze_i)^{\lambda_{i2}}}, \ldots \frac{\Pi_n''}{P(ze_i)^{\lambda_{in}}}$, selbst wenn Π'' genau dieselben oder grössere Exponenten $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ besitzt, wie Π', bei e_i nicht endlich zu bleiben.

Erst die Ausdrücke

$$\frac{\Pi_1}{P(zz_i)^{(\lambda)_{i1}}}, \frac{\Pi_2}{P(ze_i)^{(\lambda)_{i2}}}, \ldots \frac{\Pi_n}{P(ze_i)^{(\lambda)_{in}}}$$

müssen für alle Formenschaaren Π, deren Exponenten grösser oder gleich $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \lambda_{in}$ sind, endlich bleiben.

Aber letztere Ausdrücke können auch noch dann endlich bleiben, wenn einzelne Exponenten kleiner sind als $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$, wenn also Π nach der früheren Definition in Bezug auf $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ als Normalexponenten bei e_i eine Unendlichkeitsstelle besässe; es dürfen eben nur die modificirten Exponenten von Π nicht kleiner sein als $(\lambda)_{i1}$, $(\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$. Das führt uns darauf, für die Definition des Unendlichwerdens an einer Stelle e_i überhaupt nicht die eigentlichen, sondern die modificirten Exponenten zu Grunde zu legen. Wir sagen also, nachdem wir ein System modificirter Exponenten $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots$ $(\lambda)_{in}$ als Normalsystem festgelegt haben:

Eine Formenschaar Π heisst bei $z = e_i$ endlich, wenn die Formen

$$\frac{\Pi_1}{P(ze_i)}(\lambda)_{i1}, \frac{\Pi_2}{P(ze_i)}(\lambda)_{i2}, \ldots \frac{\Pi_n}{P(ze_i)}(\lambda)_{in}$$

bei e_i höchstens logarithmisch unendlich werden; e_i ist eine Unendlichkeitsstelle, wenn mindestens eine dieser Formen auch algebraisch unendlich wird, eine Nullstelle, wenn alle Formen verschwinden.

Hierbei sind unter $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ solche n Zweige von Π verstanden, deren Substitution die zu Anfang dieses Paragraphen benutzte Normalform hat.

Für die Determinante einer Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ ergiebt sich der Satz: *Die Determinante einer Basis verschwindet bei e_i mindestens in*

der Ordnung $(\lambda)_i = (\lambda)_{i1} + (\lambda)_{i2} + \cdots + (\lambda)_{in}$, *hat also den allgemeinen Ausdruck*

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{(\lambda)_i} \cdot F_q(z_1, z_2)$$

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i .$$

Die Ausnahmepunkte der Basis, einschliesslich der etwa in den Punkten e_i *liegenden, sind durch die Nullstellen von* F_1 *gegeben.*

Hier ordnet sich nun auch die arithmetische Theorie der *algebraischen Functionen* ein, wie sie von Weber und Dedekind*), Kronecker**), Hensel***) untersucht worden ist.

Alle zu einer vorgegebenen n-blättrigen Riemann'schen Fläche gehörigen algebraischen Functionen und Formen kann man nämlich als n-gliedrige Formenschaaren in der schlichten z-Ebene, also von $p = 0$ auffassen, deren Zweige bei geschlossenen Umläufen von z um gewisse Punkte der z-Ebene, nämlich um die Punkte z, über denen Verzweigungsstellen der Riemann'schen Fläche liegen, sich permutiren, d. h. eine specielle Art linearer Substitutionen erleiden.

Mögen an einer Stelle e_i ein ν_1-, ν_2-, .. ν_q-blättriger Verzweigungspunkt der Riemann'schen Fläche über einander liegen, ausserdem vielleicht r schlichte Blätter, so dass

$$\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_q + r = n$$

ist. Man sagt dann von irgend einer algebraischen Form, sie sei an der Stelle e_i endlich, wenn ihre modificirten Exponenten an der Stelle nicht kleiner sind als

$$0, \frac{1}{\nu_1}, \frac{2}{\nu_1}, \cdots \frac{\nu_1 - 1}{\nu_1}; \; 0, \frac{1}{\nu_2}, \frac{2}{\nu_2}, \cdots \frac{\nu_2 - 1}{\nu_2}; \cdots 0, \frac{1}{\nu_q}, \frac{2}{\nu_q}, \cdots \frac{\nu_q - 1}{\nu_q};$$
$$0;\; 0;\; ..\; 0.$$

Legen wir also diese als Normalexponenten zu Grunde, so wird

$$(\lambda)_i = (\lambda)_{i1} + (\lambda)_{i2} + \cdots + (\lambda)_{in} = \frac{\nu_1 - 1}{2} + \frac{\nu_2 - 1}{2} + \cdots + \frac{\nu_q - 1}{2};$$

$(\lambda)_i$ ist die halbe Gesammtmultiplicität der an der Stelle e_i über einander liegenden Verzweigungspunkte der Riemann'schen Fläche.

Wir haben also folgende Sachlage:

Wir können alle algebraischen Functionen und Formen der Fläche durch eine Basis $\Pi', \Pi'', .. \Pi^{(n)}$ *von ganzen algebraischen Formen rational darstellen.*

---

*) Crelle's Journal Bd. 92.

**) Ebenda Bd. 92.

***) Ebenda Bd. 109. 111.

Die Determinante der Basis ist ein Ausdruck von der Gestalt

$$\prod_{i=1}^{i=s} (z e_i)^{\frac{\nu_i - 1}{2}} \, . \, F_q(z_1, z_2),$$

worin das Product über alle Verzweigungspunkte der Fläche zu erstrecken ist, und $F_q(z_1, z_2)$ eine ganze rationale Form vom Grade

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdot \cdot + \delta_n - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=s}(\nu_i - 1)$$

ist, deren Nullstellen die Ausnahmestellen der Basis sind.

Da $p = 0$ ist, *so können wir stets eine Minimalbasis finden, durch welche sich alle ganzen algebraischen Formen linear mit ganzen rationalen Coefficienten darstellen lassen.* Die Grade einer solchen müssen der Relation genügen

$$\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i=s}(\nu_i - 1).$$

Die Summe auf der rechten Seite können wir durch die Blätterzahl n und das Geschlecht p der Riemann'schen Fläche ausdrücken. Wir bekommen so

Anzahl der Ausnahmepunkte:	$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdot \cdot + \delta_n - n - p + 1.$
Minimalbasis:	$\delta_1 + \delta_2 + \cdot \cdot + \delta_n = n + p - 1.$

Die Determinante ist die Quadratwurzel dessen, was Weber, Dedekind und Kronecker als Discriminante der Basis bezeichnen, das Product $\Pi(z e_i)^{\frac{\nu_i - 1}{2}}$ ist die Quadratwurzel aus dem wesentlichen, $F_q(z_1, z_2)$ diejenige aus dem ausserwesentlichen Theil der Discriminante, welcher ja in der That ein Quadrat ist.

§ 7.

Reciproke Formenschaaren.

Es werde jetzt jedem der s singulären Punkte e_i eine bestimmte Zahl μ_i zugeordnet. Unter Φ möge irgend eine derjenigen multiplicativen Formen vom Grade $2p - 2$ verstanden werden, welche bei canonischer Darstellung algebraisch sind (44 § 10).

Ich nenne dann zwei Formenschaaren Π und Ω reciproke Formenschaaren, wenn zwischen ihren entsprechenden Zweigen eine Identität folgender Gestalt besteht:

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n = \prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\mu_i} \, . \, \Phi(z_1, z_2).$$

Damit zwei Formenschaaren auf einer Riemann'schen Fläche in diesem Sinne reciprok zu einander sind, ist, wie leicht zu sehen, nothwendig und hinreichend, dass sich ihre Grade δ und δ' zu

$$2p-2+\sum_{i=1}^{i=s}\mu_i$$

ergänzen, und dass sich ihre entsprechenden Substitutionen von contragredienten Substitutionen nur um solche Multiplicatoren unterscheiden, die sich zu den Multiplicatoren der rechts stehenden Form ergänzen; letztere sind durch die Auswahl der unabhängigen Variablen z_1, z_2 und der Zahlen μ_i vollständig bestimmt, nämlich bei kanonischen Variablen z_1, z_2 (44, § 7)

bei einem Umlauf S: $\quad e^{2i\pi\mu_i}$,

bei einem Periodenweg $A_\varkappa$: $\quad e^{-\sum\limits_\alpha \eta_{\alpha\varkappa}\left(\mu_1 W_\alpha^{e_1}+\mu_2 W_\alpha^{e_2}+\cdots+\mu_s W_\alpha^{e_s}\right)}$,

bei einem Periodenweg $B_\varkappa$: $\quad e^{-\sum\limits_\alpha' \eta_{\alpha\varkappa}\left(\mu_1 W_\alpha^{e_1}+\mu_2 W_\alpha^{e_2}+\cdots+\mu_s W_\alpha^{e_s}\right)}$.

Bildet man zu allen Formenschaaren einer Classe die sämmtlichen reciproken Formenschaaren, so bilden die letzteren ebenfalls eine Classe, welche ich die *„reciproke Classe"* nennen will. Man hat dann den Satz:

Ist Π eine Formenschaar der einen Classe, Ω eine Formenschaar der reciproken Classe, so besteht eine Identität:

$$\Pi_1\Omega_1+\Pi_2\Omega_2+\cdots+\Pi_n\Omega_n=\prod_{i=1}^{i=s}P(ze_i)^{\mu_i}\,.\,\Psi(z_1,z_2),$$

unter Ψ eine unverzweigte multiplicative Form vom Grade $\delta+\delta'-\sum\limits_{i=1}^{i=s}\mu_i$ verstanden.

Umgekehrt, wenn eine solche Identität besteht, gehören Π und Ω zu reciproken Classen.

Wenn sich die Exponenten einer Formenschaar Π bei e_i von $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden können, so können sich, wie leicht zu sehen, die Exponenten einer Formenschaar Ω der reciproken Classe von $\mu_i-\lambda_{i1}$, $\mu_i-\lambda_{i2}, \ldots \mu_i-\lambda_{in}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden. Es möge zuerst wieder der Fall des § 6 ausgeschlossen sein. Wenn dann $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$ die Normalexponenten der einen Classe sind, so will ich als Normalexponenten für die reciproke Classe die Zahlen $\lambda'_{i1}=\mu_i-\lambda_{i1}$, $\lambda'_{i2}=\mu_i-\lambda_{i2}$, $\lambda'_{in}=\mu_i-\lambda_{in}$ festlegen. Damit ist zugleich bestimmt, was man unter einer ganzen Formenschaar der Classe Ω, und was man unter einer Basis zu verstehen hat. Ich behaupte jetzt:

Wenn eine Basis der Formenclasse Π *gegeben ist, so kann man aus ihr stets auf einfache Weise eine Basis der reciproken Formenclasse* Ω *construiren.*

Man bilde nämlich die n^2 ersten Unterdeterminanten des Schemas:

$$\begin{matrix} \Pi_1' & \Pi_1'' & \ldots & \Pi_1^{(n)} \\ \Pi_2' & \Pi_2'' & \ldots & \Pi_2^{(n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Pi_n' & \Pi_n'' & \ldots & \Pi_n^{(n)}, \end{matrix}$$

multiplicire dieselben mit $\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\mu_i - \lambda_i}$ und bezeichne die so erhaltenen Formen mit:

$$\begin{matrix} \Omega_1' & \Omega_1'' & \ldots & \Omega_1^{(n)} \\ \Omega_2' & \Omega_2'' & \ldots & \Omega_2^{(n)} \\ \vdots & & & \vdots \\ \Omega_n' & \Omega_n'' & \ldots & \Omega_n^{(n)}. \end{matrix}$$

Fasst man dann die in einer Colonne stehenden Formen $\Omega_1^{(k)}, \Omega_2^{(k)}, \ldots \Omega_n^{(k)}$ als Zweige einer Formenschaar $\Omega^{(k)}$ auf, so bilden $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(k)}$ thatsächlich eine Basis der reciproken Classe.

Wenn die Determinante der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ der ersten Formenclasse

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i} F_q(z_1, z_2)$$

ist, so heisst die Determinante der zur reciproken Formenclasse gehörigen Basis $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{n\mu_i - \lambda_i} F_q(z_1, z_2)^{n-1},$$

oder, wenn ich

$$\lambda'_{i1} + \lambda'_{i2} + \cdots + \lambda'_{in} = n\mu_i - \lambda_i = \lambda'_i$$

setze:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda'_i} F_q(z_1, z_2)^{n-1}.$$

Man sieht hieraus zugleich Folgendes:

Jeder Ausnahmepunkt der Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ *ist ein Ausnahmepunkt der Basis* $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ *von* $(n-1)$*facher* ***Multiplicität.***

Es erhebt sich dabei sofort die Frage, welches die Elementarexponenten eines solchen Ausnahmepunktes in Bezug auf die Basis

$\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ sind, wenn seine Elementarexponenten in Bezug auf die Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ bekannt sind.

Zur Beantwortung dieser Frage stütze ich mich auf folgenden Determinantensatz:

Es werde mit $\alpha_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu}$ eine Determinante bezeichnet, die aus dem Schema

$$\begin{array}{l} \alpha_1^{\,1},\ \alpha_1^{\,2}, \ldots \alpha_1^n \\ \alpha_2^{\,1},\ \alpha_2^{\,2}, \ldots \alpha_2^n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \alpha_n^1,\ \alpha_n^2, \ldots \alpha_n^n \end{array}$$

die $\varkappa_1$-, $\varkappa_2$-, $\ldots$ $\varkappa_\mu$^te^ Colonne und die i_1-, i_2-, $\ldots$ i_μ^te^ Zeile enthält; die Gesammtdeterminante des Schemas sei A.

Es seien ferner

$$\begin{array}{l} A_1^{\,1},\ A_1^{\,2}, \ldots A_1^n \\ A_2^{\,1},\ A_2^{\,2}, \ldots A_2^n \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ A_n^1,\ A_n^2, \ldots A_n^n \end{array}$$

die ersten Unterdeterminanten des Schemas der $\alpha_i^\varkappa$, und die Unterdeterminanten des Schemas der $A_i^\varkappa$ mögen in entsprechender Weise, wie bei den $\alpha_i^\varkappa$ mit $A_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu}$ bezeichnet werden.

Dann besteht der Satz:

$$A_{i_1, i_2, \ldots i_\mu}^{\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu} = \pm\, \alpha_{i_1', i_2', \ldots i_{n-\mu}'}^{\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa_{n-\mu}'} \cdot A^{\mu-1}$$

wo unter $i_1', i_2', \ldots i_{n-\mu}'$ bezw. $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa_{n-\mu}'$ diejenigen Zahlen verstanden werden, welche man erhält, wenn man von den Zahlen $1, 2, \ldots n$ die Zahlen $i_1, i_2, \ldots i_\mu$ bezw. $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_\mu$ weglässt, und worin das Vorzeichen $\pm$ von der Reihenfolge der Zahlen $i_1', i_2' \ldots$ $\ldots i_{n-\mu}'$ bezw. $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots \varkappa_{n-\mu}'$ abhängt.

Hieraus folgt, wenn $\varkappa_1', \varkappa_2', \ldots, \varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ dieselbe Bedeutung für die Basis $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ haben, wie $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ für die Basis $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ (§ 4):

$$\varkappa_\mu' = \varkappa_{n-\mu+2} + (n-\mu)\varkappa_1$$
$$\varepsilon_\mu' = \varkappa_1 - \varepsilon_{n-\mu+1}.$$

Wenn also ν Elementarexponenten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_\nu$ von Null verschieden sind, so sind von den Elementarexponenten $\varepsilon_1', \varepsilon_2', \ldots$ die ersten $n-\nu$ sämmtlich gleich $\varkappa_1$, die folgenden ν dagegen um $\varepsilon_\nu, \varepsilon_{\nu-1}, \ldots$ $\ldots \varepsilon_1$ kleiner als $\varkappa_1$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \cdots = \varepsilon'_{n-\nu} &= \varkappa_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_\nu \\
\varepsilon'_{n-\nu+1} &= \varkappa_1 - \varepsilon_\nu \\
\varepsilon'_{n-\nu+2} &= \varkappa_1 - \varepsilon_{\nu-1} \\
&\vdots \\
\varepsilon'_n &= \varkappa_1 - \varepsilon_1 .
\end{aligned}$$

Wenn x speciell ein *einfacher Ausnahmepunkt* für die Basis Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ ist, so ist

$$\varepsilon_1 = 1, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = \varepsilon_\nu = 0,$$

also

$$\varepsilon_1' = \varepsilon_2' = \cdots = \varepsilon'_{n-1} = 1, \quad \varepsilon'_n = 0.$$

x ist also für Ω', Ω'', ... $\Omega^{(n)}$ zwar ein $(n-1)$facher Ausnahmepunkt, doch können die Zusammensetzungscoefficienten einer ganzen Formenschaar Ω an der Stelle x nur einfach unendlich werden, und zwar so, dass die n Coefficienten des Unendlichwerdens nur einer einzigen homogenen linearen Gleichung zu genügen brauchen.

Des Genauern liegt die Sache so:

Wenn x ein einfacher Ausnahmepunkt der Basis Π', Π'', ... $\Pi^{(n)}$ ist, so giebt es in dem Schema

$$\begin{matrix}
\Pi_1' & \Pi_1'' & \ldots & \Pi_1^{(n)} \\
\Pi_2' & \Pi_2'' & \ldots & \Pi_2^{(n)} \\
\vdots & & & \\
\Pi_n' & \Pi_n'' & \ldots & \Pi_n^{(n)}
\end{matrix}$$

mindestens eine Zeile, deren zugehörige erste Unterdeterminanten für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ nicht sämmtlich verschwinden. Das Verhältniss der Werthe dieser Unterdeterminanten an der Stelle x ist wegen des Verschwindens der Gesammtdeterminante ein wohlbestimmtes, von der Auswahl der Zeile unabhängiges, etwa

$$A_1 : A_2 : \cdots : A_n .$$

Andererseits giebt es wegen $\varepsilon_n = 0$ in dem reciproken Schema:

$$\begin{matrix}
\Omega_1' & \Omega_1'' & \ldots & \Omega_1^{(n)} \\
\Omega_2' & \Omega_2'' & \ldots & \Omega_2^{(n)} \\
\vdots & & & \vdots \\
\Omega_n' & \Omega_n'' & \ldots & \Omega_n^{(n)}
\end{matrix}$$

mindestens eine Zeile, deren Glieder für $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$ nicht sämmtlich verschwinden, und diese Glieder stehen, wegen des Verschwindens der $(n-1)^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten, an der Stelle $z = x$ in einem wohlbestimmten, von der Auswahl der Zeile unabhängigen Verhältniss, nämlich in genau demselben Verhältniss

$$A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

wie aus der Definition der Ω unmittelbar folgt.

Wir haben dann folgenden Satz:

In einer ganzen Formenschaar:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)}$$

dürfen die $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ je einfach unendlich werden mit Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, welche in dem Verhältniss stehen:

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots : \alpha_n = A_1 : A_2 : \cdots : A_n,$$

und in einer ganzen Formenschaar:

$$\Omega = \psi_2 \Omega' + \psi_2 \Omega'' + \cdots + \psi_n \Omega^{(n)}$$

dürfen die $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_n$ je einfach unendlich werden mit Coefficienten $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, welche der Gleichung genügen:

$$A_1 \beta_1 + A_2 \beta_2 + \cdots + A_n \beta_n = 0.$$

Jede Formenschaar Π lässt sich durch $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$, jede Formenschaar Ω durch $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ linear ausdrücken:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$
$$\Omega = \psi_1 \Omega' + \psi_2 \Omega'' + \cdots + \psi_n \Omega^{(n)}.$$

Bildet man den Ausdruck

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n,$$

so erhält man

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \psi_1 \cdot \sum_i \Pi'_i \Omega'_i + \varphi_1 \psi_2 \sum_i \Pi'_i \Omega''_i + \cdots + \varphi_1 \psi_n \sum_i \Pi'_i \Omega^{(n)}_i \\
+ &\varphi_2 \psi_1 \sum_i \Pi''_i \Omega'_i + \varphi_2 \psi_2 \sum_i \Pi''_i \Omega''_i + \cdots + \varphi_2 \psi_n \sum_i \Pi''_i \Omega^{(n)}_i \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
+ &\varphi_n \psi_1 \sum_i \Pi^{(n)}_i \Omega'_i + \varphi_n \psi_2 \sum_i \Pi^{(n)}_i \Omega''_i + \cdots + \varphi_n \psi_n \sum_i \Pi^{(n)}_i \Omega^{(n)}_i.
\end{aligned}$$

Aus der Definition der $\Omega', \Omega'', \ldots \Omega^{(n)}$ folgen aber die Identitäten:

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i^k \Omega_i^k = \prod_{i=1}^{i=s} P(z e_i)^{\mu_i} \, . \, F_q(z_1, z_2),$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \Pi_i^k \Omega_i^l = 0, \quad \text{wenn} \quad k \lessgtr l.$$

In Folge dessen ist

$$\Pi_1 \Omega_1 + \Pi_2 \Omega_2 + \cdots + \Pi_n \Omega_n$$

$$= \prod_{i=1}^{i=s} P(z, e_i)^{\mu_i} \, . \, F_q(z_1, z_2) \, . \, (\varphi_1 \psi_1 + \varphi_2 \psi_2 + \cdots + \varphi_n \psi_n).$$

Wenn Π und Ω nicht nur reciproken Classen angehören, sondern selbst reciproke Formenschaaren im Sinne der Definition zu Anfang dieses Paragraphen sein sollen, so müssen die Producte $F_q(z_1, z_2) . \varphi_1 . \psi_1$, $F_q(z_1, z_2) . \varphi_2 . \psi_2, \ldots F_q(z_1, z_2) . \varphi_n . \psi_n$ jedes eine multiplicative Form $\Phi_{2p-2}(z_1, z_2)$ sein, also φ_ν und $\psi_\nu . F_q(z_1, z_2)$ müssen reciproke multiplicative Formen sein. Wir haben also den Satz:

Ist

$$\Pi = \varphi_1 \Omega' + \varphi_2 \Omega'' + \cdots + \varphi_n \Omega^{(n)}$$

irgend eine Formenschaar der Classe Π, *so drücken sich die zu* Π *reciproken Formenschaaren* Ω *in der Gestalt aus:*

$$\Omega = \frac{\varphi_1'}{F_q} \Omega' + \frac{\varphi_2'}{F_q} \Omega'' + \cdots + \frac{\varphi_n'}{F_q} \Omega^{(n)},$$

unter $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$ *multiplicative Formen verstanden, welche zu den Formen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ *beziehungsweise reciprok sind.* (44, S. 312.)

§ 8.

Fälle mit ganzzahligen Exponentendifferenzen.

Ziehen wir jetzt auch die in § 6 besprochenen Fälle mit in die Betrachtung, so ändern sich die Angaben des letzten Paragraphen nur insofern, als an Stelle von $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$; λ_i die modificirten Exponenten $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$; $(\lambda)_i$ treten.

Als Normalexponenten für die Definition der ganzen Formenschaaren sind sowohl in der Classe der Π, wie in der Classe der Ω modificirte Exponenten zu Grunde zu legen.

Ich behaupte nun:

Wenn $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$ *brauchbare modificirte Exponenten der Classe* Π *sind, so sind* $(\lambda')_{i1} = \mu_i - (\lambda)_{i1}$, $(\lambda')_{i2} = \mu_i - (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda')_{in} = \mu_i - (\lambda)_{in}$ *gerade auch brauchbare modificirte Exponenten für die reciproke Classe* Ω.

Ich will wieder, um unnütze Complicationen zu vermeiden, nur diejenigen Fundamentalzweige berücksichtigen, welche zu Elementartheilern der Substitution mit derselben Nullstelle gehören, wie in § 6.

Dann hat die zu S contragrediente Substitution S' eine ähnliche Gestalt wie S:

$$S' = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline S_1' & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & S_2' & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & S_q' \\ \hline \end{array}$$

und ebenso natürlich jede Substitution, die sich von der contragredienten um eine simultane Multiplication aller Zweige mit einer Constanten unterscheidet.

Dabei hat das Theilschema S_ν' die Gestalt:

$$\boxed{S_\nu'} = \left|\begin{array}{ccccc} +\beta, & -\beta, & +\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\cdot\beta \\ 0 & +\beta, & -\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-2}\cdot\beta \\ 0 & 0 & +\beta & \cdots & (-1)^{\varepsilon_\nu-3}\cdot\beta \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & +\beta \end{array}\right|$$

Die Theilsubstitution S_ν' nimmt die gewöhnliche Normalform an, wenn man sie vermittelst der Substitution

$$\begin{array}{ccccc} 0 \;.\;.\;.\;. & 0, & 0, & 0, & 1 \\ 0 & 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0 & 0, & +1, & +1, & 0 \\ 0 & -1, & -2, & -1, & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ (-1)^{\varepsilon_\nu-2} \ldots & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\binom{\varepsilon_\nu-2}{2}, & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}\binom{\varepsilon_\nu-2}{1}, & (-1)^{\varepsilon_\nu-1}, & 0 \end{array}$$

transformirt.

Sind also $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{\varepsilon_\nu}$ Fundamentalzweige von Π, welche eine Hamburger'sche Untergruppe bilden, so sind die contragredienten Zweige $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{\varepsilon_\nu}$ von Ω zwar nicht selbst Fundamentalzweige von Ω, wohl aber die Combination:

$$\begin{aligned}
&+\Omega_{\varepsilon_\nu},\\
&-\Omega_{\varepsilon_\nu-1},\\
&+\Omega_{\varepsilon_\nu-2}+\Omega_{\varepsilon_\nu-1},\\
&-(\Omega_{\varepsilon_\nu-3}+2\Omega_{\varepsilon_\nu-2}+\Omega_{\varepsilon_\nu-1}),\\
&\quad\vdots\\
(-1)^{\varepsilon_\nu-1}\Big(\Omega_1&+\binom{\varepsilon_\nu-2}{1}\Omega_2+\binom{\varepsilon_\nu-2}{2}\Omega_3+\cdots+\Omega_{\varepsilon_\nu-1}\Big).
\end{aligned}$$

Wenn $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_{\varepsilon_\nu}$ an der betreffenden Stelle die Exponenten $(\lambda)_1^{(\nu)}, (\lambda)_2^{(\nu)}, \ldots (\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)}$ haben, so sind die Exponenten von $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_{\varepsilon_\nu}$ der Reihe nach $\mu_i-(\lambda)_1^{(\nu)}, \mu_i-(\lambda)_2^{(\nu)}, \ldots \mu_i-(\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)}$, die Exponenten der Fundamentalzweige von Ω dagegen dieselben Zahlen in umgekehrter Reihenfolge

$$\begin{aligned}
(\lambda')_1^{(\nu)} &= \mu_i-(\lambda)_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)},\\
(\lambda')_2^{(\nu)} &= \mu_i-(\lambda)_{\varepsilon_\nu-1}^{(\nu)},\\
&\ \vdots\\
(\lambda')_{\varepsilon_\nu}^{(\nu)} &= \mu_i-(\lambda)_1^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

In der That, nur so sind sowohl die (λ) wie die (λ') nach abnehmender Grösse des reellen Theils geordnet, wie es bei einem Fundamentalsystem der Fall sein muss.

Ich behaupte nun:

Wenn die (λ) modificirte Exponenten sind, d. h. durch Uebergang zu einem andern Fundamentalsystem nicht mehr erniedrigt werden können, so sind auch die (λ') modificirte Exponenten, d. h. können ebenfalls nicht durch Uebergang zu einem andern Fundamentalsystem erniedrigt werden.

Damit nämlich ein System von Exponenten (λ), die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, ein modificirtes Exponentensystem sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Gleichungen auf S. 176 auch richtig bleiben, wenn man rechts für die λ die links stehenden (λ) selbst einsetzt.

D. h. in dem Schema

$$\begin{array}{lllll}
(\lambda)_1^{(1)} & (\lambda)_1^{(2)} & (\lambda)_1^{(3)} & \cdots & (\lambda)_1^{(q)}, \\
(\lambda)_2^{(1)} & (\lambda)_2^{(2)} & (\lambda)_2^{(3)} & & (\lambda)_2^{(q)}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
(\lambda)_{\varepsilon_1}^{(1)} & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_1}^{(q)}, \\
 & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_1+1}^{(q)}, \\
 & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(2)} & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_2}^{(q)}, \\
 & & (\lambda)_{\varepsilon_2+1}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_2+1}^{(q)}, \\
 & & \vdots & & \vdots \\
 & & (\lambda)_{\varepsilon_3}^{(3)} & & (\lambda)_{\varepsilon_3}^{(q)}, \\
 & & & & (\lambda)_{\varepsilon_3+1}^{(q)}, \\
 & & & & \vdots \\
 & & & & (\lambda)_{\varepsilon_q}^{q}
\end{array}$$

müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Die Zahlen jeder Colonne müssen nach abnehmendem reellen Theil geordnet sein.

2) Schiebe ich die erste Colonne, oder die ersten zwei Colonnen, u. s. w., allgemein die ersten $(\nu-1)$-Colonnen jede so weit nach unten, dass sie mit der νten Colonne auf derselben Zeile endigen, so muss in den ε_ν ersten Zeilen immer die νte Zahl den kleinsten reellen Theil haben, unbeschadet der Möglichkeit, dass auch noch andere Zahlen derselben Zeile denselben kleinsten reellen Theil haben.

Die Bedingung 2) ist dann und nur dann erfüllt, wenn einerseits in dem hingeschriebenen Schema die Zahlen jeder Zeile nach zunehmendem reellen Theil, andererseits in dem Schema, welches man durch Herunterschieben der Colonnen bis auf die letzte Zeile erhält, die Zahlen jeder Zeile nach abnehmendem reellen Theil geordnet sind. Colonnen, welche die gleiche Gliederzahl besitzen, müssen dabei aus denselben Zahlen bestehen.

Und hieraus folgt nun unmittelbar der zu beweisende Satz. Denn das dem hingeschriebenen Schema der (λ) entsprechende Schema der (λ) erhält man, indem man alle Colonnen bis auf die letzte Zeile herunterschiebt, dann die Reihenfolge der Zeilen umkehrt und endlich die $(\lambda)_\mu^\nu$ durch $(\lambda')_{\varepsilon_\nu-\mu+1}^{(\nu)} = \mu_i - (\lambda)_\mu^\nu$ ersetzt.

Es ist dann sofort zu sehen, dass das System der $(\lambda')_\mu^\nu$ genau

denselben Bedingungen genügt, wie das der $(\lambda)_\mu^\nu$, dass also die $(\lambda')_\mu^\nu$ wirklich modificirte Exponenten sind, w. z. b. w.

Wir können daher, wenn $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$ die Normalexponenten der Classe Π sind, ohne Weiteres

$$(\lambda')_{i1}' = \mu_i - (\lambda)_{i1}, \; (\lambda')_{i2} = \mu_i - (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda')_{in} = \mu_i - (\lambda)_{in}$$

als Normalexponenten für die reciproke Classe annehmen, und es bleiben somit alle Entwicklungen des vorigen Paragraphen auch für die zuerst ausgeschlossenen Fälle bestehen, wenn man nur die $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots \lambda_{in}$; λ_i überall durch $(\lambda)_{i1}, (\lambda)_{i2}, \ldots (\lambda)_{in}$; $(\lambda)_i$ ersetzt.

§ 9.

Ausdehnung des Riemann-Roch'schen Satzes.

Ich verstehe jetzt unter einem „*Riemann'schen Formensystem*" die Gesammtheit derjenigen verwandten Formenschaaren, welche ein und denselben vorgegebenen Grad, und ein und dasselbe vorgegebene Multiplicatorsystem besitzen. Die Gesammtheit der zu den Schaaren eines Formensystems reciproken Schaaren ist natürlich wieder ein Formensystem, das *reciproke Formensystem.*

Wir stellen uns die Frage:

Welches ist die allgemeinste Formenschaar Π *eines Riemann'schen Formensystems, welche nur an vorgegebenen Stellen bis zu je einer vorgegebenen Ordnung unendlich werden darf, und wie viele willkürliche Constanten enthält eine derartige Formenschaar?*

Zuerst stelle ich die etwas einfachere Frage:

Welches ist die allgemeinste ganze Formenschaar eines Riemann'schen Formensystems, und wie viele willkürliche Constanten enthält sie?

Es sei $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ eine Basis der Classe Π mit nur einfachen Ausnahmepunkten; eine solche Basis kann man ja nach § 5 stets finden. Die Grade von $\Pi', \Pi'', \ldots \Pi^{(n)}$ seien $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$, ihre den Periodenwegen $A_\varkappa, B_\varkappa$ entsprechenden Multiplicatoren

$$\alpha_\varkappa', \beta_\varkappa'; \; \alpha_\varkappa'', \beta_\varkappa''; \ldots \alpha_\varkappa^{(n)}, \; \beta_\varkappa^{(n)},$$

ihre Determinante

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\lambda_i} F_q(z_1, z_2),$$

$$q = \delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i$$

und die Ausnahmepunkte, die Nullstellen von F_q seien $y', y'', \ldots y^{(n)}$.

Eine ganze Formenschaar Π des Formensystems vom Grade δ und mit den Multiplicatoren $\alpha_\varkappa, \beta_\varkappa$ muss sich in der Gestalt darstellen:

$$\Pi = \varphi_1 \Pi' + \varphi_2 \Pi'' + \cdots + \varphi_n \Pi^{(n)},$$

wobei $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n$ unverzweigte multiplicative Formen von den Graden $\delta - \delta_1, \delta - \delta_2, \ldots \delta - \delta_n$ und mit den Multiplicatoren $\frac{\alpha_x}{\alpha'_x}, \frac{\beta_x}{\beta'_x}; \frac{\alpha_x}{\alpha''_x}, \frac{\beta_x}{\beta''_x}; \ldots \frac{\alpha_x}{\alpha^{(n)}_x}, \frac{\beta_x}{\beta^{(n)}_x}$ sind, welche nur an den Stellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ je einfach unendlich werden dürfen, aber mit Coefficienten, welche noch gewissen Bedingungen genügen müssen.

Die Coefficienten des Unendlichwerdens von φ_ν an den Stellen $y', y'', \ldots y^{(q)}$ seien $\alpha'_\nu, \alpha''_\nu, \ldots \alpha^{(q)}_\nu$. Die Bedingungen, denen diese Coefficienten unterworfen sind, sind folgende:

1) Die am Ende von § 7 angegebenen:

$$\begin{gathered}
\alpha_1' : \alpha_2' : \cdots : \alpha_n' = A_1' : A_2' : \cdots : A_n', \\
\alpha_1'' : \alpha_2'' : \cdots : \alpha_n'' = A_1'' : A_2'' : \cdots : A_n'', \\
\vdots \\
\alpha_1^{(q)} : \alpha_2^{(q)} : \cdots : \alpha_n^{(q)} = A_1^{(q)} : A_2^{(q)} : \cdots : A_n^{(q)},
\end{gathered}$$

2) diejenigen Bedingungen, die aus der Theorie der multiplicativen Formen für die Unendlichkeitsstellen jeder einzelnen Form φ_ν folgen (44, S. 315):

$$\alpha_\nu' \varphi_\nu'(y_1', y_2') + \alpha_\nu'' \varphi_\nu'(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha_\nu^{(q)} \varphi_\nu'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0,$$

wo für φ_ν' der Reihe nach die sämmtlichen linear unabhängigen ganzen zu φ_ν reciproken multiplicativen Formen einzusetzen sind.

Ich setze gemäss den Gleichungen 1)

$$\begin{gathered}
\alpha_1' = A_1' \alpha' \quad \alpha_2' = A_2' \alpha' \quad \cdots \alpha_n' = A_n' \alpha', \\
\alpha_1'' = A_1'' \alpha'' \quad \alpha_2'' = A_2'' \alpha'' \quad \cdots \alpha_n'' = A_n'' \alpha'', \\
\vdots \\
\alpha_1^{(q)} = A_1^{(q)} \alpha^{(q)} \quad \alpha_2^{(q)} = A_2^{(q)} \alpha^{(q)} \cdots \alpha_n^{(q)} = A_n^{(q)} \alpha^{(q)},
\end{gathered}$$

so dass ich nur noch q unbekannte Grössen $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ habe. Diese sind nun noch den Bedingungen 2) zu unterwerfen:

$$(2') \quad \alpha' A_\nu' \varphi_\nu'(y_1', y_2') + \alpha'' A_\nu''(y_1'', y_2'') + \cdots + \alpha^{(q)} A_\nu^{(q)} \varphi_\nu'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0,$$

worin $\nu = 1, 2, \ldots n$ zu setzen und bei jedem ν für φ_ν' der Reihe nach sämmtliche linear unabhängigen zu φ_ν reciproken ganzen Formen einzusetzen sind.

Sei σ_ν die Anzahl der linear unabhängigen *ganzen* Formen φ_ν, σ_ν' die Anzahl der linear unabhängigen reciproken ganzen Formen φ_ν', so sind also die q Coefficienten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ im Ganzen $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ homogenen linearen Gleichungen zu unterwerfen.

Es mögen σ' dieser Gleichungen eine identische Folge der übrigen sein; dann sind $q - \sum_\nu \sigma_\nu' + \sigma'$ der Coefficienten $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ willkürlich. Da aber zu jeder der Formen φ_ν noch eine ganze Form φ_ν des betreffenden Grades und Multiplicatorsystemes hinzugefügt werden kann, ohne dass die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen sich ändern, so enthalten die φ_ν zusammen im Ganzen

$$\sigma = \sum \sigma_\nu + q - \sum \sigma_\nu' + \sigma'$$

willkürliche Constanten linear und homogen.

Nach dem Riemann-Roch'schen Satz für ganze multiplicative Formen (44, S. 314) ist aber:

$$\sigma_\nu = \delta - \delta_\nu - p + 1 + \sigma_\nu';$$

also ist, mit Rücksicht auf die Gleichung

$$\sum \delta_\nu = q + \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i,$$

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \sigma'.$$

Die Zahl σ', die Anzahl derjenigen Gleichungen (2'), welche identische Folge der übrigen sind, ist nun genauer zu charakterisiren. σ' bedeutet die Anzahl derjenigen linear unabhängigen linearen Verbindungen der $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ Gleichungen (2'), welche identisch verschwinden, d. h. in welchen die Coefficienten von $\alpha', \alpha'', \ldots \alpha^{(q)}$ jeder einzeln verschwinden. Denkt man sich die $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots \sigma_n'$ Gleichungen (2') untereinander geschrieben, jede mit einer unbestimmten Constanten multiplicirt, alles addirt und die Coefficienten schliesslich $= 0$ gesetzt, so erhält man q Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}
A_1' \varphi_1'(y_1', y_2') + A_2' \varphi_2'(y_1', y_2') + \cdots + A_n' \varphi_n'(y_1', y_2') &= 0,\\
A_1'' \varphi_1'(y_1'', y_2'') + A_2'' \varphi_2'(y_1'', y_2'') + \cdots + A_n'' \varphi_n'(y_1'', y_2'') &= 0,\\
\vdots \qquad\qquad &\;\;\vdots\\
A_1^{(q)} \varphi_1'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + A_2^{(q)} \varphi_2'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + \cdots + A_n^{(q)} \varphi_n'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) &= 0
\end{aligned}$$

wo die $\sigma_1' + \sigma_2' + \cdots + \sigma_n'$ unbestimmten Multiplicatoren der Gleichungen (2') als willkürliche Constanten in den ganzen Formen $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$ enthalten sind.

σ' ist daher die Anzahl der willkürlichen Constanten in denjenigen ganzen Formen $\varphi_1', \varphi_2', \ldots \varphi_n'$, welche den obigen q Bedingungen genügen.

Wir ziehen nun die zu Π reciproken ganzen Formenschaaren Ω

mit heran, Die reciproken Formenschaaren überhaupt haben nach § 7 die Form

$$\Omega = \frac{\varphi_1'}{F_q}\Omega' + \frac{\varphi_2'}{F_q}\Omega'' + \cdots + \frac{\varphi_n'}{F_q}\Omega^{(n)}.$$

Wenn Ω eine ganze Formenschaar sein soll, so dürfen die Coefficienten in dieser Darstellung an den 0-Stellen von F_q nur einfach unendlich werden, d. h. $\varphi_1', \varphi_2' \ldots \varphi_n'$ müssen ganze Formen sein. Die Coefficienten des Unendlichwerdens von $\frac{\varphi_1'}{F_q}, \frac{\varphi_2'}{F_q}, \ldots \frac{\varphi_n'}{F_q}$ an der Stelle y', sind proportional mit

$$\varphi_1'(y_1', y_2'),\ \varphi_2'(y_1', y_2'), \ldots \varphi_n'(y_1', y_2').$$

Diese Grössen müssen also, wenn Ω eine ganze Formenschaar sein soll, nach S. 190 der Gleichung genügen

$$A_1'\varphi_1'(y_1', y_2') + A_2'\varphi_2'(y_1', y_2') + \cdots + A_n'\varphi_n'(y_1', y_2') = 0.$$

Entsprechend an den Stellen $y'', \ldots y^{(q)}$:

$$\begin{aligned} &A_1''\varphi_1'(y_1'', y_2'') + A_2''\varphi_2''(y_1'', y_2'') + \cdots + A_n''\varphi_n'(y_1'', y_2'') = 0,\\ &\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\ &A_1^{(q)}\varphi_1'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + A_2^{(q)}\varphi_2'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) + \cdots + A_n^{(q)}\varphi_n'(y_1^{(q)}, y_2^{(q)}) = 0. \end{aligned}$$

Es giebt also so viele linear unabhängige zu Π reciproke ganze Formenschaaren, als es linear unabhängige ganze Formen $\varphi_1', \varphi_2', \cdots \varphi_n'$ giebt, die diesem Gleichungssystem genügen, d. h. da dieses Gleichungssystem mit demjenigen auf der letzten Seite identisch ist:

σ' bedeutet die Anzahl der linear unabhängigen ganzen zu Π reciproken Formenschaaren.

Und wir haben hiermit den Satz gewonnen:

Die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formenschaaren Π eines gegebenen Formensystems ist

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s}(\lambda)_i + \sigma',$$

unter σ' die Anzahl der linear unabhängigen ganzen Formenschaaren des reciproken Formensystems verstanden.

In Folge der Identitäten:

$$\delta + \delta' = \sum_{i=1}^{i=s}\mu_i + 2p - 2,$$

$$(\lambda)_i + (\lambda')_i = n\mu_i$$

kann man dieselbe Gleichung auch in der genau reciproken Form schreiben

$$\sigma' = n(\delta' - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda')_i + \sigma.$$

Hiermit ist der von mir in (44, S. 314) für ganze multiplicative Formen ausgesprochene Satz, die Erweiterung des bekannten Brill-Nöther'schen Reciprocitätssatzes, auf Riemann'sche Formenschaaren ausgedehnt worden.

Es ist nun auch eine Leichtigkeit, die Anzahl der willkürlichen Constanten in einer Formenschaar mit vorgegebenen Unendlichkeitsstellen abzuzählen, und damit die Ausdehnung des allgemeinen Riemann-Roch'schen Satzes anzugeben.

Es sei Π eine Formenschaar des gegebenen Formensystems, welche an den ε vorgegebenen Stellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ unendlich werden darf; Stellen, an denen mehrfaches Unendlichwerden gestattet ist, mögen dabei so oft mitgezählt werden, als die betreffende Multiplicität angiebt.

Es werde zur Abkürzung

$$f_\varepsilon = P(zx')\, P(zx'') \ldots P(zx^{(\varepsilon)})$$

gesetzt, und $a_\varkappa$, $b_\varkappa$ seien die Multiplicatoren von f_ε. Es ist dann $\Pi . f_\varepsilon$ die allgemeinste ganze Formenschaar des Formensystems vom Grade $\delta + \varepsilon$ mit dem Multiplicatorsystem $a_\varkappa \alpha_\varkappa$, $b_\varkappa \beta_\varkappa$. Die Anzahl der willkürlichen Constanten in Π ist daher

$$n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \tau',$$

unter τ' die Anzahl aller linear unabhängigen ganzen zu $\Pi . f_\varepsilon$ reciproken Formenschaaren verstanden.

Die letzteren sind also

$$\frac{\Omega}{f_\varepsilon},$$

unter Ω die allgemeinste zu Π reciproke ganze Formenschaar verstanden, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen ε Nullstellen von ε verschwinden.

Mithin besteht der Riemann-Roch'sche Satz für Formenschaaren mit Unendlichkeitsstellen:

Die Anzahl derjenigen linear unabhängigen Formenschaaren Π *eines Formensystems, welche an* ε *vorgegebenen Stellen unendlich werden dürfen, ist*

$$n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=s} (\lambda)_i + \tau',$$

unter τ' die Anzahl aller derjenigen linear unabhängigen ganzen Schaaren des reciproken Formensystems verstanden, welche an den sämmtlichen zugelassenen Unendlichkeitsstellen verschwinden.

§ 10.

Die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen.

In (44) habe ich auf den dort aufgestellten Riemann-Roch'schen Satz eine Darstellung der multiplicativen Formen durch Elementarformen gegründet, d. h. durch Formen, die nur an je einer einzigen variablen Stelle unendlich werden. Eine ganz entsprechende Theorie lässt sich jetzt mit Hülfe des verallgemeinerten Riemann-Roch'schen Satzes für die Riemann'schen Formenschaaren aufbauen.

Bevor wir jedoch versuchen, eine Formenschaar, welche an vorgegebenen Stellen mit vorgegebenen Coefficienten unendlich wird, wirklich darzustellen, müssen wir untersuchen, ob wir überhaupt die Unendlichkeitsstellen und ihre Coefficienten ganz beliebig vorgeben dürfen, oder ob dieselben nicht etwa gewissen Relationen genügen müssen. Ich will mich hierbei, wie überhaupt bei den weiteren Entwicklungen in dieser Arbeit auf nur einfache Unendlichkeitsstellen beschränken.

Eine Formenschaar Π werde an den Stellen $x', x'', \ldots x^{(s)}$ je einfach unendlich. Um das Verhalten an einer dieser Stellen vollständig zu charakterisiren, müssen wir angeben, mit welchem Coefficienten jeder einzelne der Zweige $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_n$ an der Stelle unendlich wird. Zu jeder Stelle x gehören also n Coefficienten $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$, welche in der Weise definirt sein mögen, dass die Entwicklung des Zweiges Π_i nach aufsteigenden Potenzen der Primform $P(zx)$ mit dem Gliede beginnt:

$$\gamma \cdot \prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1}.$$

In diesem Sinne mögen zu den Punkten $x'. x'', \ldots x^{(s)}$ die Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ gehören.

Welchen Relationen müssen diese Coefficienten genügen?

$g(z_1, z_2)$ sei irgend eine der zu Π reciproken ganzen Formenschaaren. Dann besteht eine identische Relation:

$$\Pi_1 g_1 + \Pi_2 g_2 + \cdots + \Pi_n g_n = \prod_{i=1}^{i=n} P(ze_i)^{\mu_i} \cdot \Phi_{2p-2}(z_1, z_2),$$

worin $\Phi_{2p-2}(z_1, z_2)$ eine, wenn wir der Bequemlichkeit halber im

Folgenden immer kanonische Variabeln z_1, z_2 zu Grunde legen, algebraische Form vom Grade $2p - 2$ ist.

Φ_{2p-2} wird nur an den Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ je einfach unendlich, und zwar an der Stelle $x^{(\nu)}$ mit dem Coefficienten

$$\gamma_1^{(\nu)} g_1(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \gamma_2^{(\nu)} g_2(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) + \cdots + \gamma_n^{(\nu)} g_n(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}).$$

Nun muss aber nach (44, S. 312) die Summe dieser Coefficienten an den ε Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ gleich Null sein, und dies muss der Fall sein, welche der σ' linear unabhängigen ganzen Formenschaaren $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ wir auch benutzen, d. h.:

Die $n\varepsilon$ Coefficienten der ε Unendlichkeitsstellen der Formenschaar Π müssen den σ' linearen Relationen genügen:

$$\sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i'(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0, \quad \sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i''(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0, \cdots$$
$$\cdots \sum_{i,\nu} \gamma_i^{(\nu)} g_i^{(\sigma')}(x_1^{(\nu)}, x_2^{(\nu)}) = 0.$$

Wenn es τ' linear unabhängige lineare Combinationen der Schaaren $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ giebt, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ verschwinden, so sind von diesen σ' Gleichungen nur $\sigma' - \tau'$ linear unabhängig, die $\gamma_i^{(\nu)}$ enthalten also genau $n \cdot \varepsilon - \sigma' + \tau'$ willkürliche Constanten linear und homogen. Ausserdem kann man aber ohne Aenderung der $\gamma_i^{(\nu)}$ zu Π noch eine beliebige ganze Formenschaar desselben Formensystems hinzufügen, welche

$$\sigma = n(\delta - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=\varepsilon} (\lambda)_i + \sigma'$$

willkürliche Constanten linear und homogen enthält. Das giebt genau

$$n\varepsilon - \sigma' + \tau' + \sigma = n(\delta + \varepsilon - p + 1) - \sum_{i=1}^{i=\varepsilon} (\lambda)_i + \tau'$$

linear und homogen in Π enthaltene willkürliche Constanten, genau dieselbe Zahl, welche der Riemann-Roch'sche Satz giebt.

Daraus folgt:

Die angegebenen Relationen sind die einzigen, denen die Coefficienten $\gamma_i^{(\nu)}$ der Unendlichkeitsstellen zu genügen brauchen.

Von den willkürlichen Constanten in einer an den Stellen $x', x'', \dots x^{(\varepsilon)}$ unendlich werdenden Formenschaar Π kommen $n\varepsilon - \sigma' + \tau'$ auf die Coefficienten der Unendlichkeitsstellen und σ auf die in Π enthaltenen ganzen Formenschaaren.

Diese Sätze ermöglichen uns nun die Construction der gesuchten „Elementarformenschaaren".

§ 11.

Die Elementarformenschaaren.

Unter einer „Elementarformenschaar erster Art" eines bestimmten Riemann'schen Formensystems verstehe ich eine Formenschaar

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2),$$

welche sowohl in z_1, z_2, *wie in* x_1, x_2 *homogen ist, welche als Function von* z_1, z_2 *eine Formenschaar des betreffenden Riemann'schen Formensystems ist, und ausser an einer gewissen Anzahl fester Stellen* $b', b'', \ldots b^{(\nu)}$ *nur an einer variablen Stelle* x *einfach unendlich wird, und zwar an letzterer so, dass nur der kte Zweig* $\Lambda_k^{(k)}$ *mit dem Coefficienten* 1 *unendlich wird, die übrigen Zweige aber endlich bleiben.*

An der Stelle x soll die Entwicklung des $k$ten Zweiges nach Potenzen von $P(zx)$ mit dem Gliede beginnen:

$$\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1}.$$

Dies Glied ist aber, da die Primform in ihrem ersten Argumente vom Grade $\frac{2p-2}{m}$, in ihrem zweiten Argumente vom Grade $\frac{-2p+1}{m}$ ist (m = Blätterzahl der Riemann'schen Fläche), wie man leicht nachrechnet, in x_1, x_2 vom Grade des zum vorgelegten reciproken Formensystems; dasselbe muss daher, wegen der vorausgesetzten Homogeneität in x_1, x_2, von der Formenschaar überhaupt gelten. Wir haben also den Satz:

Während die Elementarformenschaar als Function ihres ersten Argumentpaares natürlich vom Grade δ *des vorgelegten Formensystems* Π *ist, ist sie als Function ihres zweiten Argumentpaares vom Grade* δ' *des zu* Π *reciproken Formensystems* Ω.

Es seien jetzt $f'(z_1, z_2), f''(z_1, z_2), \ldots f^{(\sigma)}(z_1, z_2)$ σ linear unabhängige ganze Formenschaaren des Systemes $\Pi(z_1, z_2)$, und $g'(x_1, x_2)$, $g''(x_1, x_2), \ldots g^{(\sigma')}(x_1, x_2)$ σ' linear unabhängige ganze Formenschaaren des reciproken Systems $\Omega(x_1, x_2)$, und irgend eine lineare Combination der $f', f'', \ldots f^{(\sigma)}$ werde allgemein mit $f(z_1, z_2)$, eine solche der $g', g'', \ldots g^{(\sigma')}$ mit $g(x_1, x_2)$ bezeichnet.

Die Coefficienten des Unendlichwerdens der n Zweige von $\Lambda^{(k)}$ als Function von z_1, z_2 an der Stelle $b^{(\nu)}$ mögen mit $\beta_{1\nu}, \beta_{2\nu}, \ldots \beta_{n,\nu}$ bezeichnet werden. Dieselben müssen dann nach dem vorigen Paragraphen mit der Stelle x durch die σ' Relationen verbunden sein:

$$
(1) \quad
\begin{aligned}
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i' \;(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = - g_k' \;(x_1, x_2),\\
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i'' \;(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = - g_k'' \;(x_1, x_2), \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots n \\ \nu = 1, 2, \dots r' \end{array}\\
&\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\sum_{i,\nu} \beta_{i,\nu} g_i^{(\sigma')} (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = - g_k^{(\sigma')} (x_1, x_2).
\end{aligned}
$$

Ich behaupte:

Diese Gleichungen können bei variablem x nur dann immer mit einander verträglich sein, wenn es keine lineare Combination $g(x_1, x_2)$ der σ' Schaaren $g, g'', \dots g^{(\sigma')}$ giebt, deren sämmtliche Zweige an sämmtlichen Punkten $b', b'', \dots b^{(r')}$ verschwinden.

Denn dann müsste nach unseren Gleichungen der $k$te Zweig dieser linearen Combination auch an der frei beweglichen Stelle x verschwinden, d. h. er müsste identisch verschwinden, und dies wäre, da wir die Gruppe immer als transitiv, die Formenclasse also als irreducibel voraussetzen, nur so möglich sein, dass alle Zweige von $g(x_1, x_2)$ identisch verschwänden. Es gäbe also eine identisch verschwindende lineare Combination der $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ entgegen der Voraussetzung, dass $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ als linear unabhängig ausgewählt sind.

Wir müssen also die festen Unendlichkeitspunkte unserer Elementarformenschaar nothwendig so auswählen, dass keine ganze Formenschaar $g(x_1, x_2)$ des reciproken Systems an allen diesen Punkten verschwindet.

Eine solche Lage der Punkte $b', b'', \dots b^{(r')}$ will ich kurz „allgemeine Lage" nennen. Ich sage:

Wenn $nr' < \sigma'$ ist, so ist die Lage der Punkte gewiss nie allgemein, wenn $r' > \sigma' + p - 1$ ist, so ist die Lage der Punkte gewiss immer allgemein, wie sie auch liegen mögen.

Denn wenn $nr' < \sigma'$ ist, so sind die nr' Gleichungen

$$a_1 g_i' \,(b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) + a_2 g_i'' (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) + \cdots + a_{\sigma'} g_i^{(\sigma')} (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = 0$$

gewiss durch mindestens $\sigma' - n\nu'$ linear unabhängige Systeme nicht durchweg verschwindender $a_1, a_2, \dots a_{\sigma'}$ lösbar.

Andererseits, seien die r' Stellen sämmtlich Nullstellen einer ganzen Formenschaar g, so kann ich setzen

$$g(x_1, x_2) = \prod_{\nu=1}^{\nu=r'} P(x\,b^{(\nu)}) \cdot h(x_1, x_2),$$

wobei $h(x_1, x_2)$ wieder eine ganze Formenschaar, allerdings von einem andern Formensystem als g, ist. Ich erhalte nun aber gewiss wieder ganze Formenschaaren desselben Systems wie g, wenn ich in vor-

stehendem Ausdruck $\prod_{\nu=1}^{\nu=r'} P(xb^{(\nu)})$ durch irgend eine ganze multiplicative Form φ vom selben Grade r' und vom selben Multiplicatorsystem ersetze. Also muss die Anzahl σ' der willkürlichen Constanten in g mindestens gleich der Anzahl der willkürlichen Constanten in einer ganzen multiplicativen Form vom Grade r' sein, also mindestens gleich $r' - p + 1$. Wir haben also

$$\sigma' \geqq r' - p + 1,$$
$$r' \leqq \sigma' + p - 1.$$

Wenn also $r' > \sigma' + p - 1$ ist, kann gewiss keine Schaar g an allen Stellen verschwinden, w. z. b. w.

Es seien nun also die Stellen $b', b'', \ldots b^{(r')}$ so gewählt, dass sie allgemeine Lage haben. Es ist dann gewiss $n.r' \geqq \sigma'$. Ich setze allgemein

$$nr' = \sigma' + \varrho'.$$

Wenn $\varrho' > 0$ ist, so sind die Coefficienten $\beta_{i\nu}$ in den festen Unendlichkeitspunkten $b^{(\nu)}$ durch die Lage des Punktes x nicht eindeutig bestimmt, da die Anzahl der Unbekannten grösser ist als die der Gleichungen. Man muss daher, um völlige Bestimmtheit zu haben, noch ϱ' weitere Bedingungen hinzufügen, etwa ϱ' lineare Gleichungen von der Form

$$(2) \qquad \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0, \quad \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0, \ldots \sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0.$$

Dabei muss man aber die im übrigen willkürlichen Hülfsconstanten $B'_{i\nu}, B''_{i\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{i\nu}$ so wählen, dass die Determinante der linken Seiten des gesammten Systems der $\sigma' + \varrho'$ Gleichungen von Null verschieden ist, was gewiss möglich ist, da wegen der vorausgesetzten allgemeinen Lage der Punkte $b', b'', \ldots b^{(r')}$ nicht alle σ'-reihigen Determinanten der aus den Coefficienten der linken Seiten der Gleichungen (1) gebildeten Matrix verschwinden.

Durch die bis jetzt getroffenen Bestimmungen ist nun allerdings die Elementarschaar $\Lambda^{(\varkappa)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ noch nicht vollständig definirt — denn man kann unbeschadet der gegebenen Bedingungen noch irgend eine lineare Combination der Schaaren $f'(z_1, z_2), f''(z_1, z_2), \ldots f^{(\sigma')}(z_1, z_2)$ mit beliebigen Formen δ'-ten Grades von x_1, x_2 als Coefficienten hinzufügen —, aber wir werden sehen, wie wir auch die noch willkürlichen Formen von x_1, x_2 in $\Lambda^{(k)}$ annehmen mögen, dass die $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ doch schon zur Darstellung einer beliebigen Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ durch ihre Unendlichkeitsstellen brauchbar sind; und noch mehr, (im nächsten Paragraphen), dass sie gleichzeitig zur Darstellung einer

Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ des reciproken Systems durch ihre Unendlichkeitsstellen brauchbar sind.

Ich behaupte also zunächst:

Vermittelst der definirten Elementarformenschaaren $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ *und vermittelst irgend* σ *linear unabhängiger ganzer Formenschaaren* $f'(z_1, z_2)$, $f''(z_1, z_2)$, $\ldots f^{(\sigma')}(z_1, z_2)$ *kann man die allgemeinste Riemann'sche Formenschaar* $\Pi(z_1, z_2)$ *des vorliegenden Formensystems darstellen, welche an* ε *vorgegebenen Stellen* $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ *mit den vorgegebenen Coefficienten* $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(\varepsilon)}, \gamma_2^{(\varepsilon)}, \ldots \gamma_n^{(\varepsilon)}$ *unendlich wird.*

Ich behaupte nämlich, die allgemeinste derartige Formenschaar ist

$$\Pi(z_1, z_2) = \begin{array}{l} \gamma_1' \Lambda' (z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_1'' \Lambda' (z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_1^{(\varepsilon)} \Lambda' (z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ + \gamma_2' \Lambda'' (z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_2'' \Lambda'' (z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_2^{(\varepsilon)} \Lambda'' (z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ + \gamma_n' \Lambda^{(n)} (z_1, z_2; x_1', x_2') + \gamma_n'' \Lambda^{(n)} (z_1, z_2; x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_n^{(\varepsilon)} \Lambda^{(n)} (z_1, z_2; x_1^{(\varepsilon)}, x_2^{(\varepsilon)}) \\ + \gamma_1 f'(z_1, z_2) + \gamma_2 f''(z_1, z_2) + \cdots + \gamma_\sigma f^{(\sigma)}(z_1, z_2). \end{array}$$

An den Stellen $x', x'', \ldots x^{(\varepsilon)}$ werden die einzelnen Zweige der dargestellten Schaar in der That in der verlangten Weise unendlich. Es ist nur noch zu zeigen, dass die Summe an den Stellen $b', b'', \ldots b^{(r')}$ endlich bleibt. Sei $\beta_i^{(\nu)}$ der Coefficient des Unendlichwerdens von Π_i an der Stelle $b^{(\nu)}$, so setzen sich diese Coefficienten aus den entsprechenden Coefficienten $\beta_{i,\nu}^{k,\mu}$ der verschiedenen Elementarschaaren

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)})$$

linear zusammen:

$$\beta_i^{(\nu)} = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} \beta_{i,\nu}^{k,\mu}.$$

Sie genügen in Folge dessen einerseits den σ' Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i' \; (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k' \; (x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}),$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i'' \; (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k'' \; (x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} g_i^{(\sigma')} (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} g_k^{(\sigma')} (x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)})$$

andererseits den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B'_{i,\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B''_{i,\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \beta_i^{(\nu)} B^{(\varrho')}_{i,\nu} = 0.$$

Nach den Relationen, denen die vorgegebenen Coefficienten $\gamma_k^{(\mu)}$ genügen müssen, ist aber auch in jeder der ersten σ' Gleichungen die rechte Seite gleich 0. Da die Determinante der linken Seiten des Systems von $(\sigma' + \varrho')$ Gleichungen nicht verschwindet, so müssen daher alle Coefficienten $\beta_i^{(\nu)} = 0$ sein, was zu beweisen war.

§ 12.

Die Elementarschaaren als Functionen der Unendlichkeitsstelle.

Wir wollen jetzt die Natur der n zu einer Stelle x gehörigen Elementarschaaren

$$\Lambda'(z_1, z_2;\ x_1, x_2),\ \Lambda''(z_1, z_2;\ x_1, x_2),\ \ldots\ \Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$$

als Functionen des zweiten Argumentpaares x_1, x_2 untersuchen.

Wir haben bereits im vorigen Paragraphen gesehen, dass es Formen von x_1, x_2 vom Grade δ' der reciproken Formenschaaren Ω sind.

Wie in (44, S. 329) bezeichne $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ bezw. $x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}$ denselben Punkt mit denselben homogenen Coordinaten, wie z_1, z_2 bezw. x_1, x_2, aber nach Ausführung irgend eines auf der Riemann'schen Fläche geschlossenen Umlaufs. Zur Bequemlichkeit der Darstellung mögen kanonische Variable zu Grunde gelegt werden, d. h. solche, in welchen die Formen Φ_{2p-2} die Multiplicatoren 1 besitzen.

Lassen wir z_1, z_2 einen geschlossenen Umlauf $z_1, z_2;\ z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ ausführen, so erleiden die Zweige einer Elementarschaar $\Lambda^{(k)}$ die zu diesem Umlauf gehörige Substitution S:

$$\Lambda_1^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\ x_1, x_2) = \alpha_{11}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \alpha_{12}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_{1n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2),$$
$$\Lambda_2^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\ x_1, x_2) = \alpha_{21}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \alpha_{22}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_{2n}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2),$$
$$\vdots$$
$$\Lambda_n^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)};\ x_1, x_2) = \alpha_{n1}\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \alpha_{n2}\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha_{nn}\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2).$$

Während $\Lambda^{(k)}$ an der Stelle x die Coefficienten $0, 0, \cdots 1, \cdots 0$ hat, hat die neue Formenschaar als Function von z_1, z_2 aufgefasst, die Coefficienten $\alpha_{1k}, \alpha_{2k}, \cdots \alpha_{nk} \cdot \Lambda^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$ ist als Function von z_1, z_2 zwar wieder eine sich linear substituirende Formenschaar vom Grade δ, aber mit einem andern Substitutionensystem: nämlich wenn $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ die Substitution T erleidet, erleidet $\Lambda^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$ die transformirte Substitution $S^{-1}TS \cdot \Lambda^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$ ist auch nicht selbst eine Elementarschaar des neuen Formensystems, wohl aber ist

$$\mathsf{A}_{k1}\Lambda'(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \mathsf{A}_{k2}\Lambda''(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \cdots + \mathsf{A}_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$$

eine Elementarschaar, deren k-ter Zweig mit dem Coefficienten 1 unendlich wird, wenn man unter A_{ki} die durch die Gesammtdeterminante dividirten Unterdeterminanten des Systems der α_{ki} versteht.

Wir wollen nun zusehen, wie sich die durch einen Umlauf von x_1, x_2 zu erhaltenden neuen Formenschaaren

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)})$$

an der Stelle x verhalten.

Schreiben wir die Reihenentwickelungen der einzelnen Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ an der Stelle x hin:

$$\begin{aligned}
&\Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) = \text{endlich},\\
&\Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) = \text{endlich},\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\Lambda_k^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) = \prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1} + \text{endlich},\\
&\quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) = \text{endlich},
\end{aligned}$$

so können wir diese Reihenentwicklungen nicht dazu benutzen, um an ihnen einen geschlossenen Umlauf der Variablen x_1, x_2 auszuführen, da wir hierbei nothwendig den Convergenzbereich der Reihen überschreiten müssten. Wohl aber können wir einen simultanen Umlauf von z_1, z_2 und x_1, x_2 ausführen, indem wir nur z_1, z_2 und x_1, x_2 immer hinreichend nahe bei einander bleiben lassen.

Man sieht dann, wenn α der Multiplicator des Products $\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i}$ längs des Weges ist, dass die Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)})$ sämmtlich endlich bleiben mit Ausnahme des $k$ten, dessen Coefficient sich aus 1 in α verwandelt. $\Lambda^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)})$ ist nun als Function von z_1, z_2 eine Schaar des Systems mit den Substitutionen $S^{-1}TS$, und zwar das αfache einer Elementarschaar, also von

$$\alpha A_{k1} \Lambda'(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \alpha A_{k2} \Lambda''(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha A_{kn} \Lambda^{(n)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2)$$

nur um eine ganze Formenschaar des Systems mit den Substitutionen $S^{-1}TS$ unterschieden.

Führe ich nun $z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ längs des durchlaufenen Weges wieder zurück bis z_1, z_2, so ergibt sich also, dass $\Lambda^{(\varkappa)}(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)})$ von

$$\alpha A_{k1} \Lambda'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha A_{k2} \Lambda''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha A_{kn} \Lambda^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$$

nur um eine ganze Formenschaar des Systems mit den Substitutionen T unterschieden sein kann.

αA_{ki} sind aber gerade die Coefficienten derjenigen Substitution S', welche die reciproken Formen Ω beim Umlauf $z_1, z_2; z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}$ erleiden. Wir bezeichnen diese Coefficienten dementsprechend mit α'_{ki} und wir haben also folgendes Verhalten der Elementarschaaren gegenüber Umlaufen einerseits von z_1, z_2, andererseits von x_1, x_2:

$$(1)\begin{cases} \Lambda_1^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{11} \Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{12} \Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2 + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha_{1n} \Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \Lambda_2^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{21} \Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{22} \Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha_{2n} \Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \vdots \\ \Lambda_n^{(k)}(z_1^{(\varkappa)}, z_2^{(\varkappa)}; x_1, x_2) = \alpha_{n1} \Lambda_1^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha_{n2} \Lambda_2^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha_{nn} \Lambda_n^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2). \end{cases}$$

$$(2)\begin{cases} \Lambda_i'(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{11} \Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{12} \Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha'_{1n} \Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \qquad + H_{11}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i'(z_1, z_2) + H_{12}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + H_{1\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), \\ \Lambda_i''(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{21} \Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{22} \Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha'_{2n} \Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \qquad + H_{21}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i'(z_1, z_2) + H_{22}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + H_{2\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), \\ \vdots \\ \Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{n1} \Lambda_i'(z_1, z_2; x_1, x_2) + \alpha'_{n2} \Lambda_i''(z_1, z_2; x_1, x_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + \alpha'_{nn} \Lambda_i^{(n)}(z_1, z_2; x_1, x_2), \\ \qquad + H_{n1}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i'(z_1, z_2) + H_{n2}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i''(z_1, z_2) + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + H_{n\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot f_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), \end{cases}$$

Die $n\sigma$-Formen δ'ten Grades von $x_1, x_2 : \mathsf{H}_{ik}$ hängen davon ab, wie man die in den Elementarschaaren $\Lambda^{(\nu)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ noch enthaltenen willkürlichen Functionen von x festlegt.

Ich will hier über die Art der Festlegung dieser willkürlichen Formen noch gar keine Voraussetzung machen; eine specielle Art der Festlegung werden wir im nächsten Paragraphen kennen lernen.

Wie aber auch die willkürlichen Formen in den Elementarschaaren angenommen sein mögen, immer können wir den fundamentalen Satz aussprechen:

Fassen wir in dem Formensystem:

$$\begin{array}{llll} \Lambda_1'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_1''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_1^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \\ \Lambda_2'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_2''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_2^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \\ \vdots & & & \\ \Lambda_n'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_n''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_n^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \end{array}$$

die Formen je einer, etwa der kten, Colonne als Zweige einer Formenschaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ auf, die Formen je einer, etwa der iten, Zeile als Zweige einer Formenschaar $\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$, so sind die Formenschaaren

$$\Lambda'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \quad \Lambda''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \quad \ldots \quad \Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),$$

als Functionen von z_1, z_2 aufgefasst, zu der Stelle x gehörige Elementarschaaren für die Darstellung der Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$, dagegen die Formenschaaren

$$-\Lambda_1(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \quad -\Lambda_2(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \quad \ldots \quad -\Lambda_n(z_1, z_2;\, x_1, x_2),$$

als Functionen von x_1, x_2 aufgefasst, zu der Stelle z gehörige Elementarschaaren für die Darstellung der reciproken Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$.

Der erste Theil der Behauptung ist einfach eine Recapitulation des Ergebnisses des vorigen Paragraphen; der zweite Theil ist noch zu beweisen.

In der That werden die Formenschaaren $-\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ an der Stelle z als Functionen von x_1, x_2 in der Weise einer Elementarschaar unendlich, da alle Zweige ausser dem $i$ten endlich bleiben, und die Entwicklung des $i$ten Zweiges:

$$-\prod_{i=1}^{i=s} P(xe_i)^{\mu_i} \cdot \left(\frac{P(zy)}{P(xy)}\right)^{\delta+1} P(zx)^{-1} + \cdots$$

sich in eine Entwicklung der Gestalt

$$+\prod_{i=1}^{i=s} P(ze_i)^{\mu_i} \left(\frac{P(xy)}{P(zy)}\right)^{\delta'+1} P(xz)^{-1} + \cdots$$

umformen lässt.

Es seien $z', z'', \ldots z^{(s)}$ die Unendlichkeitsstellen einer Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ und $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots g_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ ihre Coefficienten. Diese Coefficienten müssen natürlich den σ-Relationen genügen:

$$\sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) = 0, \quad \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) = 0, \cdots$$
$$\cdots \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) = 0.$$

Setzen wir nun

$$\Omega_k(x_1, x_2) = \begin{matrix} -\gamma_1' \Lambda_1^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_1'' \Lambda_1^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \cdots - \gamma_1^{(s)} \Lambda_1^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \\ -\gamma_2' \Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_2'' \Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \cdots - \gamma_2^{(s)} \Lambda_2^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \\ \vdots \\ -\gamma_n' \Lambda_n^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_n'' \Lambda_n^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ \cdots - \gamma_n^{(s)} \Lambda_n^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2), \end{matrix}$$

so sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots \Omega_k$ die Zweige einer Riemann'schen Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$, d. h. sie sind vom Grade δ' und erleiden bei Umlauf der Variablen x_1, x_2 die Substitutionen:

$$\begin{aligned} \Omega_1(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) &= \alpha_{11}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{12}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{1n}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ \Omega_2(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) &= \alpha_{21}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{22}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{2n}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ &\vdots \\ \Omega_n(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) &= \alpha_{n1}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{n2}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{nn}' \Omega_n(x_1, x_2). \end{aligned}$$

In der That folgt aus dem Verhalten der einzelnen Elementarschaaren, aus denen Ω zusammengesetzt ist:

$$\begin{aligned} \Omega_k(x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \; & \alpha_{k1}' \Omega_1(x_1, x_2) + \alpha_{k2}' \Omega_2(x_1, x_2) + \cdots + \alpha_{kn}' \Omega_n(x_1, x_2), \\ & - \mathsf{H}_{k1}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - \mathsf{H}_{k2}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - \cdots \\ & \cdots - \mathsf{H}_{k\sigma}^{(\varkappa)}(x_1, x_2) \cdot \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}). \end{aligned}$$

Hierin sind nun nach den Relationen, denen die $\gamma_i^{(\mu)}$ genügen müssen, die Summen in der zweiten Zeile sämmtlich Null, und die rechte Seite reducirt sich also auf die erste Zeile, w. z. b. w.

Es ist zweitens zu beweisen, dass die Schaar $\Omega(x_1, x_2)$ an den Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ in der verlangten Weise unendlich wird und dass sie an keiner

weiteren Stelle unendlich wird. Das Letztere ist im Grunde nur ein Specialfall des ersten; denn ich brauche nur die beliebige weitere Stelle als eine Stelle $z^{(s+1)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1^{(s+1)} = 0,\ \gamma_2^{(s+1)} = 0, \ldots \gamma_n^{(s+1)} = 0$ zu den Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ hinzuzufügen.

Ich beweise zuerst folgenden Hülfssatz:

Die Summe ist ganz unabhängig davon, wie man die in den $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ *enthaltenen willkürlichen Formen von* x_1, x_2 *festlegt.*

Irgend zwei $\Lambda^{(k)}$ mit verschiedener Festlegung der willkürlichen Formen können sich nämlich nur um einen Ausdruck der Gestalt

$$f^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2) = h_1^{(k)}(x_1, x_2) f'(z_1, z_2) + h_2^{(k)}(x_1, x_2) f''(z_1, z_2) + \cdots \\ \cdots + h_\sigma^{(k)}(x_1, x_2) f^{(\sigma)}(z_1, z_2)$$

unterscheiden, die mit den verschiedenen $\Lambda^{(k)}$ gebildeten Summen $\Omega_k(x_1, x_2)$ also nur um einen Ausdruck

$$- h_1^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i'(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - h_2^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i''(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}) - \cdots \\ \cdots - h_\sigma^{(k)}(x_1, x_2) \sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} f_i^{(\sigma)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}),$$

und dieser Ausdruck ist nach den zwischen den $\gamma_i^{(\mu)}$ bestehenden Relationen identisch Null.

Wir können nun, wie wir im nächsten Paragraphen leicht zeigen können, die $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ immer so einrichten, dass irgend eine bestimmte Stelle ξ keine Unendlichkeitsstelle für $\Lambda^{(k)}$ als Form von x_1, x_2 ist, d. h. dass die im vorigen Paragraphen gegebene Definition von $\Lambda^{(k)}$ nicht versagt, wenn x in die Stelle ξ rückt.

Wählt man ξ speciell als eine der Stellen $z', z'', \ldots z^{(s)}, z^{(s+1)}$, etwa als $z^{(\mu)}$, so werden alle Elementarformen mit Ausnahme derjenigen mit dem ersten Argumentpaar $z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)}$ an der Stelle endlich bleiben und nur $\Lambda_k^{(k)}(z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)};\ x_1, x_2)$ wird für $x = z^{(\mu)}$ mit dem Coefficienten -1 unendlich. Es wird also $\Omega_k(x_1, x_2)$ an der Stelle $z^{(\mu)}$ thatsächlich mit dem Coefficienten $\gamma_k^{(\mu)}$ unendlich, wie verlangt.

Nun ist aber die Summe von der Festlegung der willkürlichen Formen in den einzelnen Elementarschaaren überhaupt unabhängig; das Resultat bleibt also auch bestehen, falls einzelne der Summanden als Formen von x_1, x_2 an der Stelle ξ unendlich werden sollten. Die accessorischen Unstetigkeiten der einzelnen Summanden heben sich eben gerade heraus.

Dass auch etwaige, nicht durch die Gruppe bedingte Verzweigungsstellen der Elementarschaaren als Functionen von x_1, x_2 sich herausheben, folgt schon aus der Betrachtung des Verhaltens der Summe bei Umläufen von x_1, x_2.

Die Summe wird also nur an den vorgegebenen Stellen in der vorgegebenen Weise unendlich, besitzt den richtigen Grad und das

vorgeschriebene Verhalten gegenüber geschlossenen Umläufen des Argumentpaares x_1, x_2. Sie kann sich also von der gesuchten Formenschaar nur um eine ganze Formenschaar des gegebenen Grades und Multiplicatorsystems unterscheiden, und wir haben demnach den Satz:

Die Zweige der allgemeinsten Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ *des reciproken Systems, welche an den Stellen* $z', z'', \dots z^{(s)}$ *mit den Coefficienten* $\gamma_1', \gamma_2', \dots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \dots \gamma_n''; \dots \gamma_1^{(s)}, g_2^{(s)}, \dots \gamma_n^{(s)}$ *unendlich wird, lassen sich in der Gestalt darstellen*

$$\begin{aligned}\Omega_k(x_1, x_2) = & - \gamma_1' \Lambda_1^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_1'' \Lambda_1^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_1^{(s)} \Lambda_1^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2) \\ & - \gamma_2' \Lambda_2^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_2'' \Lambda_2^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_2^{(s)} \Lambda_2^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2) \\ & \vdots \\ & - \gamma_n' \Lambda_n^{(k)}(z_1', z_2'; x_1, x_2) - \gamma_n'' \Lambda_n^{(k)}(z_1'', z_2''; x_1, x_2) - \cdots \\ & \qquad \cdots - \gamma_n^{(s)} \Lambda_n^{(k)}(z_1^{(s)}, z_2^{(s)}; x_1, x_2) \\ & + \gamma_1 g_k'(x_1, x_2) + \gamma_2 g_k''(x_1, x_2) + \cdots + \gamma^{\sigma'} g_k^{(\sigma')}(x_1, x_2),\end{aligned}$$

unter $g', g'', \dots g^{(\sigma')}$ *irgend* σ' *speciell ausgewählte ganze Formenschaaren des reciproken Systems verstanden.*

Die Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2)$ sind daher sowohl für die Darstellung der Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$ wie der reciproken Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$ brauchbar. Als Formen von z_1, z_2 sind sie selbst Riemann'sche Formenschaaren des Systems $\Pi(z_1, z_2)$, dagegen als Formen von x_1, x_2 sind sie im Allgemeinen nicht selbst Riemann'sche Formenschaaren $\Omega(x_1, x_2)$; erst ihre in richtiger Weise gebildeten Summen sind Riemann'sche Formenschaaren.

Indem ich die schon bei der Theorie der multiplicativen Formen von mir angewandte Sprechweise aufnehme (Bd. 44 § 13), kann ich also sagen:

Die Schaaren $\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2)$ *sind als Formen von* z_1, z_2 *Elementarschaaren erster Art des Systems der* $\Pi(z_1, z_2)$, *als Formen von* x_1, x_2 *Elementarschaaren zweiter Art des Systems der* $\Omega(x_1, x_2)$.

Wir können natürlich auch das System $\Omega(x_1, x_2)$ als das ursprüngliche ansehen und für dieses Elementarschaaren erster Art $\Lambda(x_1, x_2; z_1, z_2)$ construiren, welche dann für das System der $\Pi(z_1, z_2)$ im Allgemeinen Elementarschaaren zweiter Art sein werden.

Es stehen uns also immer zwei Arten von Elementarschaaren für die Darstellung eines Systems $\Pi(z_1, z_2)$ *zur Verfügung; die der ersten Art sind nothwendig Riemann'sche Formenschaaren desselben Systems, die der zweiten Art müssen nur dann nothwendig Riemann'sche Formen-*

schaaren des Systems sein, wenn es in dem reciproken System keine ganzen Formenschaaren gibt.

Die Elementarschaaren erster Art sind Elementarschaaren zweiter Art für das reciproke System und umgekehrt.

Gibt es in dem betreffenden System keine ganzen Formenschaaren, so sind die Elementarschaaren erster Art mit unter denjenigen zweiter Art enthalten; gibt es aber im reciproken System keine ganzen Formenschaaren, so sind die Elementarschaaren zweiter Art des ersten Systems unter denen erster Art enthalten. Gibt es in keinem der beiden reciproken Systeme ganze Formenschaaren, so ist die Gesammtheit der Elementarschaaren erster Art mit der Gesammtheit der Elementarschaaren zweiter Art identisch.

§ 13.

Normirung der Elementarschaaren.

Es sei

$$nr = \sigma + \varrho, \quad \varrho \gtreqless 0,$$
$$nr' = \sigma' + \varrho', \quad \varrho' \geqq 0$$

gesetzt.

Es seien $u', u'', \dots u^{(r)}$ r allgemein gelegene Punkte, d. h. von solcher Lage, dass es keine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$ giebt, die an allen diesen Punkten verschwindet, und $w', w'', \dots w^{(r')}$ r' in dem Sinne allgemein gelegene Punkte, dass keine ganze Formenschaar $g(x_1, x_2)$ des zu $f(z_1, z_2)$ reciproken Systems an allen diesen Stellen verschwindet.

Unter der über die Lage der $u', u'', \dots u^{(r)}$ gemachten Voraussetzung verschwinden nicht alle σ-reihigen Determinanten der nr-reihigen und σ-zeiligen Matrix

$$\left\| \begin{matrix} f_i'\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ f_i''\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ \vdots \\ f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \end{matrix} \right\|, \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots n, \\ \nu = 1, 2, \dots r, \end{matrix}$$

worin $f', f'', \dots f^{(\sigma)}$ irgend σ linear unabhängige ganze Formenschaaren f bedeuten, und nur eine Reihe der Matrix hingeschrieben ist, aus der man alle Reihen erhält, wenn man i die Zahlen 1 bis n, ν die Zahlen 1 bis r durchlaufen lässt.

Dann lassen sich aber ϱ Systeme von je nr Grössen $A'_{i\nu}$, $A''_{i\nu}, \dots A^{(\varrho)}_{i\nu}$ bestimmen, so dass die Determinante:

$$\begin{vmatrix} f_i'\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ f_i''\,(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ \vdots \\ f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) \\ A_{i\nu}' \\ A_{i\nu}'' \\ \vdots \\ A_{i\nu}^{(\varrho)} \end{vmatrix} \text{ von Null verschieden ist.}$$

Es verschwinden dann auch nicht alle ϱ-reihigen Determinanten der nr-reihigen und ϱ-zeiligen Matrix

$$\begin{Vmatrix} A_{i\nu}' \\ A_{i\nu}'' \\ \vdots \\ A_{i\nu}^{(\varrho)} \end{Vmatrix}.$$

Man kann in Folge dessen σ linear unabhängige Systeme von je nr Zahlen: $\alpha_{i\nu}', \alpha_{i\nu}'', \ldots \alpha_{i\nu}^{(\sigma)}$ bestimmen, welche sämmtlich den ϱ Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A_{i\nu}' &= 0, \\ \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A_{i\nu}'' &= 0, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A_{i\nu}^{(\varrho)} &= 0. \end{aligned}$$

Ich behaupte nunmehr:

Eine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$, welche den σ Gleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}' f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) &= 0, \\ \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}'' f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) &= 0, \\ &\vdots \\ \sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}^{(\sigma)} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) &= 0. \end{aligned}$$

genügt, muss nothwendig identisch verschwinden.

Denn setzt man

$$f = a_1 f' + a_2 f'' + \cdots + a_\sigma f^{(\sigma)},$$

so erhält man für die σ Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ folgende σ linearen Gleichungen

$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$a_1 \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f'_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + a_2 \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f''_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) + \cdots$$
$$\cdots + a_\sigma \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0.$$

Wenn diese Gleichungen mit nicht durchweg verschwindenden $a_1, a_2, \ldots$ $\ldots a_\sigma$ verträglich sein sollen, so muss eine die identische Folge der übrigen sein, d. h. es muss σ Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\sigma$ geben, so dass

$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f'_i \; (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f''_i \; (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} (\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}) f_i^{(\sigma)} (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0$$

ist. Setze ich nun zur Abkürzung

$$\alpha_1 \alpha'_{i\nu} + \alpha_2 \alpha''_{i\nu} + \cdots + \alpha_\sigma \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} = \alpha_{i\nu},$$

so genügen die $\alpha_{i\nu}$ nicht nur den σ Gleichungen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f'_i \; (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f''_i \; (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} f_i^{(\sigma)} (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = 0,$$

sondern wegen ihrer linearen Zusammensetzung aus den $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \ldots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ auch den ϱ Gleichungen:

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A'_{i\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A''_{i\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A^{(\varrho)}_{i\nu} = 0.$$

Da aber die Determinante dieses Gleichungssystems von Null verschieden ist, so müssen sämmtliche $\alpha_{i\nu}$ gleich Null sein, was wegen der linearen Unabhängigkeit der Systeme $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \ldots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ das Verschwinden der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\sigma$ nach sich zieht. Die zur Bestimmung der $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ dienenden Gleichungen sind also linear unabhängig von einander, und es müssen also alle $a_1, a_2, \ldots a_\sigma$ gleich Null sein, d. h. die Formenschaar f muss identisch verschwinden.

Ferner kann man den Satz aussprechen:

Man kann auf eindeutige Weise σ linear unabhängige ganze Formenschaaren $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}$ *durch die Gleichungen definiren:*

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \mathfrak{f}^{(h)}_i (u^{(\nu)}_1, u^{(\nu)}_2) = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \mathfrak{f}^{(h)}_i (u^{(\nu)}_1, u^{(\nu)}_2) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(h)}_{i\nu}\, \mathfrak{f}^{(h)}_i (u^{(\nu)}_1, u^{(\nu)}_2) = 1,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \mathfrak{f}^{(h)}_i (u^{(\nu)}_1, u^{(\nu)}_2) = 0.$$

Denn in den Bestimmungsgleichungen für die Zusammensetzungscoefficienten der $\mathfrak{f}^{(h)}$ aus irgend welchen beliebigen σ linear unabhängigen Schaaren f ist die Determinante der linken Seiten von Null verschieden.

Die σ Schaaren $\mathfrak{f}'(z_1, z_2), \mathfrak{f}''(z_1, z_2), \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2)$ bezeichne ich jetzt als die *normirten ganzen Elementarschaaren* des Systems Π.

Jede beliebige ganze Formenschaar f des Systems Π lässt sich in einfachster Weise durch die normirten ganzen Elementarformen ausdrücken.

Es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A',$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A^{(\sigma)}.$$

Dann ist

$$f(z_1, z_2) = A' \mathfrak{f}'(z_1, z_2) + A'' \mathfrak{f}''(z_1, z_2) + \cdots A^{(\sigma)} \mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2).$$

In gleicher Weise wie wir für das System Π vermittelst der Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und passend ausgewählter Constanten $A'_{i\nu}, A''_{i\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{i\nu}$ sowie $\alpha'_{i\nu}, \alpha''_{i\nu}, \ldots \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}$ die ganzen Elementarschaaren $\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}$ construirt haben, construiren wir für das reciproke System Ω vermittelst der Punkte $w', w'', \ldots w^{(r')}$ und passend gewählter Constanten $B'_{i\nu}, B''_{i\nu}, \ldots B^{(\varrho)}_{i\nu}$ sowie $\beta'_{i\nu}, \beta''_{i\nu}, \ldots \beta^{(\sigma')}_{i\nu}$ die σ' ganzen Elementarschaaren $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'', \ldots \mathfrak{g}^{(\sigma')}$, welche in analoger Weise zur Darstellung aller ganzen Formenschaaren g verwendet werden können.

Wir werden jetzt auch die Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2; x_1, x_2)$ in bestimmter Weise zu normiren haben. Wir gehen von irgend einer irgendwie construirten Schaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ aus, welche als Form von z_1, z_2 die bewegliche Unendlichkeitsstelle x und die festen Unendlichkeitsstellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ hat, und zwar so, dass die Coefficienten $\beta_{i\nu}$ des Unendlichwerdens an diesen Stellen den ϱ' Relationen genügen:

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0.$$

In der so definirten Schaar $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ sind noch σ willkürliche Formen von x_1, x_2 enthalten, die wir auf folgende Weise eindeutig festlegen:

Die Werthe der Zweige von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Function von z an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ sind Formen δ'ten Grades von x_1, x_2, ebenso die Summen:

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2) = A'_k(x_1, x_2),$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2) = A''_k(x_1, x_2),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2) = A_k^{(\sigma)}(x_1, x_2).$$

Ich setze dann

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) = \Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) - A_k'(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}'(z_1, z_2)$$
$$- A_k''(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}''(z_1, z_2) - \cdots - A_k^{(\sigma)}(x_1, x_2)\,\mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2),$$

und bezeichne die so gewonnenen neuen Elementarformenschaaren als „*normirte Elementarschaaren*". Dieselben haben die Eigenschaft, dass die σ Summen:

$$\sum_{i\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2),$$

$$\sum_{i\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2)$$

sämmtlich verschwinden.

Die normirten Elementarschaaren sind auch als Formen von x_1, x_2 durch ihre Definition wohlbestimmt; denn irgend zwei in gleicher Weise normirte Elementarschaaren könnten sich nur um eine ganze Formenschaar $f(z_1, z_2)$ unterscheiden von der Eigenschaft, dass alle die σ Summen

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}),\ \sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}), \ldots \sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu} f_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)})$$

verschwänden, und dann muss $f(z_1, z_2)$ selbst identisch verschwinden.

Vermittelst der normirten Elementarschaaren

$$\Lambda'(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\ \Lambda''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), \ldots \Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),$$

sowie der normirten ganzen Elementarschaaren

$$\mathfrak{f}'(z_1, z_2),\ \mathfrak{f}''(z_1, z_2), \ldots \mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2)$$

lässt sich jetzt jede beliebige Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen in einfachster Weise zusammensetzen:

$\Pi(z_1, z_2)$ besitze die Unendlichkeitsstellen $x', x'', \ldots x^{(s)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'$; $\gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''$; $\ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ und es sei

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A',$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Pi_i(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A^{(\sigma)};$$

Dann ist

$$\Pi(z_1, z_2) = \begin{array}{l} \gamma_1'\Lambda'\,(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_1''\Lambda'\,(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_1^{(s)}\Lambda'\,(z_1, z_2;\, x_1^{(s)}, x_2^{(s)}), \\ + \gamma_2'\Lambda''\,(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_2''\Lambda''\,(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_2^{(s)}\Lambda''\,(z_1, z_2;\, x_1^{(s)}, x_2^{(s)}), \\ \vdots \\ + \gamma_n'\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1', x_2') + \gamma_n''\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1'', x_2'') + \cdots \\ \qquad \cdots + \gamma_n^{(s)}\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1^{(s)}, x_2^{(s)}), \\ + A'\mathfrak{f}'(z_1 z_2) + A''\mathfrak{f}''(z_1, z_2) + \cdots + A^{(\sigma)}\mathfrak{f}^{(\sigma)}(z_1, z_2). \end{array}$$

Wir untersuchen nunmehr das Verhalten der normirten Elementarschaaren $\Lambda(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Formen ihres zweiten Argumentpaares x_1, x_2.

Lassen wir x_1, x_2 irgend einen auf dem algebraischen Gebilde geschlossenen Umlauf $x_1, x_2;\, x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}$ ausführen, so geht $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ über in

$$\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1^{(\varkappa)}, x_2^{(\varkappa)}) = \alpha'_{k1}\Lambda'(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \alpha'_{k2}\Lambda''(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \cdots$$
$$\cdots + \alpha'_{kn}\Lambda^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + f^{(\varkappa)}(z_1, z_2),$$

wobei $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ eine noch von x_1, x_2 abhängige Formenschaar ist, die als Function von z_1, z_2 eine ganze Formenschaar des Systems Π ist.

Während aber x_1, x_2 seinen Umlauf ausführt, muss fortwährend die Eigenschaft von Λ erhalten bleiben, dass die σ Summen

$$\sum_{i,\nu} \alpha'_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2),$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha''_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha^{(\sigma)}_{i\nu}\, \Lambda_i^{(k)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2)$$

verschwinden; es genügt also die links stehende Formenschaar diesen σ Gleichungen. Denselben Gleichungen genügen aber auch die rechts stehenden Schaaren $\Lambda', \Lambda'', \ldots \Lambda^{(n)}$, also müsste auch die ganze

Formenschaar $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ den σ Gleichungen genügen, woraus denn folgt, dass $f^{(\varkappa)}(z_1, z_2)$ identisch verschwindet.

Wir haben als den Satz:

Die n^2 normirten Elementarformen

$$\begin{array}{llll}
\Lambda_1'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_1''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_1^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\\
\Lambda_2'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_2''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_2^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\Lambda_n'(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \Lambda_n''(z_1, z_2;\, x_1, x_2), & \ldots & \Lambda_n^{(n)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2),
\end{array}$$

sind colonnenweise zusammengefasst Schaaren des Systems $\Pi(z_1, z_2)$, *zeilenweise zusammengefasst Schaaren des reciproken Systems der* $\Omega(x_1, x_2)$.

Was haben nun die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und $w', w'', \ldots w^{(r')}$ für eine Bedeutung für die Schaaren $\Lambda(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Function des zweiten Argumentpaares? Ich behaupte:

An den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$, welche für die Λ als Functionen von z_1, z_2 Unendlichkeitsstellen sind, verschwinden als Functionen von x_1, x_2 die σ' Combinationen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}'\, \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\, w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}''\, \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\, w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}^{(\sigma')}\, \Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\, w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)})$$

identisch.

Die Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ spielen also für die n Schaaren $\Lambda_1, \Lambda_1, \ldots \Lambda_n$ als Functionen von x_1, x_2 dieselbe Rolle, wie die Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ für die n Schaaren $\Lambda', \Lambda'', \ldots \Lambda^{(n)}$ als Functionen von z_1, z_2.

Zum Beweise untersuche ich zuerst die Natur der einzelnen Form $\Lambda_i^{(k)}(z_1, z_2;\, w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)})$ als Function von z_1, z_2. Als solche wird sie nur an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ unendlich etwa an der Stelle $w^{(\mu)}$ mit dem Coefficienten $\gamma_{i\mu}^{(k,\nu)}$. Diese Coefficienten genügen einerseits den σ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g'\ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g''\ (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} g^{(\sigma')}(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

andererseits den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B'_{i\mu} = B'_{k,\nu},$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B''_{i\mu} = B''_{k,\nu},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} \gamma_{i\mu}^{(k,\nu)} B_{i\mu}^{(\varrho')} = B_{k,\nu}^{(\varrho')}.$$

Irgend eine unserer Summen, etwa

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} \Lambda_i^{(k)} (z_1, z_2; w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

ist also ebenfalls eine Form von z_1, z_2, die nur an den Stellen $w', w'', \dots w^{(r')}$ unendlich wird und zwar mit den Coefficienten

$$\delta_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} \gamma_{i,\mu}^{(k,\nu)}.$$

Die Coefficienten $\delta_{i\mu}$ genügen, gemäss ihrer Zusammensetzung aus den $\gamma_{i\mu}^{(k,\nu)}$, den σ' Gleichungen:

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} \mathfrak{g}_i' \; (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} \mathfrak{g}_i'' \; (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} \mathfrak{g}_i^{(\sigma')} (w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}) = 0$$

und den ϱ' Gleichungen

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B'_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B'_{k\nu},$$

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B''_{i\mu} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B''_{k\nu},$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\mu} \delta_{i\mu} B_{i\mu}^{(\varrho')} = \sum_{k,\nu} \beta_{k,\nu} B_{k\nu}^{(\varrho')}.$$

In diesen letzteren Gleichungen sind aber die rechten Seiten nach der Definition der $\beta_{k\nu}$ gleich Null, so dass also die Cofficienten $\delta_{i\mu}$ den Gleichungen genügen:

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} g_i' \left(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}\right) = 0,$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} g_i'' \left(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}\right) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} g_i^{(\sigma')} \left(w_1^{(\mu)}, w_2^{(\mu)}\right) = 0;$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B'_{i\mu} = 0,$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B''_{i\mu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i\mu} \delta_{i\mu} B^{(\varrho')}_{i\mu} = 0.$$

Dies ist aber nur so möglich, dass sämmtliche $\delta_{i\mu} = 0$ sind, dass also

$$\sum_{k\nu} \beta_{k\nu} \Lambda^{(k)}\left(z_1, z_2; w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}\right)$$

eine ganze Formenschaar des Systems Π ist. Nun genügt aber jeder Theil dieser Summe an den Stellen $u', u'', \dots u^{(r)}$ den σ zu diesen Stellen gehörigen Relationen, also auch die Summe. Eine ganze Formenschaar aber, welche diesen Relationen genügt, muss identisch verschwinden, also auch unsere Summe, womit der behauptete Satz bewiesen ist.

Ferner behaupte ich:

Die Stellen $u', u'', \dots u^{(r)}$ sind die festen Unendlichkeitsstellen der Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2; x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2, und die Coefficienten $\alpha_{k\nu}$ der Zweige einer solchen Schaar an den r Stellen genügen den ϱ Relationen:

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A'_{k\nu} = 0,$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A''_{k\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A^{(\varrho)}_{k\nu} = 0.$$

($u', u'', \dots u^{(r)}$ sind offenbar die einzigen möglichen Unendlichkeitsstellen von $\Lambda_i^{(k)}$ als Function von x_1, x_2. Denn für keine andere Lage

der Stelle x versagen die in der Definition von $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ vorkommenden Bestimmungen. Damit ist der Beweis des zum vorigen Paragraphen benutzten Satzes nachgeholt, dass man $\Lambda^{(k)}(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ so einrichten kann, dass die Definition für eine bestimmte aber beliebige Lage ζ der Stelle x nicht versagt; denn offenbar kann man es immer so einrichten, dass keiner der Punkte $u', u'', \dots u^{(r)}$ mit ζ zusammenfällt: Man braucht ja nur $r > \sigma + p - 1$, und alle Punkte u von ζ verschieden zu nehmen, um sicher allgemein gelegene Punkte u zu haben, die dieser Bedingung genügen).

Die Stellen $u', u'', \dots u^{(r)}$ spielen also für die Schaaren Λ_i als Functionen von x_1, x_2 dieselbe Rolle, wie die Stellen $w', w'', \dots w^{(r)}$ für die Schaaren $\Lambda^{(k)}$ als Functionen von z_1, z_2.

Zum Beweise benutzen wir den Umstand, dass bereits nach dem vorigen Paragraphen die Schaaren $\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2 betrachtet Elementarschaaren des Systems $\Omega(x_1, x_2)$ sind.

Wir benutzen nun diese Elementarschaaren zur Herstellung einer Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$ von folgenden Eigenschaften:

Bei $x = z$ soll nur der $i$te Zweig unendlich werden mit dem Coefficienten -1, und sonst sollen nur bei $u', u'', \dots u^{(r)}$ Unendlichkeitsstellen liegen, deren Coefficienten $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \dots \alpha_{n1};\ \alpha_{12}, \alpha_{22}, \dots \alpha_{n2}; \dots$ $\dots \alpha_{1r}, \alpha_{2r}, \dots \alpha_{nr}$ folgenden $\sigma + \varrho$ Relationen genügen:

$$\begin{array}{ll}
\sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k'\ (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = \mathfrak{f}_i'\ (z_1, z_2), & \sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}' = 0, \\
\sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k''\ (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = \mathfrak{f}_i''(z_1, z_2), & \sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}'' = 0, \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
\sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \mathfrak{f}_k^{(\sigma)}(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = \mathfrak{f}_i^{(\sigma)}(z_1, z_2), & \sum\limits_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A_{k\nu}^{(\varrho)} = 0.
\end{array}$$

Ferner sollen an den Stellen $w', w'', \dots w^{(r)}$ die σ' Gleichungen erfüllt sein

$$\begin{gathered}
\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}'\ \Omega_k(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = 0, \\
\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}''\ \Omega_k(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = 0, \\
\vdots \\
\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}^{(\sigma')} \Omega_k\,(w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = 0.
\end{gathered}$$

Man findet, da die Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ von selbst dem letzten Gleichungsystem genügen:

$$\Omega(x_1, x_2) = \Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2) + \sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} \Lambda_k(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\, x_1, x_2).$$

Die $\sum\limits_{k,\nu}$ auf der rechten Seite dieser Darstellung ist aber, welches auch der obere Index der Λ_k sein mag, gleich Null, da die $\alpha_{k\nu}$ den Gleichungen

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A'_{k\nu} = 0,$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A''_{k\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A^{(\varrho)}_{k\nu} = 0$$

genügen und also lineare Combinationen der σ Systeme $\alpha'_{k\nu}, \alpha''_{k\nu}, \ldots$ $\ldots \alpha^{(\sigma)}_{k\nu}$ sind.

Folglich ist die gesuchte Schaar direct $\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ und diese hat daher an den Stellen $u', u'', \ldots u^{(r)}$ in der That das behauptete Verhalten.

Die normirten Elementarformen $\Lambda_i^k(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ sind also sowohl für die Schaaren $\Pi(z_1, z_2)$ wie für die Schaaren $\Omega(x_1, x_2)$ normirte Elementarformen, und zwar haben die Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ nebst den Constanten $A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$ sowie die Punkte $w', w'', \ldots w^{(r)}$ mit den Constanten $B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$ dieselbe Bedeutung für die Elementarschaaren $\Lambda^k(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Functionen von z_1, z_2, wie $w', w'', \ldots w^{(r')}, B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$ bezw. $u', u'', \ldots u^{(r)}$; $A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$ für die Elementarschaaren $\Lambda_i(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Functionen von x_1, x_2.

Das Verhalten der normirten Elementarformen sowohl als Formen von z_1, z_2, wie von x_1, x_2 ist vollständig charakterisirt durch Angabe der Punkte $u', u'', \ldots u^{(r)}$ und der Constanten $A'_{k\nu}, A''_{k\nu}, \ldots A^{(\varrho)}_{k\nu}$, sowie der Punkte $w', w'', \ldots w^{(r')}$ und der Constanten $B'_{k\nu}, B''_{k\nu}, \ldots B^{(\varrho')}_{k\nu}$, und zwar folgendermassen:

Die Schaar $\Lambda^k(z_1, z_2;\, x_1, x_2)$ als Function von z_1, z_2 wird an der Stelle x nur in ihrem $k$ten Zweige und zwar mit dem Coefficienten $+1$ unendlich, sonst nur an den Stellen $w', w'', \ldots w^{(r')}$ mit Coefficienten $\beta_{i\nu}$, welche den ϱ' Relationen

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B'_{i\nu} = 0,$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B''_{i\nu} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \beta_{i\nu} B^{(\varrho')}_{i\nu} = 0$$

genügen, und an den Stellen $u', u'', \dots u^{(r)}$ verschwinden alle Combinationen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} \Lambda_i^k(u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)};\ x_1, x_2),$$

deren Coefficienten den ϱ Relationen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A'_{i\nu} = 0,$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A''_{i\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu} A^{(\varrho)}_{i\nu} = 0$$

genügen.

Die Schaar $\Lambda_i(z_1, z_2;\ x_1, x_2)$ als Function von x_1, x_2 wird an der Stelle z nur in ihrem $i$ten Zweige und zwar mit dem Coefficienten -1 unendlich, sonst nur an den Stellen $u', u'', \dots u^{(r)}$ mit Coefficienten $\alpha_{k\nu}$, welche den ϱ Relationen

$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A'_{k\nu} = 0,$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A''_{k\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k,\nu} \alpha_{k\nu} A^{(\varrho)}_{k\nu} = 0$$

genügen, und an den Stellen $w', w'', \dots w^{(r)}$ verschwinden alle Combinationen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} \Lambda_i^k(z_1, z_2;\ w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}),$$

deren Coefficienten den ϱ' Relationen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B'_{k\nu} = 0,$$
$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B''_{k\nu} = 0,$$
$$\vdots$$
$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu} B^{(\varrho')}_{k\nu} = 0$$

genügen.

Jede Formenschaar $\Pi(z_1, z_2)$ mit nur einfachen Unendlichkeitsstellen $x', x'', \ldots x^{(s)}$ und den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$, hat, wenn man die Abkürzungen

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}' \Pi_i (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A',$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}'' \Pi_i (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i,\nu} \alpha_{i\nu}^{(\sigma)} \Pi_i (u_1^{(\nu)}, u_2^{(\nu)}) = A^{(\sigma)}$$

einführt, die Darstellung:

$$\Pi(z_1, z_2) = \sum_{k,\mu} \gamma_k^{(\mu)} \Lambda^k (z_1, z_2;\, x_1^{(\mu)}, x_2^{(\mu)}) + \sum_{\lambda} A^{(\lambda)} \mathfrak{f}^{(\lambda)}(z_1, z_2);$$

und jede Formenschaar $\Omega(x_1, x_2)$, welche nur die einfachen Unendlichkeitsstellen $z', z'', \ldots z^{(s)}$ mit den Coefficienten $\gamma_1', \gamma_2', \ldots \gamma_n'; \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots \gamma_n''; \ldots \gamma_1^{(s)}, \gamma_2^{(s)}, \ldots \gamma_n^{(s)}$ besitzt, hat, nach Einführung der Abkürzungen

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}' \Omega_k (w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B',$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}'' \Omega_k (w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B'',$$

$$\vdots$$

$$\sum_{k,\nu} \beta_{k\nu}^{(\sigma')} \Omega_k (w_1^{(\nu)}, w_2^{(\nu)}) = B^{(\sigma')}$$

die Darstellung:

$$\Omega(x_1, x_2) = -\sum_{i,\mu} \gamma_i^{(\mu)} \Lambda_i (z_1^{(\mu)}, z_2^{(\mu)};\, x_1, x_2) + \sum_{\lambda} B^{(\lambda)} . \mathfrak{g}^{(\lambda)}(x_1, x_2).$$

Hiermit sind nunmehr alle die einzelnen Sätze, die ich in meiner Arbeit in Bd. 44 der Math. Ann. über die Darstellung multiplicativer Formen durch Elementarformen ausgesprochen habe, für solche Formenschaaren verallgemeinert worden, die bei geschlossenen Umläufen der Variablen auf einer Riemann'schen Fläche lineare Substitutionen der Zweige erleiden.

Wie ich in jener Arbeit fernerhin eine Anwendung der entwickelten Theorie auf die Theorie der automorphen Formen gegeben habe, durch welche sich alle die Poincaré'schen Resultate in allgemeinster und dabei überraschend einfacher Weise ergeben, so lässt sich auch die jetzt entwickelte Theorie auf die Poincaré'schen „fonctions zétafuchsiennes"

und „fonctions zétakleinéennes" anwenden; macht man diese Poincaré'schen Functionen homogen, so werden es eben Formenschaaren, deren Zweige sich linear substituiren, wenn man die Variablen auf einem automorphen Fundamentalbereiche wandern lässt, der dann an Stelle der Riemann'schen Fläche tritt, auf die er conform abgebildet werden kann. Nach einem Vorschlage von Herrn Klein will ich diese Formenschaaren, die homogen gemachten Poincaré'schen Zetafunctionen, als „homomorphe Formen" bezeichnen.

Die Anwendung der in meiner vorliegenden Abhandlung entwickelten Theorie auf die homomorphen Formen soll der Gegenstand einer weiteren hieran sich anschliessenden Arbeit sein*).

Göttingen im April 1895.

---

*) Diese Aussicht wird sich, wie wir zu unserem grössten Bedauern mittheilen müssen, nicht erfüllen. Unser geschätzter Mitarbeiter, Herr Dr. Ernst Ritter, der einen Ruf an die Cornell-University in Ithaca angenommen hatte, ist auf dem Wege dorthin in New-York am 23. September einer plötzlichen Erkrankung am Typhus erlegen. Ein ausführlicher Nekrolog wird im 4ten Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung veröffentlicht werden. Hier theilen wir noch mit, dass sich in dem Nachlasse Ritter's eine fast vollendete Arbeit „Ueber hypergeometrische Functionen mit einem Nebenpunkte" gefunden hat, welche demnächst in diesen Annalen publicirt werden soll. Die mathematischen Annalen enthalten dann die sämmtlichen functionentheoretischen Arbeiten von Ritter; eine Untersuchung über die Bewegung elektrischer Theilchen nach dem Weber'schen Gesetz ist früher in Bd. 37 von Schlömilch's Zeitschrift publicirt worden."

Die Redaction.

Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie.

Von

H. G. Zeuthen in Kopenhagen.

Die logischen Principien, welche die Mathematik zur exacten Wissenschaft gemacht haben, sind bekanntlich von den alten Griechen aufgestellt worden. Diese Principien waren so vollständig entwickelt, dass man in der Regel durch genauere Untersuchung und durch ein tieferes Eindringen einen vernünftigen Grund auch für dasjenige finden wird, was uns zuerst als eine überflüssige Vorsicht oder eine willkürliche Festsetzung erscheint. So lässt der genauere Infinitesimalbegriff uns in unserem Jahrhundert besser die logische Bedeutung des weitläufigen Exhaustionsbeweises verstehen, als es im vorigen Jahrhundert der Fall war.

Das, was ich hier zu erklären versuchen werde, ist eine andere Seite der antiken Geometrie. Wir haben von den Griechen die geometrische Construction geerbt. Namentlich solche Constructionen, die sich mittels Zirkel und Lineal ausführen lassen, dienen als vortreffliche Uebung in unseren Schulen und sind unentbehrlich für die Practiker. Die Griechen wandten aber die Construction in viel ausgedehnterem Maasse an, als wir zu thun pflegen, namentlich auch da, wo ihr practischer Nutzen ganz hinfällig ist. Was nützt es zum Beispiel mit Hülfe von Kegelschnitten eine Cubikwurzel zu bestimmen oder eine cubische Gleichung zu lösen? Man hat sich darüber gestritten, wie die Griechen solche Constructionen wirklich ausgeführt haben, ob sie sich die Kegelschnitte durch wirkliche Anfertigung von Kegeln oder durch Construction einer gewissen Anzahl von Punkten in der Ebene hergestellt haben. Die erste Methode würde ungeheuerlich sein, die zweite auch ziemlich beschwerlich und ungenau; von der Anwendung dieser Methoden findet sich auch in der That gar nichts in der überlieferten Litteratur. Ich aber glaube, dass man diese Construction mit Hülfe von Kegelschnitten im allgemeinen nicht practisch ausgeführt hat, sondern dass diese vielmehr — wie sie es auch für uns

sein können — ein theoretisches Mittel, ein Mittel zur Erweiterung der Erkenntniss waren. Dieselbe Bedeutung haben auch die einfacheren Constructionen in den streng wissenschaftlichen Werken, wenn man natürlich auch die practische Ausführung da nicht versäumte, wo sie wirklich von Nutzen war.

Um hierüber zur Sicherheit zu gelangen und gleichzeitig zu erfahren, welches denn die theoretische Bedeutung der Constructionen war, muss man sie von ihrem ersten Auftreten in Euclid an verfolgen. Man wird dann bestätigt finden, dass *die Construction mit dem dazu gehörigen Beweise für ihre Richtigkeit dazu diente, die Existenz desjenigen, was construirt werden sollte, sicher zu stellen.*

Die Constructionen werden bei Euclid durch die *Postulate* vorbereitet. In diesen werden die practischen Hülfsmittel, Zirkel und Lineal gar nicht genannt, es wird nur die Bestimmung der Geraden mittels zweier Punkte, des Kreises mittels Centrum und einer beiliegenden Strecke als Radius u. s. w. verlangt, es wird also die Existenz der so bestimmten Figuren gefordert. In den Definitionen wird gesagt, was ein gleichseitiges Dreieck ist; erst in Satz 1 wird mittels der Construction eines solchen bewiesen, dass es wirklich solche giebt. In Satz 2 wird diese Construction dazu benutzt, einen Kreis auch dann zu construiren, wenn der Radius zwar gegeben ist aber nicht vom Mittelpunkt ausgeht. Diese Construction hat kaum einen practischen Zweck haben können. Wenn man wirklich in einem solchen Falle den Kreis zeichnen wollte, benutzte man sicher den Zirkel ganz auf dieselbe Weise wie wir es thun würden. Der Zweck der von Euclid beschriebenen Construction ist nur der gewesen: in den Postulaten möglichst wenig zu fordern.

Die Bedeutung der Construction als Existenzbeweis tritt jedoch erst dann recht hervor, wenn man nicht dasjenige herstellen will, was zum weiteren Construiren nöthig ist, sondern dasjenige, was man nachher nur in Lehrsätzen benutzen will. Es zeigt sich z. B., dass Euclid es nicht wagt, den Mittelpunkt einer Strecke in einem *Beweise* (I, 16) zu benutzen, bevor er die Existenz dieses Punktes durch seine Construction (in I, 10) bewiesen hat.

Man könnte eine solche Vorsicht übertrieben nennen, wenn man nicht eine Erklärung für sie in dem Umstande fände, dass wenigstens in einem ähnlichen Falle eine solche Vorsicht den geometrischen Hülfsmitteln gegenüber durch die damaligen Verhältnisse wohl begründet war. Man führt die Entdeckung der irrationalen und incommensurablen Grössen auf die Pythagoreer zurück. Für die Griechen, die als Zahlen unmittelbar nur ganze Zahlen, indirect auch Brüche als Verhältnisse ganzer Zahlen, anerkannten, war das Verhältniss incommensurabler Grössen ein solches, das sich überhaupt nicht durch Zahlen ausdrücken

lies. *Eine Zahl* $\sqrt{2}$, die mit sich selbst multiplicirt 2 giebt, *existirte* für sie einfach gar nicht. Man half sich dadurch, dass man allgemeine Grössen durch Strecken darstellte, eine Darstellungsweise, die nichts über die Commensurabilität voraussetzt. Dies würde jedoch von gar keinem Nutzen sein, wenn man nicht die Existenz derjenigen Strecken bewies, welche die nicht existirenden arithmetischen Grössen vertreten sollten. Einen solchen Beweis hatte man in der Construction von $a\sqrt{2}$ als Hypotenuse eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecks, oder als geometrisches Mittel zwischen a und $2a$.

Eben dieselben Gründe müssten dazu führen auch die Cubikwurzel geometrisch darzustellen und ihre Existenz durch geometrische Construction zu sichern. Da dies nicht durch Kreis und Gerade gelang, musste man andere Constructionen aufsuchen. Warum man dann die Kegelschnitte anderen, in mechanischer Beziehung besseren Constructionsmitteln vorzog, werden wir bald sehen.

Vorläufig gehe ich aber von diesen Constructionen, deren theoretische Bedeutung vor der jetzigen, mehr arithmetischen Grössenauffassung zurücktreten müsste, weiter zu anderen, wo die Bedeutung der Construction als Existenzbeweis der jetzigen Auffassung näher liegt, wie sie auch durch die Form der alten Sätze deutlich hervortritt. Es sind diejenigen Fälle, wo die Construction eine Möglichkeitsbedingung fordert, die zu beweisende Existenz also nur eine begrenzte ist. In solchen Fällen geben wir jetzt gewöhnlich an, wie die Construction auszuführen ist, *wenn* sie möglich ist, und suchen erst nachher durch eine Discussion zu erfahren, wenn dies der Fall ist. Anders verfuhren die Alten, wenigstens in ihren synthetisch geordneten Lehrgebäuden. Es kommt erst ein *Lehrsatz* (Theorem), wo die *Nothwendigkeit* der Bedingung bewiesen wird. Dann kommt ein *Problem:* die Aufgabe, die Figur zu construiren, aber diese Aufgabe wird schon beim Aussprechen begrenzt durch den sogenannten *Diorismus.* Dieser beginnt mit den Worten: „*Es muss aber*", und wiederholt dann die ganze Möglichkeitsbedingung, deren Nothwendigkeit schon im Theoreme bewiesen ist. Durch die Ausführung der Construction im so begrenzten Falle und durch den Beweis für ihre Richtigkeit, wird factisch bewiesen, das die ausgesprochene Möglichkeitsbedingung auch *hinreichend* ist. Dass dies auch die Absicht war, geht daraus hervor, dass man immer schon bei der Stellung der Aufgabe die Begrenzung hinzufügt. Eine ausdrückliche Stellung ohne diese würde eine fehlerhafte Angabe sein, die glauben lassen müsste, dass die Lösung der Aufgabe immer möglich wäre.

Beispiele finden sich schon bei Euclid, der in I, 20 die Nothwendigkeit der Bedingungen beweist, welchen die Seiten eines Dreiecks unterworfen sind, und in I, 22 durch Construction des Dreiecks mit

so gegebenen Seiten beweist, dass dieselben Bedingungen hinreichend sind. Weiter wird im Buche VI durch das Theorem 27 und das Problem 28 auf dieselbe Weise bewiesen, dass die Möglichkeitsbedingung $\left(\frac{a}{2}\right)^2 \geqq b$ für die — geometrisch ausgesprochene — Gleichung $x^2 - ax + b = 0$ sowohl nothwendig als hinreichend ist. Hierher gehören aber auch die am weitesten gehenden Anwendungen der Kegelschnitte, welche auch in unseren Augen den Constructionen durch Kegelschnitte eine wichtige theoretische Bedeutung geben. Zwar bewundern wir im 5ten Buche des Apollonius die Eleganz der Construction der Normalen von einem Punkte an einen Kegelschnitt mit Hülfe einer gleichseitigen Hyperbel. Ihren grössten Werth erhält diese Construction jedoch durch den Umstand, dass ihr Diorismus Kennzeichen liefert, wodurch sich entscheiden lässt, wie viele Normale von jedem Punkte der Ebene ausgehen. Fast noch wichtiger ist der Diorismus der archimedischen Gleichung

$$x^3 - ax^2 + b^2c = 0,$$

welcher sich in einem von Eutokius gefundenen, vielleicht von Archimedes herrührenden Manuscript findet. In geometrischer Fassung und Beweisführung enthält dieser Diorismus das, was wir jetzt die Discriminante der genannten Gleichung nennen, oder einfacher ausgesprochen, die Bestimmung des Maximums von $x^2(a-x)$. Auch hier dient die Construction zum Beweise dafür, dass die im Diorismus ausgedrückte Bedingung wirklich hinreichend ist. —

Die hier gegebene Erklärung der Bedeutung der geometrischen Construction in der antiken Geometrie wird bestätigt, und gleichzeitig nützlich, dadurch, dass sie uns andere Räthsel löst. Als ein solches Räthsel hat man oft das sogenannte 11te Axiom, oder wie es nach den zuverlässigsten philologischen Untersuchungen heissen soll, *das 5te Postulat Euclids* betrachtet. Früher hat man sich wohl meistens nur über die grosse Vorsicht gewundert, welche Euclid dazu brachte, sich nicht mit einem blossen Anschauungsbeweis zu begnügen, jetzt ist man wohl mehr erstaunt über den Scharfsinn, welchen er gezeigt hat durch die factische Anerkennung einer Nothwendigkeit, die erst den feinsten Köpfen unseres Jahrhunderts völlig klar geworden ist. Die vorhergehenden Betrachtungen werden aber erklären, dass die ausdrückliche Aufstellung der Forderung, und zwar unter den Postulaten, dem Euclid nicht so ausserordentlich fern liegen musste. Um durch Angabe von Constructionen mit Hülfe von Geraden und Kreisen die Existenz der zu construirenden Figuren sicher zu stellen, genügt es nicht, im voraus die Existenz der am einfachsten bestimmten Geraden und Kreise zu postuliren, sondern man muss auch die Existenz solcher Schnittpunkte, die weiter in der Construction zu benutzen sind, sicher

stellen. Für den Kreis geschieht dies dadurch, dass schon in der Definition gesagt ist, dass der Kreis eine Figur, die Kreislinie also eine geschlossene Curve ist; daraus entnimmt Euclid (in I, 12 und 22) die Gewissheit, dass sie eine andere Linie schneidet, wenn diese einen ausserhalb liegenden Punkt mit einem inneren verbindet. In einzelnen Fällen kann man auf ähnliche Weise aus dem Umstande, dass eine Gerade durch innere Punkte einer geschlossenen geradlinigen Figur geht, schliessen, dass sie eine Seite dieser Figur schneidet. Dieses benutzt Euclid im Beweise für I, 21. Das gelingt aber offenbar nur in ganz einzelnen Fällen. Es *musste* sich also bald die Nothwendigkeit herausstellen, die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden in anderen Fällen zu postuliren. *Das konnte* Euclid aber nur mit der Begrenzung, welche er und die ganze Menschheit bis auf die Gegenwart als unumgänglich nothwendig betrachtete, wie sie denn auch mit aller bewussten und unbewussten Erfahrung übereinstimmt. So entstand das 5te Postulat, welches die Existenz des Schnittpunktes zweier Geraden fordert, mit der bekannten Begrenzung, welche sich ihm ganz ebenso anschliesst wie der Diorismus einem Problem.

Das andere Räthsel, das ich besprechen möchte, betrifft die ältere Darstellung der Kegelschnitte. Darüber berichtet Geminus, dass die Alten, das heisst die Vorgänger von Apollonius, nur gerade Kegel geschnitten und die Schnitte stets senkrecht zur Seite des Kegels geführt haben. Zu diesem Berichte stimmen durchaus die alten Benennungen der Ellipse, Parabel und Hyperbel als Schnitte des spitzwinkeligen, des rechtwinkeligen und des stumpfwinkeligen Kegels. Man darf ihn also keineswegs verwerfen, selbst dann nicht, wenn er Schwierigkeiten verursachen sollte. Solche Schwierigkeiten entstehen, wenn man ihn so versteht, als ob man überhaupt nicht vor Apollonius gewusst hätte, dass auch anders geführte Schnitte dieselben Curven liefern könnten. Einer solchen Auffassung widersprechen die Arbeiten von Archimedes, die nicht nur seine eigene Bekanntschaft mit anders geführten elliptischen Schnitten unmittelbar zeigen, sondern auch die Haupteigenschaften solcher Schnitte als allgemein bekannt voraussetzen. Die Bemerkungen von Geminus müssten alsdann auf parabolische und hyperbolische Schnitte beschränkt werden; von solchen findet Archimedes nämlich keine Gelegenheit zu sprechen, er zeigt aber auch keine Unkenntniss. Eine solche Begrenzung ist an und für sich misslich, da Geminus keinen solchen Unterschied macht, und ein sehr wesentlicher Theil der Schwierigkeiten würden doch bestehen bleiben. Es könnte zwar denkbar sein, dass man durch irgend einen Zufall anfangs nur die zu einer Seite senkrecht geführten Schnitte untersucht hätte. Dass man sich aber mehr als ein Jahrhundert mit den so hervorgebrachten Curven eingehend beschäftigt haben sollte,

ohne zu entdecken dass diese specielle Lage für die Darstellung der Curven ganz unwesentlich ist, würde ich mir nur dann vorstellen können, wenn sich ein Beweis führen lässt, der wesentlich leichter wird, wenn die Schnitte die genannte specielle Lage haben. Ein solcher Beweis ist, trotz der durch die Aeusserungen von Geminus gegebenen Anregungen, bis jetzt nicht gefunden, und in der überlieferten antiken Litteratur finden sich gar keine Ueberreste einer solchen Beweisführung. Im Gegentheil, alle Bestimmungen von Schnitten an Kegeln und an Flächen zweiter Ordnung, die sich bei Archimedes finden, deuten auf Vertrautheit, selbst auf ziemlich frühe Vertrautheit mit viel allgemeineren Betrachtungsweisen hin.

Ich habe schon früher gezeigt*), wie man die Angaben des Geminus verstehen muss um sie mit diesen Thatsachen in Uebereinstimmung zu bringen. Die vorhergehenden Betrachtungen erlauben mir aber diese Erklärung genauer zu präcisiren.

Die Entdeckung der Kegelschnitte war, wie schon bemerkt, an die Bestimmung der beiden mittleren Proportionalen geknüpft. Um diese Aufgabe geometrisch zu lösen musste man neue Curven ersinnen, da ihre Lösung durch Kreis und Gerade sich als unmöglich erwies. Am nächsten lag es, die Curven zu benutzen, die wir jetzt durch die Gleichungen

$$x^2 = ay, \quad xy = ab, \quad y^2 = bx$$

darstellen, da diese Gleichungen unmittelbar aus den Proportionen

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$$

hervorgehen. Nun würde man, um die Existenz dieser zwei Arten von Curven festzustellen, zwei neue Postulate brauchen, denn man konnte zwar Punkte solcher Curven construiren; ihre Aufeinanderfolge in einem continuirlichen Curvenzuge war aber ein wirkliches Postulat. Die Einführung eines solchen Postulates zu vermeiden, war also ein mathematisches Verdienst, und dieses erwarb sich Menächmus, der zeigte, wie man die Curven als Kegelschnitte darstellen konnte. Die Continuität der Curven ward dann eine Folge derjenigen des Kreiskegels, und diese eine Folge derjenigen des Kreises, und letztere hatte man schon postulirt. Ebenso ging es mit Ellipsen und mit anderen Darstellungen der Parabel und Hyperbel als die hier genannten, welche bald zur Lösung anderer Aufgaben benutzt wurden.

Es kam also nicht so sehr darauf an, die verschiedenen Schnitte der Kegel zu finden, als vielmehr darauf, gewisse ebene Curven, die durch ihre Anwendungen eine grosse geometrische Bedeutung bekommen hatten, als Kegelschnitte darzustellen. Für diese Aufgabe konnte

*) Kegelschnitte im Alterthum, im 21. Abschnitte,

es bequem sein eine ganz bestimmte Constructionsmethode zu haben, eine solche, welche es erlaubte aus den Constantenbestimmungen der gegebenen Curve diejenige des dadurch gehenden Kegels unmittelbar zu erhalten. Dass dies eben der Fall ist, wenn man den Kegel als gerade und den Schnitt als senkrecht zur Seite geführt voraussetzt, habe ich am angeführten Orte gezeigt, wie denn auch die archimedische Benennung des halben Parameters als „Stück bis zur Axe" dazu stimmt.

Auf diese Benutzung der Kegelschnitte, welche für die Griechen ursprünglich die Hauptsache war, passen also die Angaben von Geminus, und man darf deshalb daraus nicht schliessen, dass die Griechen die umgekehrte Aufgabe: verschiedene Schnitte eines gegebenen Kegels zu finden, nur im speciellen Falle, den er erwähnt, gelöst hätten.

Man versteht nun auch, dass man die Kegelschnitte allen anderen Curven vorzog, und dass man sie bei allen mit Hülfe von Kreis und Gerade nicht lösbaren Aufgaben, wo es überhaupt möglich war sie zu brauchen auch gebrauchen musste. Das ist einmal eine Folge von der genaueren Bekanntschaft mit den Kegelschnitten, die man sich nach und nach erworben hatte, zweitens aber auch davon, dass die Einführung der Kegelschnitte nach der Entdeckung des Menächmus kein neues Postulat erfordete.

Die Betrachtungen, die ich hier angestellt habe, finden sich zwar in meinen neuerdings erschienenen Vorlesungen*). Dort sind sie aber über viele Capitel zerstreut wegen der Verschiedenheit der Fragen, auf welche ich sie anwende, und dort werden sie in den verschiedenen Verbindungen betrachtet, in welchen diese Fragen auftreten. Ich habe es also für nützlich gehalten, sie hier zusammenzustellen, um ihre Uebereinstimmung unter sich besser hervortreten zu lassen**).

---

*) Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. Kopenhagen, Höst & Sohn, 1895.

**) Dieser Aufsatz war zu einem Vortrage auf der Naturforscherversammlung zu Lübeck bestimmt, konnte aber wegen plötzlicher Erkrankung nicht gehalten werden.

Die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichungen in drei Variabeln.

Von

E. v. Weber in München.

In der vorliegenden Arbeit soll versucht werden, die Charakteristikentheorie der partiellen Differentialgleichungen in zusammenhängender Darstellung zu entwickeln. Unsere Behandlungsweise dieser Aufgabe ist eine vorzugsweise geometrische, und verfolgt insbesondere den Zweck, für den bekannten Integrationsprocess der partiellen Differentialgleichungen I. O. im allgemeinen Falle Analogien aufzufinden. Ansätze in dieser Richtung finden sich bereits in dem Buche von P. Du-Bois Reymond*), doch ermangeln dieselben gerade im Falle der höhern Gleichungen vielfach der nöthigen Bestimmtheit, und geben insbesondere über die fundamentale Frage, unter welchen Voraussetzungen und durch welchen Process aus einem gegebenen vollständigen Integral einer partiellen Differentialgleichung ein allgemeineres hergeleitet werden kann, nicht den geringsten Aufschluss. Den Ausgangspunkt für unsere Darstellung nehmen wir von den Begriffen „Flächenelement", „Streifen" u. s. w., welche durch die Arbeiten der Herrn Lie und Bäcklund zur Grundlage der modernen Geometrie der partiellen Differentialgleichungen geworden sind; auch im Uebrigen machen wir vielfach von Lie'schen Bezeichnungsweisen und Begriffsbildungen Gebrauch.

In § 1 besprechen wir zunächst den geometrischen Inhalt, welcher den Definitionsgleichungen der *Charakteristiken n. und höherer Ordnung***) der Gleichung n. O. unter Zugrundelegung der erwähnten Begriffe zukommt, in § 2 leisten wir dasselbe für die *Charakteristiken* $n - 1$. *O.*, deren Theorie sich übrigens z. T. auch in dem Buche des

---

*) Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen mit drei Variabeln, Leipzig 1864.

**) Diese Gleichungen sind für $n = 2$ bereits in der Arbeit von Darboux Éc. Norm. VII, 1870, p. 163—173 implicite enthalten.

Herrn Darboux*) skizzirt findet; § 3 enthält einen geometrischen Excurs, welcher bezweckt, für den Lie'schen Begriff des „Elementarkegels", den eine partielle Differentialgleichung 1. O. einem beliebigen Raumpunkt zuordnet, in den höhern Fällen Ersatz zu schaffen. Die Theorie der *Differentio-Differentialausdrücke***), welche in § 4 entwickelt wird und als Grundlage aller folgenden Untersuchungen anzusehen ist, liefert uns eine neue, sehr einfache Definition der Charakteristiken n. O. und führt uns in § 5 auf den Begriff des *unbeschränkt integrabeln Streifensystems*, für welchen in diesem und dem folgenden § 6 Beispiele ausgeführt werden***). In § 6 tritt die Analogie, welche zwischen unsern Betrachtungen und der gewöhnlichen Integrationstheorie der Gleichungen 1. O. besteht, besonders deutlich zu Tage. Der weiteren Durchführung dieser Analogie ist der letzte Paragraph unserer Arbeit gewidmet, in welchem wir die Frage nach der Herstellung eines allgemeineren Integrals aus einem gegebenen vollständigen erörtern, und im Anschluss daran die im Falle $n = 1$ wohlbekannte Theorie der „Integralcurven"†) auf die höheren Fälle übertragen.

§ 1.

Die Charakteristiken n^{ter} und höherer Ordnung der partiellen Differentialgleichung n^{ter} O.

1. Wir setzen

$$\alpha_i^{(k)} = \frac{\partial^k z}{\partial x^{k-i}\partial y^i},$$

doch wollen wir für $\alpha_0^{(0)} \cdots \alpha_3^{(3)}$ auch die Bezeichnungen $z, p, q, r, s, t, u, v, w, \varpi$ bereithalten. Ein Werthsystem $xyzpq \cdots \alpha_n^{(n)}$ heisst dann ein *Flächenelement* n. O., und soll abkürzend mit $E^{(n)}(x \cdots \alpha_n^{(n)})$ bezeichnet werden. Eine continuirliche Schaar von Elementen n. O. von der Eigenschaft, dass je zwei aufeinanderfolgende $E^{(n)}$ *vereinigt liegen*, d. h. den Relationen

$$(1) \qquad \delta\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\delta y$$
$$(i = 0, 1, \ldots k;\ k = 0, 1, \ldots n-1)$$

*) Théorie des Surfaces; III, p. 263 ff.

**) Ich entnehme diese Bezeichnung dem Titel einer mir leider nicht zugänglichen Arbeit von Schaposchnikow, Mosk. Naturf. Ges. Phys. Abt. IV (Fortschr. d. Math. 1891, p. 398 f.).

***) Vgl. meine Note in den Sitzungsberichten der kgl. bay. Akad. d. Wiss. Februar 1895.

†) Lie, „Ueber Complexe etc." (Math. Ann. Bd. 5, p. 145—256, 1871), vgl. auch Goursat, Leçons sur l'integration des équations aux dérivées partielles. Paris 1891, Chap. IX.

genügen, heisst ein *Streifen n. O.* oder $S^{(n)}$; eine continuirliche Schaar von ∞^2 Elementen E^n, welche den Differentialgleichungen (1) genügt, heisse eine Element-$M_2^{(n)}$; eine solche besteht entweder aus allen $E^{(n)}$ einer Fläche, oder aus allen $E^{(n)}$, die sich an einen Streifen $S^{(n-1)}$ anschliessen, oder endlich aus ∞^2 Elementen $E^{(n)}$ mit gemeinsamem $E^{(n-1)}$. Eine partielle Differentialgleichung:

$$F^{(n)}(xyzp \ldots \alpha_n^{(n)}) = \text{Const.} \tag{2}$$

integriren heisst dann, alle Elemente-$M_2^{(n)}$ bestimmen, welche (2) befriedigen.

2. Unter Gebrauch der Abkürzungen:

$$\frac{\partial F^{(n)}}{\partial x} = X \ldots \frac{\partial F^{(n)}}{\partial \alpha_i^{(k)}} = A_i^{(k)},$$

$$\tag{3} \left\{ \begin{aligned} D_x^{(\nu)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(k)}}, \\ D_y^{(\nu)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} + \sum_{k=0}^{\nu} \sum_{i=0}^{k} \alpha_{i+1}^{(k+1)} \frac{\partial f}{\partial \alpha^{(k)}} \end{aligned} \right.$$

differentiiren wir jetzt (2) $\varrho + 1$ mal partiell nach x und y in der Voraussetzung, dass die $\alpha_i^{(k)}$ Functionen von x und y seien. Definirt man die Grössen $L_\nu^{(k)}$ durch die Recursionsformeln:

$$L_0^{(k+1)} \equiv D_x^{(n+k-1)}(L_0^{(k)}) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i^{(n+k)} D_x^{(n)}(A_i^{(n)}),$$

$$L_\nu^{(k+1)} \equiv D_x^{(n+k-1)}(L_\nu^{(k)}) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+\nu}^{(n+k)} D_x^{(n)}(A_i^{(n)}),$$

$$\equiv D_y^{(n+k-1)}(L_{\nu-1}^{(k)}) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+\nu-1}^{(n+k)} D_y^{(n)}(A_i^{(n)}), \quad (\nu = 1, 2, \ldots k)$$

$$L_{k+1}^{(k+1)} \equiv D_y^{(n+k-1)}(L_k^{(k)}) + \sum_{i=0}^{n} \alpha_{i+k}^{(n+k)} D_y^{(n)}(A_i^{(n)}), \quad (k \geq 1)$$

$$L_0^{(1)} \equiv D_x^{(n-1)}(F^{(n)}), \quad L_1^{(1)} \equiv D_y^{(n-1)}(F^{(n)}), \tag{4}$$

so erhält man die $\varrho + 2$ Gleichungen

$$L_\sigma^{(\varrho+1)} + \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} \alpha_{i+\sigma}^{(n+\varrho+1)} = 0,$$

die wir abkürzend so schreiben wollen:

$$H_\sigma^{(\varrho+1)} = 0. \quad (\sigma = 0, 1, \ldots \varrho + 1) \tag{5}$$

Wir sagen, ein Element $x \ldots \alpha_{n+k}^{(n+k)}$ *befriedige* (2), wenn die Grössen $x \ldots \alpha_{n+k}^{(n+k)}$ den Relationen (2) und (5) für $\varrho = 0, 1, \ldots k-1$ genügen, und man könnte das Integrationsproblem von (2) allgemeiner so fassen: Alle Element-$M_2^{(n+k)}$ zu bestimmen, welche den Gleichungen (2), (5) für $\varrho = 0, \ldots k-1$ genügen.

3. Man habe zwei vereinigt liegende Elemente $n+\tau^{\text{ter}}$ O.: $x \ldots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und $x+dx, \ldots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)} + d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$, so folgt aus den Gleichungen

$$(6) \qquad d\alpha_i^{(n+\varrho)} = \alpha_i^{(n+\varrho+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(n+\varrho+1)} dy \qquad (i = 0, \ldots n+\varrho)$$

indem man $dy : dx$ gleich Λ setzt:

$$(7) \qquad \alpha_i^{(n+\varrho+1)} = \sum_{k=0}^{n+\varrho-i} (-1)^k \frac{d\alpha_{i+k}^{(n+\varrho)}}{dx} \Lambda^k - (-1)^{n+\varrho-i} \alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)} \Lambda^{n+\varrho+1-i}$$

$$(i = 0, 1 \ldots n+\varrho;\ \varrho = 0, 1 \ldots \tau).$$

Setzen wir:

$$(8) \qquad \varphi(\Lambda) \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} A_i^{(n)} \Lambda^{n-i},$$

$$(9) \qquad \begin{aligned} B_i &= \sum_{k=0}^{i} (-1)^{k+i} A_k^{(n)} \Lambda^{i-k}; \quad C_{\varrho+1}^{(\varrho)} = 0, \\ C_\sigma^{(\varrho)} &= \sum_{k=0}^{\varrho-\sigma} (-1)^k \Lambda^k \frac{d\alpha_{n+\sigma+k}^{(n+\varrho)}}{dx} \qquad (\sigma = 0, 1 \ldots \varrho) \end{aligned}$$

so folgt durch Substitution der Ausdrücke (7) in (5):

$$(10) \quad L_\sigma^{(\varrho+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_i \frac{d\alpha_{i+\sigma}^{(n+\varrho)}}{dx} + \left(C_\sigma^{(\varrho)} - (-1)^{\varrho+\sigma} \alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)} \Lambda^{\varrho-\sigma+1}\right) \varphi(\Lambda) = 0$$

$$(\sigma = 0, 1 \ldots \varrho+1;\ \varrho = 0, 1 \ldots \tau).$$

Wenn wir die linken Seiten dieser Gleichungen mit $G_\sigma^{(\varrho+1)}$ bezeichnen, so führt die Elimination von $\alpha_{n+\varrho+1}^{(n+\varrho+1)}$ aus dem System (10) zu den folgenden Beziehungen:

$$(11) \quad G_\sigma^{(\varrho+1)} + \Lambda G_{\sigma+1}^{(\varrho+1)} = 0 = \frac{dH_\sigma^{(\varrho)}}{dx}, \quad (\sigma = 0, 1, \ldots \varrho;\ \varrho = 0, \ldots \tau)$$

wie aus der Definition der $L_i^{(k)}$, B_i, $C_i^{(\varrho)}$ unmittelbar hervorgeht; bei der Differentiation rechts sind $yz \ldots \alpha_{n+\varrho}^{(n+\varrho)}$ als Functionen von x zu behandeln. Diese Relationen, welche auch für $\varrho = 0$ gelten, wenn man $H_0^{(0)} \equiv F^{(n)}$ setzt, drücken nach unserer Bezeichnungsweise aus, dass die Elemente $x \ldots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und $x+dx, \ldots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)} + d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ beide

der Gleichung (2) genügen sollen. Ist dies der Fall, und ist Λ keine der Wurzeln der Gleichung

$$(12) \qquad \varphi(\Lambda) = 0,$$

so kann man aus (10) $\alpha_{n+\tau+1}^{(n+\tau+1)}$ und vermittelst (7) die übrigen $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ eindeutig berechnen; zwei vereinigt liegende Elemente $E^{(n+\tau)}$, die beide der Gleichung (2) genügen, bestimmen also im allgemeinen ein und nur ein $E^{(n+\tau+1)}$, das sie beide enthält und ebenfalls (2) befriedigt. Da dies auch noch für $\tau = 0$ gilt, so werden längs eines beliebigen Streifens $S^{(n)}$, der die Relation $\delta F^{(n)} = 0$ befriedigt, im allgemeinen der Reihe nach ein $S^{(n+1)}$, ein $S^{(n+2)}$ etc., kurz die Ableitungen jeder beliebigen Ordnung eindeutig festgelegt sein. Es ist dies nur ein anderer Ausdruck für das bekannte Cauchy'sche Theorem, wonach unter gewissen Continuitätsbedingungen*), die wir hier natürlich als erfüllt ansehen, durch einen Streifen $S^{(n)}$ von (2) im Allgemeinen eine und nur eine Integralfläche von (2) bestimmt ist, die sich in einer gewissen Umgebung von $S^{(n)}$ regulär verhält.

4. Eine Ausnahme tritt ein, wenn der Streifen $S^{(n+\tau)}$, dessen Elemente die Gleichung (2) befriedigen, auch noch der Bedingung

$$(13) \qquad \frac{dy}{dx} = \Lambda_\nu$$

genügt, unter Λ_ν eine der Wurzeln von (12) verstanden. In (10) verschwinden dann die Coefficienten von $\alpha_{n+\tau+1}^{(n+\tau+1)}$, und wir nehmen zunächst an, dass auch die von dieser Grösse freien Glieder zu Null werden, d. h. dass man habe:

$$(14) \qquad L_\sigma^{(\tau+1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_{i\nu} \frac{d\alpha_{i+\sigma}^{(n+\tau)}}{dx} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \ldots \tau + 1)$$

wo

$$B_{i\nu} \equiv \sum_{k=0}^{i} (-1)^{i+k} A_k^{(n)} \Lambda_\nu^{i-k}$$

gesetzt ist.

Alle ∞^1 Elemente $n + \tau + 1^{\text{ter}}$ O., welche zwei benachbarte $E^{(n+\tau)}$ von $S^{(n+\tau)}$ enthalten, d. h. den Gleichungen (6) für $\varrho = \tau$ genügen, befriedigen dann auch (2). Einen solchen Streifen nennen wir eine *Charakteristik* $n + \tau^{ter}$ *O.* oder eine $C^{(n+\tau)}$ von (2). Die Gleichungen (13), (14) zusammen mit den folgenden:

$$(15) \qquad \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dx} = \alpha_i^{(k+1)} + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \Lambda_\nu \quad (i = 0, .., k;\ k = 0, .., n + \tau - 1)$$

---

*) Vergl. z. B. Goursat, l. c. Chap. I, woselbst die näheren Citate zu finden sind.

liefern für $\nu = 1, 2, \ldots n$ die Definitionsgleichungen der n im allg. verschiedenen Charakteristikensysteme $n + \tau^{\text{ter}}$ O. der partiellen Differentialgleichung (2); sie lassen $n - 1$ der Ableitungen $d\alpha_i^{(n+\tau)} : dx$ völlig willkürlich. Daneben sind auch noch die Relationen (5) für $\varrho = 0, \ldots \tau - 1$ zu berücksichtigen. Die ∞^2 Elemente $E^{(n+\tau+1)}$, die sich an eine beliebige $C^{(n+\tau)}$ anschliessen, bilden nach der am Schluss von Nr. 2 gebrauchten Ausdrucksweise eine Integral-$M_2^{(n+\tau+1)}$ von (2).

5. Die Gleichungen (14) sind nach ihrer Herleitung völlig äquivalent mit den folgenden:

$$\text{(14a)} \qquad \frac{d\alpha_i^{(n+\tau)}}{dx} = \alpha_i^{(n+\tau+1)} + \Lambda_\nu \alpha_{i+1}^{(n+\tau+1)},$$

wenn die $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ die allgemeinsten Functionen von $x \ldots \alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ bedeuten, welche die Bedingungen

$$\text{(14b)} \qquad H_\sigma^{(\tau+1)} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \ldots \tau + 1)$$

erfüllen. Wendet man diese Bemerkung an auf die in (15) enthaltenen Gleichungen:

$$\text{(15a)} \qquad \frac{d\alpha_i^{(n+\tau-1)}}{dx} = \alpha_i^{(n+\tau)} + \Lambda_\nu \alpha_{i+1}^{(n+\tau)} \quad (i = 0, 1 \ldots n + \tau - 1)$$

und bezeichnen wir allgemein die ∞^1 Elemente $E^{(\nu-1)}$, welche zu einem Streifen $S^{(\nu)}$ gehören, als den „Trägerstreifen“ $\nu - 1^{\text{ter}}$ O. von $S^{(\nu)}$, so folgt für $\tau \geqq 1$:

„Die Trägerstreifen $n + \tau - 1^{\text{ter}}$ O. der Gesammtheit der $C^{(n+\tau)}$ besteht aus der Gesammtheit der Charakteristiken $n + \tau - 1^{\text{ter}}$ O.“

Aus den Entwickelungen der Nr. 3 folgt, dass die Gleichungen

$$\text{(16)} \qquad H_\sigma^{(\tau)} = 0 \quad (\sigma = 0, 1 \ldots \tau)$$

Integralgleichungen von (14) sind; daher können wir die letzteren Gleichungen ersetzen durch eine von ihnen, etwa die letzte, und das System (16). Berechnet man nun aus (15a) die Grössen $\alpha_0^{(n+\tau)} \ldots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau)}$ und substituirt ihre Werthe in die letzte der Gleichungen (14), so folgt eine Differentialgleichung 1. O. und 1. Grades für $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$, welche ausser der Grösse $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ und ihrer Ableitung nur die Variabelen $x \ldots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau-1)}$ und die ersten und zweiten Ableitungen der $\alpha_i^{(n+\tau-1)}$ enthält. Der Coefficient von $d\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)} : dx$ in dieser Gleichung wird:

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{n-i-1} B_{i\nu} \Lambda_\nu^{n-i-1} \equiv -\varphi'(\Lambda_\nu).$$

Denken wir uns also eine $C^{(n+\tau-1)}$ von (2) gegeben, und die $x \ldots \alpha_{n+\tau-1}^{(n+\tau-1)}$ dementsprechend als Functionen einer unabhängigen Variabelen, etwa x,

definirt, so ergiebt sich unter der Voraussetzung $\varphi'(\Lambda_\nu) \neq 0$ der Werth von $\alpha_{n+\tau}^{(n+\tau)}$ (und damit auch der übrigen $\alpha_i^{(n+\tau)}$) durch Integration der genannten Differentialgleichung. Also:

„*Durch jede* $C^{(n)}$, *welche einer einfach zählenden Wurzel von* (12) *entspricht, gehen einfach unendlich viele* $C^{(n+1)}$, *deren einzelne durch Angabe eines ihrer Elemente* $E^{(n+1)}$ *eindeutig festgelegt ist; durch jede* $C^{(n+1)}$ *gehen ebenso einfach unendlich viele* $C^{(n+2)}$ *u. s. w.*"

Dies ist der geometrische Ausdruck der Thatsache, dass die Gesammtheit der Integralflächen von (2), welche durch eine $C^{(n)}$ hindurchgehen, noch von den Coefficienten einer willkürlichen Function *eines* Arguments abhängt. Obwohl diese Thatsache auch für doppelt zählende Charakteristikensysteme bestehen bleibt, so ist gleichwohl durch die obige Bemerkung ein fundamentaler Unterschied zwischen diesen und den einfach zählenden bezeichnet*). Wir wollen im Folgenden die ersteren von der Betrachtung ausschliessen, also z. B. nur solche Gleichungen 2. O. berücksichtigen, für welche die Discriminante der Gleichung (12) nicht identisch verschwindet.

6. Geht man auf einer beliebigen Integralfläche von (2) vom Punkte xyz in der Richtung Λ_ν zum benachbarten Punkte $x + dx \ldots$ weiter, so werden die Incremente der $\alpha_i^{(n+\tau)}$ durch (14a) dargestellt, unter $\alpha_i^{(k)}$ die Ableitungen der Integralfläche im Punkte xyz verstanden. Da diese Ableitungen den Relationen (14b) identisch genügen, so erhält man durch Elimination der $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ aus (14a), (14b) die Gleichungen (14). Dieser Schluss ist nur dann ungültig, wenn die Integralfläche die partiellen Differentialgleichungen $A_0^{(n)} = \cdots = A_n^{(n)} = 0$, und somit auch $L_0^{(1)} = L_1^{(1)} = 0$ befriedigt, d. h. wenn sie *singulär* ist. Es folgt somit der für jedes $\tau \geq 0$ geltende Satz:

„*Jede nicht singuläre Integralfläche von* (2) *ist aus je* ∞^1 *Charakteristiken* $n + \tau^{\text{ter}}$ *O. eines jeden der n verschiedenen Systeme aufgebaut.*"

7. Erfüllt ein Streifen $S^{(n+\tau)}$ von (2) die Bedingungen (13), (15), nicht aber (14), so werden die aus (10), (7) für $\varrho = \tau$ zu entnehmenden Werthe der $\alpha_i^{(n+\tau+1)}$ unendlich. Einen solchen Streifen nennen wir einen Integralstreifen $n + \tau^{\text{ter}}$ O. oder einen Integral-$S^{(n+\tau)}$ von (2). Für $\tau \geq 1$ ist der Trägerstreifen eines solchen $S^{(n+\tau)}$ nach Nr. 5 eine $C^{(n+\tau-1)}$, und die Integralfläche, welche nach Nr. 3 im allgemeinen durch einen Streifen $n + \tau^{\text{ter}}$ O. von (2) festgelegt ist, artet hier in die zu jener $C^{(n+\tau-1)}$ gehörige Integral-$M_2^{(n+\tau)}$ aus. Genügt dagegen ein Streifen $S^{(n)}$ von (2) den Relationen (13), (15) für $k = 0, \ldots n-1$, so geht durch ihn im allgemeinen eine Integralfläche von (2), welche in ihm eine Rückkehrkante n. O. besitzt, die sich von einer gewöhnlichen

*) Vergl. auch Du-Bois Reymond l. c. §§ 91 und 94.

Rückkehrkante dadurch unterscheidet, dass in ihr erst die $n+1^{\text{ten}}$ Ableitungen unstetig werden.

Wir führen dies hier nur historisch an, kommen aber in § 7 unter besonderen Voraussetzungen auf diese Frage zurück.

§ 2.

Die Charakteristiken $n-1^{\text{ter}}$ O.; die Ampère-Natanischen Gleichungen.

8. Eine $C^{(n)}$ der partiellen Differentialgleichung § 1 (2) war durch die Eigenschaft charakterisirt, dass alle ∞^2 Elemente $n+1^{\text{ter}}$ O., die sich an sie anschliessen, der Gleichung genügen. Wir fragen nun weiter nach Streifen $n-1^{\text{ter}}$ O. von der Eigenschaft, dass alle Elemente $E^{(n)}$, die sich an sie anschliessen, die vorgelegte Gleichung erfüllen; solche Streifen bezeichnen wir als Charakteristiken $n-1^{\text{ter}}$ O. oder $C^{(n-1)}$. Setzt man wieder $dy:dx=\Lambda$, so findet man aus den Gleichungen:

$$\frac{d\alpha_i^{(n-1)}}{dx}=\alpha_i^{(n)}+\alpha_{i+1}^{(n)}\Lambda \quad (i=0,1,\dots n-1) \tag{1}$$

die folgenden:

$$\alpha_i^{(n)}=\sum_{\nu=0}^{n-i-1}(-1)^\nu\frac{d\alpha_{i+\nu}^{(n-1)}}{dx}\Lambda^\nu+(-1)^{n-i}\Lambda^{n-i}\alpha_n^{(n)} \tag{2}$$
$$(i=0,1,\dots n-1).$$

Indem wir diese Werthe in § 1 (2) substituiren, dabei aber die Constante der rechten Seite durch Null ersetzen, erhalten wir im allgemeinen eine algebraische Gleichung μ^{ten} Grades in $\alpha_n^{(n)}$, wenn μ den Grad von $F^{(n)}$ in den $\alpha_i^{(n)}$ bedeutet. Die Coefficienten der einzelnen Potenzen von $\alpha_n^{(n)}$ liefern, gleich Null gesetzt, die Definitionsgleichungen der $C^{(n-1)}$. Dieselben brauchen nicht mit einander verträglich zu sein, d. h. nicht jede Gleichung n. O. besitzt Charakteristiken $n-1^{\text{ter}}$ O.

9. Besonders interessant ist der Fall, wo jene algebraische Gleichung *linear* wird; dazu ist nothwendig und hinreichend, dass (2) § 1 die Form besitzt:

$$F^{(n)}\equiv P+\sum_{i=0}^{n}P_i\alpha_i^{(n)}+\sum\sum P_{ik}\pi_{ik}=0 \tag{3}$$

worin

$$\pi_{ik}=\alpha_i^{(n)}\alpha_{i+k}^{(n)}-\alpha_{i+1}^{(n)}\alpha_{i+k-1}^{(n)}$$
$$(i=0,\dots n-2;\ k=2,3,\dots n-i),$$

und die Coefficienten $P\dots$ irgend welche Functionen von $x,\dots\alpha_{n-1}^{(n-1)}$

bedeuten. Eine solche Gleichung nennen wir eine *Ampère-Natani'sche Gleichung**), für $n=2$ speciell eine Ampère'sche Gleichung.

Durch die Substitution (2) nehme (3) die Form an:

$$A + B\alpha_n^{(n)} = 0.$$

Wir erhalten dann für die $C^{(n-1)}$ ausser den Relationen

$$(4) \qquad \frac{d\alpha_i^{(k)}}{dx} = \alpha_i^{(k+1)} + \Lambda\alpha_{i+1}^{(k+1)} \qquad (i=0,\dots k;\ k=0,1\dots n-2)$$

noch die Bedingungsgleichungen

$$(5) \qquad A=0,\ B=0$$

welche die $x\dots\alpha_{n-1}^{(n-1)}$, sowie $\frac{dy}{dx}$ und die Ableitungen der $\alpha_i^{(n-1)}$ enthalten; $n-1$ dieser Differentialquotienten bleiben also völlig willkürlich. Für jede Gleichung der Form (3) kennt man somit ein particuläres Integral mit $n-1$ willkürlichen Functionen, bestehend aus allen Element-$M_2^{(n)}$, die sich an die $C^{(n-1)}$ anschliessen.

10. Setzen wir

$$(6) \qquad \lambda_n = 0,\ \lambda_i = \sum_{\nu=0}^{n-i-1}(-1)^\nu \frac{d\alpha_{i+\nu}^{(n-1)}}{dx}\Lambda^\nu \qquad (i=0,1,\dots n-1)$$

und deuten durch eckige Klammern an, dass in dem betr. Ausdruck $\alpha_i^{(n)}$ durch λ_i ersetzt ist, so findet man

$$A \equiv [F^{(n)}],\ B = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\Lambda^{n-i}[A_i^{(n)}] = [\varphi(\Lambda)]$$

(vgl. (12), § 1). Wir denken uns nun in A, B für die $d\alpha_i^{(n-1)}:dx$ wieder ihre Werthe (1) eingesetzt; da dann λ_i wegen (2) in

$$\alpha_i^{(n)} - (-1)^{n-i}\Lambda^{n-i}\alpha_n^{(n)}$$

übergeht, so erhalten wir mit Rücksicht auf die besondere Form von (3) durch unsere Substitution aus (5) die beiden Gleichungen:

$$(7) \qquad F^{(n)} - \alpha_n^{(n)}\varphi(\Lambda) = 0, \quad \varphi(\Lambda) = 0.$$

Dies vorausgeschickt wollen wir nun ermitteln, wie viele $C^{(n)}$ durch eine gegebene $C^{(n-1)}$ hindurchgehen. Sind also $x\dots\alpha_{n-1}^{(n-1)}$ Functionen einer unabhängigen Variabeln, etwa x, die den Differentialgleichungen (4), (5) genügen, und legen wir den unbekannten Functionen $\alpha_i^{(n)}$ von x die Bedingungen (1) auf, so folgen daraus nach dem eben Gesagten von selbst die Relationen (3) und § 1 (12), Λ ist also mit einer

*) Ampère, Journ. d. l'Ec. Polytechnique Cah. 17 und 18. Natani, die höhere Analysis, Berlin 1866. Vgl. auch die Arbeiten von Bäcklund Math. Ann. 11 u. 13.

Wurzel Λ_ν der Fundamentalgleichung $\varphi(\Lambda) = 0$ identisch. Von den beiden noch übrigen Definitionsgleichungen der $C^{(n)}$:

$$(8) \qquad L_\sigma^{(1)} + \sum_{i=0}^{n-1} B_{i\nu} \frac{d\alpha_{i+\sigma}^{(n)}}{dx} = 0 \quad (\sigma = 0, 1) \ldots$$

ist aber die eine wegen (3) und § 1 (11) eine Folge der andern, und die Substitution der Werthe (2) in die eine von ihnen liefert für $\alpha_n^{(n)}$ eine gewöhnliche Differentialgleichung 1. O. und 1. Grades, in welcher $d\alpha_n^{(n)} : dx$ nach Nr. 5 mit dem Factor $-\varphi'(\Lambda_\nu)$ behaftet ist.

Werden umgekehrt unter den $\alpha_i^{(n)}$ die allgemeinsten Functionen von $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ verstanden, die (3) befriedigen, so stellen die Gleichungen (1), (4) zusammen mit $dy : dx = \Lambda_\nu$ die Trägerstreifen $n-1$. O. sämmtlicher Charakteristiken und Integralstreifen n. O. von (3) dar (Nr. 7); alle diese $S^{(n-1)}$ sind also unter den $C^{(n-1)}$ enthalten. Wir fassen das Resultat dieser Untersuchungen in den folgenden Sätzen zusammen:

„Eine Ampère-Natanische Gleichung n. O. besitzt im allgemeinen n verschiedene Charakteristikensysteme $n-1$. O., bestehend aus den Trägerstreifen der $C^{(n)}$. Durch jeden Trägerstreifen $C^{(n-1)}$ einer $C^{(n)}$, die einer einfachen Wurzel Λ_ν der Fundamentalgleichung entspricht, gehen noch einfach unendlich viele andere $C^{(n)}$ hindurch, deren jede durch Angabe eines ihrer $E^{(n)}$ eindeutig festgelegt ist. Die Integralstreifen n. O. bestehen aus der Gesammtheit der Streifen n. O., die durch die $C^{(n-1)}$ hindurchgehen; die nach Nr. 7 durch jeden einzelnen von ihnen bestimmte Integralfläche artet in die Element-$M_2^{(n)}$ aus, welche sich an die zugehörige $C^{(n-1)}$ anschliesst.

§ 3.

Geometrische Interpretation der Fundamentalgleichung.

11. Zum Zwecke einer geometrischen Deutung der Gleichung (11) § 1 schicken wir einige Hülfsbetrachtungen voraus.

Ist in einem $n+1$-dimensionalen Raum R_{n+1} mit den cartesischen Punktcoordinaten $x_1 \ldots x_{n+1}$ ein System von ∞^n Curven oder eine „Curvencongruenz" durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \varphi_i(x_1 \ldots x_{n+1}, a_1, \ldots a_n) = 0 \quad (i = 1, 2 \ldots n)$$

gegeben, worin die φ_i unabhängige Functionen der x_k, die a_i wesentliche Parameter bedeuten, und setzen wir $\partial\varphi_i : \partial a_k = \varphi_{ik}$, so werden durch die (in Kronecker's Bezeichnungsweise geschriebene) Gleichung:

$$(2) \qquad |\varphi_{ik}| = 0$$

auf jeder Curve (1) die Punkte ausgeschnitten, in denen sie von je

einer benachbarten Congruenzcurve geschnitten wird, und in welchen sie das „Focalgebilde" berührt; dieses ergiebt sich durch Elimination der a_i aus (1), (2). In denselben Punkten wird das Focalgebilde auch von allen die Curve enthaltenden, aus ∞^{n-1} Congruenzcurven aufgebauten „Flächen" berührt.

Ist eine Gerade des R_{n+1} durch die Gleichungen

$$x_i = m_i + n_i x_{n+1} \quad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{3}$$

dargestellt, so sind die Grössen m_i, n_i und $\omega_{ik} = m_i n_k - n_i m_k$ die Plücker'schen Liniencoordinaten dieser Geraden; *eine* Relation zwischen ihnen definirt einen „Strahlencomplex", n unabhängige Relationen eine „Strahlencongruenz". Ein Congruenzstrahl von allgemeiner Lage besitzt n Brennpunkte, woselbst er das Focalgebilde berührt. Bezeichnen wir eine ϱ-fach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit des R_{n+1} als eine M_ϱ, so liefern uns die Gesammtheit der n-fachen Tangenten einer M_n, oder das System der gemeinsamen Tangenten von n verschiedenen M_n, oder endlich die n-fachen Sekanten einer M_{n-1} Beispiele für Strahlencongruenzen.

12. Wir setzen nun $\mu_k = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$ und interpretiren die $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ als cartesische Coordinaten eines $R_{\mu_{n-1}+2}$. Die Gleichungen:

$$\alpha_i^{(k)} - \bar{\alpha}_i^{(k)} = \bar{\alpha}_i^{(k+1)}(x - \bar{x}) + \bar{\alpha}_{i+1}^{(k+1)}(y - \bar{y}) \tag{4}$$
$$(i = 0, 1, \ldots k;\; k = 0, 1, \ldots n - 2)$$

ordnen jedem Punkte $P(\bar{x} \ldots \bar{\alpha}_{n-1}^{(n-1)})$ dieses Raums einen durch ihn gehenden linearen R_{n+2} zu; durch das System:

$$\alpha_i^{(n-1)} - \bar{\alpha}_i^{(n-1)} = \alpha_i^{(n)}(x - \bar{x}) + \alpha_{i+1}^{(n)}(y - \bar{y}) \tag{5}$$
$$(i = 0, 1 \ldots n - 1),$$

worin die $\alpha_i^{(n)}$ Constante bezeichnen, ist in diesem Raume eine durch P gehende ebene M_2 bestimmt.*)

Schneiden wir aus dem R_{n+2} durch die Gleichung

$$x - \bar{x} = 1 \tag{6}$$

einen linearen R_{n+1} aus, und setzen wir

$$y - \bar{y} = x_{n+1}, \; \alpha_i^{(n-1)} - \bar{\alpha}_i^{(n-1)} = x_{i+1} \quad (i = 0 \ldots n - 1) \tag{7}$$

so definiren uns die aus (5) entstehenden Gleichungen

$$x_i = \alpha_i^{(n)} + \alpha_{i+1}^{(n)} x_{n+1} \quad (i = 1, \ldots n) \tag{7a}$$

∞^{n+1} Strahlen, nach der vorigen Bezeichnungsweise die gemeinsamen Geraden der $n - 1$ linearen Complexe $n_i = m_{i+1}$. Durch Hinzunahme der Relation

---

*) Eine ähnliche Interpretation wird angewendet bei Bäcklund, Math. Ann. Bd. 11, p. 219 ff.

$$F^{(n)}(\bar{x} \ldots \bar{\alpha}_{n-1}^{(n-1)}, \alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)}) = 0 \tag{8}$$

erhalten wir eine Strahlencongruenz (bez. wenn in (2) § 1 die Constante rechts beibehalten wird, ∞^1 Strahlencongruenzen). Auf jedem Congruenzstrahl werden dann die n Brennpunkte durch die Relation

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i} A_i^{(n)} x_{n+1}^{n-i} = 0 \tag{9}$$

bestimmt, womit die in Aussicht genommene geometrische Deutung der Fundamentalgleichung gewonnen ist.

13. Die Strahlen der Congruenz werden vom Punkte P aus durch ∞^n ebene M_2 der Form (5) projicirt; auf jeder dieser M_2 sind n ausgezeichnete Gerade gelegen, nach denen sie von je einer benachbarten M_2 geschnitten wird, nämlich die Verbindungslinien von P mit den Brennpunkten des zugehörigen Congruenzstrahls. Ist $F^{(n)}$ insbesondere von der Form (3) § 2, so wird durch (7), (8) eine *lineare* Strahlencongruenz dargestellt; das Focalgebilde einer solchen artet im allgemeinen in eine M_{n-1} aus; in der That liefert die Elimination der $\alpha_i^{(n)}$ aus (7a), (8), (9) in diesem Falle 2 Gleichungen für die x_i, wie wir in den NN. 9, 10 gesehen haben. Die durch (5) dargestellten M_2 gehen dann zu je einfach unendlich vielen durch die Strahlen, welche von P nach den Punkten jener Focal-M_{n-1} gezogen werden. Man erkennt leicht, dass die bekannte, von Ampère*) für den Fall $n=2$ gegebene Zerfällung der beiden Gleichungen (5) § 2 in 2 Paare linearer totaler Differentialgleichungen damit zusammenhängt, dass das Focalgebilde einer linearen Strahlencongruenz des R_3 in 2 Gerade ausartet.

14. Um diese Resultate in die Sprache der Theorie der Flächenelemente zu übersetzen, wollen wir sagen, zwei Elemente n. O. $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}, \alpha_0^{(n)} \ldots \alpha_n^{(n)}$ und $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}, \bar{\alpha}_0^{(n)} \ldots \bar{\alpha}_n^{(n)}$ berühren sich stationär**), wenn sie ausser dem Element $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ noch ein benachbartes, mit diesem vereinigt liegendes Element $n-1^{\text{ter}}$ O. $x+dx$, $y+dy \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + d\alpha_{n-1}^{(n-1)}$ mit einander gemein haben; die Verhältnisse $dx:dy:dz$ definiren dann die „Richtung der stationären Berührung", wie wir uns ausdrücken wollen. Sind die beiden Elemente benachbart, d. h. hat man $\bar{\alpha}_i^{(n)} = \alpha_i^{(n)} + \delta\alpha_i^{(n)}$, so sind die Bedingungen der stationären Berührung:

$$\delta\alpha_i^{(n)} + \frac{dy}{dx}\delta\alpha_{i+1}^{(n)} = 0 \qquad (i=0,1,\ldots n-1), \tag{10}$$

*) Vgl. z. B. die Darstellung bei Darboux, Théorie des Surfaces III, p. 263 ff.

**) Vgl. meine Arbeit: die singulären Lösungen der partiellen Differentialgleichungen in 3 Variabeln, Math. Ann. 46.

wenn $dy:dx$ die Richtung der stat. Berührung bestimmt. Man kann jetzt den Sätzen der Nr. 13 die folgende Fassung geben:

„Zu jedem Element $E^{(n)}$ der partiellen Differentialgleichung (2) § 1 giebt es im allgemeinen n benachbarte, im Falle der Ampère-Natanischen Gleichungen n Gruppen von ∞^1 Elementen n. O., die ebenfalls die vorgelegte Gleichung befriedigen und mit $E^{(n)}$ eine stationäre Berührung eingehen; die n Richtungen der stationären Berührung sind in jedem Fall durch (12) § 1 definirt.

§ 4.

Theorie der Differentio-differentialausdrücke.

15. Liegen die zu dem Element n. O. $E^{(n)}(x \ldots \alpha_n^{(n)})$ benachbarten Elemente $E'(x+dx \ldots \alpha_n^{(n)}+d\alpha_n^{(n)})$ und $E''(x+\delta x, \ldots \alpha_n^{(n)}+\delta\alpha_n^{(n)})$ mit E vereinigt, hat man also

$$\left.\begin{aligned} &(1) \quad d\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)}dy; \\ &(2) \quad \delta\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)}\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)}\delta y \end{aligned}\right\}(i=0,\ldots k;\ k=0,\ldots n-1)$$

und verlangt man, dass E, E', E'' auf demselben Element $n+1^{\text{ter}}$ O. gelegen seien, d. h. dass die Gleichungen

$$(3) \qquad d\alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)}dx + \alpha_{i+1}^{(n+1)}dy; \quad \delta\alpha_i^{(n)} = \alpha_i^{(n+1)}\delta x + \alpha_{i+1}^{(n+1)}\delta y$$
$$(i=0,\ldots n)$$

zusammen bestehen können, so folgen durch Elimination der $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (3) nach Weghebung unwesentlicher Factoren die n Relationen:

$$d\alpha_{i-1}^{(n)}\delta x - \delta\alpha_{i-1}^{(n)}dx + d\alpha_i^{(n)}\delta y - \delta\alpha_i^{(n)}dy = 0,$$

die wir abkürzend so schreiben:

$$(4) \qquad (d\delta)_i^{(n)} = 0 \quad (i=1,2,\ldots n).$$

Umgekehrt, sind diese Bedingungen erfüllt, so kann man die $\alpha_i^{(n+1)}$ aus (3) berechnen. Ausnahmen treten ein, erstens falls $\delta y:\delta x = dy:dx$; in diesem Falle müssen die Elemente $E'E''$ identisch sein, wenn die $\alpha_i^{(n+1)}$ endliche Werthe haben sollen, und es giebt solcher Werthe dann einfach unendlich viele; zweitens, wenn $\delta x = \delta y = 0$; dann gehen die Gleichungen (4) über in das System (10) der vorigen Nr., EE'' berühren sich also stationär in der Richtung $dy:dx$ und die $\alpha_i^{(n+1)}$ werden unendlich; analoges tritt natürlich ein, wenn sich EE' stationär berühren.

16. Eine andere Interpretation der Relationen (4), deren linke Seiten wir *Differentio-differentialausdrücke* nennen, ergiebt sich aus der folgenden Betrachtung:

Eine infinitesimale Transformation $X(f)$ der Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ des Raumes heisse eine inf. *Streifentransformation*, wenn sie jedes Element in ein benachbartes, mit ihm vereinigt liegendes überführt.

Definiren wir fortan das Symbol d durch die Identität

$$(5) \qquad df = X(f)\, d\lambda$$

unter f eine Function von $x \dots \alpha_n^{(n)}$, unter $d\lambda$ eine unendlich kleine Constante verstanden, so gelten die Relationen (1) identisch und $X(f)$ hat die Form:

$$(6) \qquad X(f) \equiv \xi D_x^{(n-1)}(f) + \eta D_y^{(n-1)}(f) + \sum_{i=0}^{n} \beta_i^{(n)} \frac{\partial f}{\partial \alpha_i^{(n)}},$$

worin $\xi, \eta, \beta_i^{(n)}$ irgend welche Functionen von $x \dots \alpha_n^{(n)}$ bezeichnen. Die ∞^{μ_n+1} Streifen, die sich durch Integration des Systems

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{d\lambda} = \xi, \quad \dfrac{dy}{d\lambda} = \eta, \quad \dfrac{d\alpha_i^{(n)}}{d\lambda} = \beta_i^{(n)} \quad (i = 0, 1 \dots n), \\ \dfrac{d\alpha_i^{(k)}}{d\lambda} = \xi \alpha_i^{(k+1)} + \eta \alpha_{i+1}^{(k+1)} \quad (i = 0, 1 \dots k;\ k = 0, 1 \dots n-1) \end{cases}$$

seien die *Bahnstreifen* von $X(f)$ genannt.

Zwei vereinigt liegende Elemente $x \dots \alpha_n^{(n)}$ und $x + \delta x \dots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$ werden von $X(f)$ in zwei benachbarte Elemente $x + dx \dots$ und $x + \delta x + d(x + \delta x) \dots$ übergeführt, welche wieder vereinigt liegen, wenn man hat:

$$(8) \qquad d\delta\alpha_i^{(k)} = d\alpha_i^{(k+1)}\delta x + d\alpha_{i+1}^{(k+1)}\delta y + \alpha_i^{(k+1)} d\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} d\delta y$$
$$(i = 0, \dots k;\ k = 0, \dots n-1).$$

Subtrahirt man diese Gleichungen bez. von den folgenden:

$$(9) \qquad d\delta\alpha_i^{(k)} = \delta\alpha_i^{(k+1)} dx + \delta\alpha_{i+1}^{(k+1)} dy + \alpha_i^{(k+1)} d\delta x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} d\delta y,$$

welche ausdrücken, dass die Elemente $x + \delta x \dots$ und

$$x + \delta x + d(x + \delta x) \dots$$

vereinigt liegen, eine Bedingung, die für jede Streifentransformation erfüllt ist, so folgen die Relationen

$$(10) \qquad (d\delta)_i^{(\varrho)} = 0 \quad (i = 1, \dots \varrho;\ \varrho = 1, \dots n)$$

welche mit Ausnahme der n letzten wegen (1), (2) *identisch* erfüllt sind.

Da aus (10) wegen (9) umgekehrt (8) folgt, so hat man den Satz: „*Damit durch die inf. Streifentransformation* $X(f)$ *zwei benachbarte vereinigt liegende Elemente* $x \dots \alpha_n^{(n)}$ *und* $x + \delta x \dots \alpha_n^{(n)} + \delta\alpha_n^{(n)}$ *wieder in solche übergeführt werden, ist nothwendig und hinreichend, dass die Relationen* (4) *bestehen, worin die* d *durch* (5) *definirt sind.*“

Bedeuten die $\delta x \ldots$ Incremente, die nur den Bedingungen (2) genügen, sonst aber willkürlich sind, so hat man wegen (1), (2) u. a.:

$$(11)\qquad \begin{cases} d\delta x = \delta dx = \delta\xi\, d\lambda; \quad d\delta y = \delta dy = \delta\eta\, d\lambda, \\ d\delta\alpha_i^{(k)} = \delta d\alpha_i^{(k)}; \quad \text{für } k = 0, 1, n-2 \text{ und } k = n \end{cases}$$

dagegen

$$(12)\qquad d\delta\alpha_i^{(n-1)} - \delta d\alpha_i^{(n-1)} = (d\delta)_{i+1}^{(n)} \quad (i = 0, 1, \ldots n-1),$$

und allgemein, wenn unter δf, wie fortan immer, der Ausdruck

$$(13)\qquad \delta x . D_x^{(n-1)}(f) + \delta y . D_y^{(n-1)}(f) + \sum_{i=0}^{n} \delta\alpha_i^{(n)} \frac{\delta f}{\delta\alpha_i^{(n)}}$$

verstanden wird:

$$(14)\qquad d(\delta F^{(n)}) - \delta(dF^{(n)}) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial\alpha_i^{(n-1)}} (d\delta)_{i+1}^{(n)}.$$

17. Legen wir der Streifentransformation $X(f)$ die Bedingung auf, dass die totalen Differentialgleichungen (4) eine integrable Combination zulassen, d. h. dass eine Identität der Form

$$(15)\qquad d\lambda . \delta F^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (d\delta)_i^{(n)}$$

bestehe, unter den λ_i unbestimmte Factoren verstanden, so folgen durch Vergleichung der Coefficienten von δx, δy, $\delta\alpha_i^{(n)}$ auf beiden Seiten die Gleichungen:

$$(16)\qquad d\lambda . D_x^{(n-1)}(F^{(n)}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, d\alpha_{i-1}^{(n)},$$

$$(17)\qquad d\lambda . D_y^{(n-1)}(F^{(n)}) \equiv \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, d\alpha_i^{(n)};$$

$$(18)\qquad d\lambda . A_0^{(n)} \equiv -\lambda_1\, dx,$$

$$(19)\qquad d\lambda . A_k^{(n)} \equiv -\lambda_{k-1}\, dy - \lambda_k\, dx \quad (k = 2, \ldots n-1),$$

$$(20)\qquad d\lambda . A_n^{(n)} \equiv -\lambda_n\, dy.$$

Die Elimination der λ_i aus (18, (19), (20) liefert (12) § 1, wenn $dy : dx$ oder $\eta : \xi$ mit Λ bezeichnet wird; es besteht also eine Beziehung der Form (13) § 1; aus (16), (18), (19) bez. (17), (18), (19) erhält man ebenso die Gleichungen (8) § 2. Umgekehrt schliesst man aus (13) § 1 und (8) § 2 leicht auf das Bestehen einer Identität der Form (15). Also:

„*Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichungen* (4) *eine integrable Combination* $\delta F^{(n)}$ *zulassen, ist die,*

dass die Bahnstreifen von $X(f)$ unter den Charakteristiken n. O. von $F^{(n)} = C$ enthalten seien; oder auch: „*Die Identität* (15) *ist mit den Definitionsgleichungen der Charakteristiken von $F^{(n)} = C$ völlig äquivalent.*"

§ 5.

Die unbeschränkt integrabeln Streifensysteme.

18. Wir werfen nun die Frage auf: wie muss eine Streifentransformation $X(f)$ der Form (6) § 4 beschaffen sein, damit sie irgend zwei benachbart vereinigt liegende Elemente EE', die (2), (4) § 4 befriedigen, in benachbarte, vereinigt liegende Elemente überführe, *die wiederum die Bedingungen* (4) § 4 *erfüllen*? Dazu ist offenbar nothwendig und hinreichend, dass man für jedes Werthsystem der δx, δy, $\delta \alpha_i^{(n)}$ identisch habe:

$$d(d\delta)_i^{(n)} \equiv \sum_{k=1}^{n} \mu_{ik} (d\delta)_k^{(n)} \quad (i = 1, \ldots n) \tag{1}$$

worin unter den μ_{ik} nicht näher bestimmte Factoren der Grössenordnung $d\lambda$ zu verstehen sind. Führt man die Differentiationen auf der linken Seite mit Rücksicht auf (2), (5), (11) § 4 aus, und vergleicht die Coefficienten der willkürlichen Differentiale δx, δy, $\delta \alpha_i^{(n)}$ auf beiden Seiten, so liefert die Elimination der n^2 Grössen μ_{ik} aus den so erhaltenen $n(n+3)$ Gleichungen $3n$ partielle Differentialgleichungen 1. O., welchen die in $X(f)$ auftretenden Grössen ξ, η, $\beta_i^{(n)}$ als Functionen von $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ zu genügen haben. Die Transformation $X(f)$ hat dann folgende Eigenschaft: Bestimmt man zwei Elemente $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ und $x + \delta x, \ldots \alpha_n^{(n)} + \delta \alpha_n^{(n)}$, welche die Bedingungen (2), (4) § 4 erfüllen, so liegen die von ihnen bez. auslaufenden Bahnstreifen von $X(f)$ ihrer ganzen Ausdehnung nach vereinigt, d. h. jedes Element n. O. des ersten Streifens liegt mit allen ihm benachbarten Elementen des zweiten vereinigt; genügt demnach ein Streifen $S^{(n)}$ den Differentialgleichungen (2), (4) § 4, worin die d durch (5) definirt sind, so bilden die ∞^1 Bahnstreifen von $X(f)$, welche von den ∞^1 Elementen $E^{(n)}$ von $S^{(n)}$ bez. auslaufen, eine *Fläche*; umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft das Bestehen von Identitäten der Form (1). Wir wollen in diesem Falle das Bahnstreifensystem von $X(f)$ ein *unbeschränkt integrables Streifensystem*, und jede Fläche, die aus ihm nach der geschilderten Methode erhalten wird, eine *Integralfläche* desselben nennen.

19. Nehmen wir an, dass für $X(f)$ eine Identität der Form (15) § 4 erfüllt sei, so folgt zunächst, indem wir darin die $\delta x \ldots$ mit den dx identificiren:

$$dF^{(n)} \equiv 0. \tag{2}$$

Ferner können wir die genannte Identität, wieder unter Beachtung von § 4 (2), (11), mit dem Symbol d differentiiren, wobei $d\lambda$ als Constante zu behandeln ist, und erhalten so wegen (14) § 4

$$\sum_{i=1}^{n} (d\lambda_i - A_{i-1}^{(n-1)}\, d\lambda)\,(d\delta)_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, d(d\delta)_i^{(n)} = 0.$$

Da nicht alle λ_i identisch verschwinden können, so ist stets eine der Identitäten (1) eine Folge der übrigen. Nehmen wir $n = 1$ an, so ist demnach die einzige in diesem Falle zu befriedigende Identität (1) von selbst erfüllt, und es ergiebt sich, dass das Charakteristikensystem einer partiellen Differentialgleichung $F^{(1)} = C$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem darstellt*), ein in anderer Form wohlbekannter Satz, der die ganze, von Lagrange und Monge begründete Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen I. O. in sich enthält.

20. In dem von nun an ausschliesslich zu betrachtenden Fall $n = 2$ folgen aus (1) für die in $X(f)$ auftretenden Coefficienten ξ, η, $\beta_0^{(2)}$, $\beta_1^{(2)}$, $\beta_2^{(2)}$, von denen die drei letzten abkürzend durch ϱ, σ, τ, bezeichnet werden sollen, die nachfolgenden Beziehungen, in denen von der Bezeichnung $f_r = \partial f : \partial r$ etc. und von den Abkürzungen der Nr. 2 Gebrauch gemacht ist:

$$(3)\begin{cases} X(\varrho) + \varrho D_x^{(1)}(\xi) - \xi D_x^{(1)}(\varrho) + \sigma D_x^{(1)}(\eta) - \eta D_x^{(1)}(\sigma) = \mu_{11}\varrho + \mu_{12}\sigma, \\ X(\sigma) + \varrho D_y^{(1)}(\xi) - \xi D_y^{(1)}(\varrho) + \sigma D_y^{(1)}(\eta) - \eta D_y^{(1)}(\sigma) = \mu_{11}\sigma + \mu_{12}\tau, \\ -X(\xi) + \varrho\xi_r \quad - \xi\varrho_r \quad + \sigma\eta_r \quad - \eta\sigma_r \quad = -\mu_{11}\xi, \\ -X(\eta) + \varrho\xi_s \quad - \xi\varrho_s \quad + \sigma\eta_s \quad - \eta\sigma_s \quad = -\mu_{11}\eta - \mu_{12}\xi, \\ \qquad\qquad \varrho\xi_t \quad - \xi\varrho_t \quad + \sigma\eta_t \quad - \eta\sigma_t \quad = \qquad -\mu_{12}\eta, \end{cases}$$

$$(4)\begin{cases} X(\sigma) + \sigma D_x^{(1)}(\xi) - \xi D_x^{(1)}\sigma + \tau D_x^{(1)}(\eta) - \eta D_x^{(1)}(\tau) = \mu_{21}\varrho + \mu_{22}\sigma, \\ X(\tau) + \sigma D_y^{(1)}(\xi) - \xi D_y^{(1)}\sigma + \tau D_y^{(1)}(\eta) - \eta D_y^{(1)}(\tau) = \mu_{21}\sigma + \mu_{22}\tau, \\ \qquad\qquad \sigma\xi_r \quad - \xi\sigma_r \quad + \tau\eta_r \quad - \eta\tau_r \quad = -\mu_{21}\xi, \\ -X(\xi) + \sigma\xi_s \quad - \xi\sigma_s \quad + \tau\eta_s \quad - \eta\tau_s \quad = -\mu_{21}\eta - \mu_{22}\xi, \\ -X(\eta) + \sigma\xi_t \quad - \xi\sigma_t \quad + \tau\eta_t \quad - \eta\tau_t \quad = \qquad -\mu_{22}\eta. \end{cases}$$

Genügt $X(f)$ einer Identität der Form

$$(5) \qquad d\lambda\,\delta F \equiv \lambda_1 (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2 (d\delta)_2^{(2)},$$

unter F eine Function von $xyzpqrst$ verstanden, und setzt man

$$(6) \qquad X = \frac{\partial F}{\partial x}, \ldots T = \frac{\partial F}{\partial t},\ M = D_x^{(1)}(F),\ N = D_y^{(1)}(F),$$

---

*) Dieser Satz lässt sich nicht umkehren, vergl. Nr. 23 a. E. und die auf der folgenden Seite citirte Arbeit p. 432.

so dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit R als nicht identisch verschwindend und also $\xi \equiv 1$, $d\lambda = dx$ voraussetzen, da es sich augenscheinlich nur um eine Eigenschaft der *Bahnstreifen* von $X(f)$ handelt. Setzt man noch $\eta = \Lambda_\nu$, worunter eine der Wurzeln der Gleichung

$$(7) \qquad R\Lambda^2 - S\Lambda + T = 0$$

zu verstehen ist, so genügen die Functionen ϱ, σ, τ den Beziehungen

$$(8) \qquad \begin{cases} M + R\varrho + (S - R\Lambda_\nu)\sigma = 0, \\ N + R\sigma + (S - R\Lambda_\nu)\tau = 0. \end{cases}$$

Da nach § 4 (18) λ_1 in unserem Falle nicht verschwindet, so sind nach Nr. 19 die Beziehungen (3) eine Folge von (4), und die Elimination von μ_{21}, μ_{22} aus den letzteren führt mit Hülfe der Abkürzungen:

$$(9) \qquad \begin{cases} X_1(f) \equiv D_x^{(1)}(f) + (\varrho - \Lambda_\nu\sigma)\dfrac{\partial f}{\partial r} + \sigma\dfrac{\partial f}{\partial s}, \\ X_2(f) \equiv D_y^{(1)}(f) + (\sigma - \Lambda_\nu\tau)\dfrac{\partial f}{\partial s} + \tau\dfrac{\partial f}{\partial t}, \\ X_3(f) \equiv \Lambda_\nu^2\dfrac{\partial f}{\partial r} - \Lambda_\nu\dfrac{\partial f}{\partial s} + \dfrac{\partial f}{\partial t} \end{cases}$$

zu den folgenden Gleichungen:

$$(10) \qquad \begin{aligned} X(\sigma) - X_1(\sigma) + \tau X_1(\Lambda_\nu) - \Lambda_\nu X_1(\tau) &= 0, \\ X(\tau) - X_2(\sigma) + \tau X_2(\Lambda_\nu) - \Lambda_\nu X_2(\tau) &= 0, \\ -X(\Lambda_\nu) - X_3(\sigma) + \tau X_3(\Lambda_\nu) - \Lambda_\nu X_3(\tau) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen bez. mit $1, \Lambda_\nu, \tau$, addirt sie und beachtet, dass

$$(11) \qquad X(f) \equiv X_1(f) + \Lambda_\nu X_2(f) + \tau X_3(f),$$

so erkennt man, dass das System (10) nur *zwei* unabhängige Bedingungen enthält, welche sich in zwei partielle Differentialgleichungen 1. O. mit der unbekannten Function τ und den unabhängigen Variabeln $x \ldots t$ verwandeln, wenn man für ϱ, σ ihre Werthe aus (8) substituirt denkt.*) Kennt man eine gemeinsame Lösung dieser Gleichungen, so kennt man auch ϱ, σ, und findet dann durch Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen das System der Bahnstreifen von $X(f)$, welches wir ein *unbeschränkt integrables Charakteristikensystem* der Gleichung $F = C$ nennen wollen.

*Man kann also durch ausführbare Operationen und Integration gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme alle unbeschränkt integrabeln Charakteristikensysteme einer vorgelegten Gleichung 2. O. bestimmen.***)

---

*) Für Gleichungen 2. O. mit einem doppeltzählenden Charakteristikensystem werden diese Differentialgleichungen illusorisch; daher die Einschränkung der Nr. 5.

**) Aehnliches gilt auch für die Charakteristiken höherer Ordnung, worauf wir aber hier nicht näher eingehen. Eine weitgehende Verallgemeinerung der

21. Ist das Bahnstreifensystem von $X(f)$ ein unbeschränkt integrables Streifensystem 2. O. und will man eine Integralfläche desselben nach Nr. 18 bestimmen, so hat man zunächst einen Ausgangsstreifen $S^{(2)}$ zu suchen, welcher den Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \delta z = p\delta x + q\delta y, \quad \delta p = r\delta x + s\delta y, \quad \delta q = s\delta x + t\delta y, \\ (d\delta)_1^{(2)} = (d\delta)_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

genügt. Wir können zu diesem Zweck y und z beliebigen Functionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ von x bez. gleichsetzen; ist ferner $x_0 y_0 z_0$ ein Punkt der so definirten Raumcurve R, und setzen wir zur Abkürzung $\varphi_0 = \varphi(x_0)$ etc., so wählen wir ein Werthsystem p_0, q_0, das der Relation

$$(12\text{a})\qquad \psi_0' = p_0 + q_0\varphi_0'$$

genügt, ferner beliebige Anfangswerthe s_0, t_0, worauf r_0 durch die aus (12) leicht abzuleitende Gleichung:

$$(12\text{b})\qquad r_0 + 2s_0\varphi_0' + t_0\varphi_0'^2 = \psi_0'' - q_0\varphi_0''$$

bestimmt und vermöge (12) längs R ein das Element $x_0 \ldots t_0$ enthaltender Streifen $S^{(2)}$ im allgemeinen eindeutig festgelegt ist. Durch eine beliebige Raumcurve gehen also im allgemeinen ∞^3 Integralflächen des vorgelegten unbeschränkt integrablen Streifensystems hindurch. Ist dieses insbesondere ein Charakteristikensystem, so bilden die aus ihm in der geschilderten Weise aufzubauenden Flächen (Nr. 6) ein Integral von $F = C$, das nach dem obigen von einer willkürlichen Function *eines* Arguments abhängt.*) Ist ein Element $E^{(2)}(x_0 \ldots t_0)$ gegeben, und wählt man eine durch den Punkt $x_0 y_0 z_0$ gehende Raumcurve $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, welche den Bedingungen (12a), (12b) genügt, sonst aber beliebig ist, so ist ihr entlang nach dem Vorigen ein Ausgangsstreifen $S^{(2)}$, also eine durch sie hindurchgehende Integralfläche des gegebenen unbeschränkt integrablen $C^{(2)}$-Systems bestimmt, welche die von $E^{(2)}$ auslaufende $C^{(2)}$ des Systems enthält. Für den Fall also, dass eine $C^{(2)}$ einem unbeschränkt integrablen Charakteristikensystem angehört, haben wir eine Bestätigung der in Nr. 5 erwähnten Thatsache, dass die Gesammtheit der Integralflächen, welche durch eine $C^{(2)}$ hindurchgehen, noch von den Coefficienten einer willkürlichen Function *eines* Arguments abhängt, und man wird von hier aus auch die Angaben der Nr. 5 über die Charakteristiken 3. und höherer Ordnung leicht verificiren. Die umgekehrte Frage dagegen, ob jede beliebige Charakteristik 2. O. einer partiellen Differentialgleichung 2. O. $F=C$ einem unbeschränkt integrablen Charakteristiken-

Theorien dieses und des vorigen § findet sich in meiner Mittheilung: „Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen". Sitzungsb. d. kgl. bayr. Ak. 7. Dec. 1895.

*) Dass umgekehrt jedes unbeschränkt integrable Streifensystem, dessen sämmtliche Flächen Integralflächen von $F = C$ sind, aus Charakteristiken von F besteht, erscheint selbstverständlich.

system angehört, ist im allgemeinen, d. h. für beliebiges F, zu verneinen.*)

22. Wir wollen die vorhergehenden Untersuchungen zunächst durch ein besonders einfaches Beispiel erläutern. Die Relationen (3), (4) sind identisch erfüllt, wenn man setzt:

$$\xi \equiv 1,\ \eta = \Lambda,\ \varrho = \sigma = \tau = \mu_{ik} = 0,$$

und der Function Λ die Bedingung $X(\Lambda) \equiv 0$ auferlegt. Längs jedes Streifens eines solchen Systems sind also die Richtung $\frac{dy}{dx}$ und die Grössen r, s, t constant; die Trägercurve ist dann, wie leicht zu sehen, eine Parabel, deren Ebene zur z-Axe parallel läuft, und man erhält das allgemeinste Streifensystem der verlangten Beschaffenheit, indem man auf jeder Fläche V der ∞^6-Schaar:

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y + \tfrac{1}{2}(a_3 x^2 + 2 a_4 xy + a_5 y^2) \tag{13}$$

diejenigen ∞^1 Streifen 2. O. ins Auge fasst, welche auf ihr durch die zur z-Axe parallelen Tangentenebenen einer auf V willkürlich gewählten Curve bestimmt werden. Die endlichen Gleichungen eines solchen Systems können in der Form:

$$\begin{gathered} y = \alpha_1 x + \alpha_2;\ z = \tfrac{1}{2}\alpha_3 x^2 + \alpha_4 x + \alpha_5;\ p = (\alpha_3 - \alpha_1 \alpha_6)x + \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_7; \\ q = \alpha_6 x + \alpha_7;\ t = \chi(\alpha_1 \ldots \alpha_7);\ r = \alpha_3 - 2\alpha_1 \alpha_6 + \alpha_1^2 \chi;\ s = \alpha_6 - \alpha_1 \chi \end{gathered} \tag{14}$$

geschrieben werden, wenn $\alpha_1 \ldots \alpha_7$ willkürliche Parameter, χ irgend eine Function derselben bedeuten; wir nennen einen Streifen $S^{(2)}$ der Form (14) kurz einen *parabolischen* Streifen.

23. Eine partielle Differentialgleichung 2. O.: $F =$ const., welche ∞^7 parabolische Streifen zu Charakteristiken hat, wird demnach von allen Flächen (13) erfüllt, und hat also die Form:

$$\psi(\zeta, \pi, \varkappa, r, s, t) = C \tag{15}$$

worin

$$\zeta \equiv z - px - qy + \tfrac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2),$$

$$\pi \equiv p - rx - sy;\quad \varkappa = q - sx - ty$$

gesetzt ist. Dieser Gleichung gegenüber zerlegt sich die Flächenschaar (13) in ∞^1 Schaaren:

$$\psi(a_0, a_1, \ldots a_5) = C \tag{16}$$

von je ∞^5 Flächen, in dem Sinne, dass jede solche Schaar ein voll-

*) Das allgemeine Integral einer Gleichung $F = C$ dieser Eigenschaft lässt sich, wie leicht einzusehen, durch Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen bestimmen; vgl. hierüber meine p. 246 citirte Mittheilung.

ständiges Integral der demselben C entsprechenden Gleichung (15) darstellt. Kann man (16) nach a_0 in der Form

$$a_0 = \varphi(a_1 \ldots a_5, C) \tag{17}$$

auflösen, so bestimmen sich auf der einzelnen Fläche (13) die Charakteristiken durch die Differentialgleichung*):

$$y'^2\left(\frac{1}{2}x^2 + x\varphi_1 - \varphi_3\right) - y'(xy + \varphi_2 x + \varphi_1 y - \varphi_4)$$
$$+ \left(\frac{1}{2}y^2 + \varphi_2 y - \varphi_5\right) = 0,$$

worin

$$\varphi_i = \partial\varphi : \partial a_i$$

gesetzt und C aus (16) zu entnehmen ist.

Setzt man hierin:

$$y = -\frac{v}{u}x - \frac{w}{u},$$

so folgt die Bedingung:

$$\varphi_5 u^2 + \varphi_3 v^2 - \frac{1}{2}w^2 + \varphi_1 vw + \varphi_2 wu + \varphi_4 uv = 0. \tag{18}$$

Da die Relation:

$$\begin{vmatrix} 2\varphi_5, & \varphi_4, & \varphi_2 \\ \varphi_4, & 2\varphi_3, & \varphi_1 \\ \varphi_2, & \varphi_1, & -1 \end{vmatrix} = 0 \tag{19}$$

im Allgemeinen nicht identisch befriedigt ist, so hat man den Satz: „Auf jeder Fläche (13) umhüllen die Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung (15) eine Curve, die sich in die xy-Ebene als im Allg. nicht zerfallender Kegelschnitt projicirt, dessen Tangentialgleichung durch (18) gegeben ist.“ Ebenso erhält man als Projection der Umhüllungscurve eine eigentliche oder zerfallende Curve 2. Classe, wenn (16) nicht nach a_0, dagegen etwa nach a_1 auflösbar ist, u. s. w. Daraus folgt unmittelbar, dass das Streifensystem (14), solange χ beliebig gewählt wird, keiner Identität der Form (5) genügt.**) Es giebt also unbeschränkt integrabele Streifensysteme, welche nicht Charakteristikensysteme einer Gleichung $F = C$ sind.

---

*) Vgl. meinen in Nr. 14 citirte Arbeit p. 6 Gl. (15).

**) Versteht man unter C eine festgewählte Constante, so liefert die durch (13), (17) definirte 5-gliedrige Flächenschaar ein treffliches Beispiel für die in der vorhin citirten Arbeit entwickelte Theorie der *singulären Elemente*, besonders auch für die l. c. in § 4 a. E. angedeuteten Ausnahmefälle. Ist (19) identisch erfüllt, so giebt es auf jeder der betrachteten ∞^5 Flächen (13) 2 sing. Stellen I. Art, in die der zugehörige Kegelschnitt (18) ausartet; besteht die Relation (19) nicht identisch, so definirt sie diejenigen ∞^4 Flächen der Schaar (13), die je 2 sing. Elemente $E^{(2)}$ enthalten, es giebt der letzteren dann ∞^4 und im allgemeinen auch ∞^4 singuläre Elemente $E^{(1)}$ (l. c. Nr. 19); es kann aber auch der Fall eintreten,

§ 6.

Involutorische partielle Differentialgleichungen 2. O.

24. Wir legen nunmehr der infinitesimalen Streifentransformation

$$X(f) \equiv D_x^{(1)}(f) + \Lambda_1 D_y^{(1)}(f) + \varrho \frac{\partial f}{\partial r} + \sigma \frac{\partial f}{\partial s} + \tau \frac{\partial f}{\partial t} \tag{1}$$

die Bedingung auf, dass die Gleichungen:

$$(d\delta)_1^{(2)} = 0, \quad (d\delta)_2^{(2)} = 0 \tag{2}$$

zwei von einander unabhängige integrable Combinationen zulassen, d. h. dass man identisch habe (vgl. Nr. 20):

$$\begin{aligned} dx\,.\,\delta F &\equiv \lambda_1 (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2 (d\delta)_2^{(2)}, \\ dx\,.\,\delta F' &\equiv \lambda_1' (d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2' (d\delta)_2^{(2)}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei wegen der vorausgesetzten Unabhängigkeit von F, F':

$$\lambda_1 \lambda_2' - \lambda_2 \lambda_1' \neq 0. \tag{4}$$

Daraus folgt dann von selbst, dass das Bahnstreifensystem von (1) unbeschränkt integrabel ist. In der That ergeben sich durch Differentiation der Identitäten (3) nach Nr. 19 die folgenden Beziehungen:

$$\lambda_1\, d(d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2\, d(d\delta)_2^{(2)} + (d\lambda_1 - P\,dx)(d\delta)_1^{(2)} + (d\lambda_2 - Q\,dx)(d\delta)_2^{(2)} \equiv 0,$$

$$\lambda_1'\, d(d\delta)_1^{(2)} + \lambda_2'\, d(d\delta)_2^{(2)} + (d\lambda_1' - P'dx)(d\delta)_1^{(2)} + (d\lambda_2' - Q'dx)(d\delta)_2^{(2)} \equiv 0,$$

woraus sich wegen (4) Identitäten der Form:

$$\begin{aligned} d(d\delta)_1^{(2)} &\equiv \mu_{11} (d\delta)_1^{(2)} + \mu_{12} (d\delta)_2^{(2)}, \\ d(d\delta)_2^{(2)} &\equiv \mu_{21} (d\delta)_1^{(2)} + \mu_{22} (d\delta)_2^{(2)} \end{aligned}$$

ableiten lassen.

---

dass nur ∞^3 oder weniger sing. $E^{(1)}$ vorhanden sind. so dass die Elimination der a_i aus (15), (16), (17) Nr. 22 l. c. auf 2 oder mehr Relationen für $x\,y\,z\,p\,q$ führt; Beispiele für die genannten 3 Fälle liefern die folgenden Annahmen für φ: $a_2 a_5$, $a_4^2 + a_2 a_5$, $a_4^2 + a_2 + a_5$. Wir wollen bei dieser Gelegenheit constatiren, dass das in Nr. 25 l. c. gegebene Beispiel *unrichtig* ist; ein brauchbares Beispiel liefert die Schaar (13) für $a_0 = \frac{1}{2} \sum_1^5 a_i^2$; die l. c. mit $A_1 A_2 A_3$ bezeichneten Ausdrücke, die bez. gleich:

$$a_3 - a_1 x - \frac{1}{2} x^2, \ a_4 - a_2 x - a_1 y - xy, \ a_5 - a_2 y - \frac{1}{2} y^2$$

werden, verschwinden für:

$$x = a_2 = a_4 = 1, \ y = a_1 = a_5 = 0, \ a_3 = \frac{1}{2};$$

die Determinanten (30), (31) l. c. und ihre gemeinsame Unterdeterminante werden 0, 2, 4 bez.

*) Für den Inhalt dieses Paragraphen vgl. auch Bäcklund Math. Ann. XIII, bes. pag. 86 ff.

25. Die Beziehungen (3) drücken aus, dass die ∞^7 Bahnstreifen von $X(f)$, welche sich durch Integration des Systems:

$$(5)\quad \begin{gathered} \frac{dy}{dx}=\Lambda_1,\quad \frac{dz}{dx}=p+q\Lambda_1,\quad \frac{dp}{dx}=r+s\Lambda_1, \\ \frac{dq}{dx}=s+t\Lambda_1;\quad \frac{dr}{dx}=\varrho,\quad \frac{ds}{dx}=\sigma,\quad \frac{dt}{dx}=\tau \end{gathered}$$

ergeben, ein gemeinsames Charakteristikensystem der beiden Gleichungen

$$(6)\quad F=C,\quad F'=C'$$

darstellen. Man erkennt aber sofort, dass keine dieser Gleichungen ganz willkürlich gewählt werden kann. In der That folgt zunächst, dass die beiden Fundamentalgleichungen

$$(7)\quad R\,\Lambda^2-S\,\Lambda+T\;=0,$$

$$(8)\quad R'\Lambda^2-S'\Lambda+T'=0.$$

eine gemeinsame Wurzel Λ_1 besitzen müssen, was das identische Bestehen der Relation

$$(9)\quad \begin{vmatrix} R & S & T & 0 \\ 0 & R & S & T \\ R' & S' & T' & 0 \\ 0 & R' & S' & T' \end{vmatrix}=0$$

nach sich zieht. Sind ferner die Streifen (5) Charakteristiken sowohl von $F=C$ als auch von $F'=C'$, so genügen alle Systeme von Functionen $uvw\varpi$, welche die Bedingungen:

$$(10)\quad \varrho=u+\Lambda_1 v,\quad \sigma=v+\Lambda_1 w,\quad \tau=w+\Lambda_1\varpi$$

erfüllen, nach Nr. 4 den folgenden Relationen (vgl. Nr. 21 (6)):

$$(11)\quad \begin{cases} M+Ru+Sv+Tw & =0, \\ N+\quad +Rv+Sw+T\varpi=0, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} M'+R'u+S'v+T'w & =0, \\ N'+\quad +R'v+S'w+T'\varpi=0, \end{cases}$$

welche somit die eine der Functionen $uvw\varpi$ völlig unbestimmt lassen; also müssen die sämmtlichen viergliedrigen Unterdeterminanten der zugehörigen Matrix verschwinden, was wir durch die symbolische Gleichung:

$$(13)\quad \left\Vert \begin{matrix} M & R & S & T & 0 \\ N & 0 & R & S & T \\ M' & R' & S' & T' & 0 \\ N' & 0 & R' & S' & T' \end{matrix} \right\Vert=0$$

ausdrücken wollen. Wir sagen in diesem Falle, *die partiellen Differentialgleichungen* (6) *befinden sich in Involution.* Die Bedingungen (13)

stellen zwei unabhängige partielle Differentialgleichungen 1. O. mit den unbekannten Functionen F, F' und den unabhängigen Variabeln $x \ldots t$ dar; ihr allgemeinstes Lösungssystem*) FF' enthält nach bekannten Existenztheoremen zwei willkürliche Functionen von je 7 Argumenten.

26. Erfüllen umgekehrt zwei Functionen F, F' die Relationen (13) identisch, ohne dass alle dreigliedrigen Unterdeterminanten der linken Seite von (9) Null werden, so kann man aus dreien der Gleichungen (11), (12) drei der Grössen $uvw\varpi$ durch die vierte ausdrücken; um die Ideen zu fixiren, nehmen wir an, dass aus den ersten drei dieser Gleichungen uvw durch ϖ in der Form

$$(14) \qquad u = \mu_1 - \Lambda_1^3\varpi, \quad v = \mu_2 + \Lambda_1^2\varpi, \quad w = \mu_3 - \Lambda_1\varpi$$

dargestellt sei, worin Λ_1 die wegen (9) vorhandene gemeinsame Wurzel von (7), (8) bedeutet. Dass die Coefficienten von ϖ die angegebene Form haben, erkennt man leicht durch die Anwendung von Sylvester's Eliminationsverfahren auf (7), (8). Bestimmt man jetzt die Functionen ϱ, σ, τ durch die Gleichungen:

$$(15) \qquad \varrho = \mu_1 + \Lambda_1\mu_2; \quad \sigma = \mu_2 + \Lambda_1\mu_3, \quad \tau = \mu_3,$$

so genügen alle Functionen $uvw\varpi$, die (10) befriedigen, auch den Relationen (11), (12), und die Streifen (5) sind also in der That Charakteristiken jeder der beiden Gleichungen (6). Man hat demnach den Satz:

„*Bestehen zwischen den linken Seiten zweier partieller Differentialgleichungen* (6) *die Relationen* (13) *identisch, so haben sie ein unbeschränkt integrables System von* ∞^7 *Charakteristiken miteinander gemein, und umgekehrt.*“

Es ist jedoch bemerkenswerth, dass eine Gleichung $F = C$ unbeschränkt integrable Charakteristikensysteme enthalten kann, *ohne dass eine Gleichung* $F' = C'$ *existirt, welche mit ihr in Involution ist.* Ein Beispiel liefert die Gleichung (15) der Nr. 23, wenn man sich ψ daselbst ganz allgemein gewählt denkt.

27. Aus der Schlussbemerkung der Nr. 7 und den Entwickelungen der Nr. 21 folgt jetzt unmittelbar, dass zwei involutorische partielle Differentialgleichungen 2. O. ein gemeinschaftliches Integral**) besitzen, welches eine willkürliche Function *eines* Arguments enthält, in dem Sinne, dass durch eine beliebige Raumcurve ∞^3 gemeinsame Integralflächen von (6) hindurchgehen. Die Relationen (2) sind wegen (3), (4) mit $\delta F = 0$, $\delta F' = 0$ völlig äquivalent. Nennen wir daher einen Streifen 2. O., der die Gleichung $\delta F = 0$ befriedigt, kurz einen Streifen von F, so können wir auch sagen:

---

*) Vgl. z. B. Goursat l. c. Chap. I, 4.

**) Vgl. meine in der Einleitung citirte Note, woselbst nähere Litteraturangaben zu finden sind.

„Durch jeden gemeinsamen Streifen von F, F' geht im allgemeinen eine und nur eine gemeinsame Integralfläche der beiden involutorischen Gleichungen."

Umgekehrt erkennt man leicht, dass jede gemeinschaftliche Integralfläche der involutorischen Gleichungen (6) aus deren gemeinschaftlichem Charakteristikensystem nach der Methode der Nr. 21 erhalten wird.

28. Bedeuten Λ_2 und Λ_2' bez. die zweiten Wurzeln der Gleichungen (7) und (8), so ist das zweite Charakteristikensystem von $F = C$ durch die Gleichungen

$$(16) \qquad \frac{dy}{da} = \Lambda_2, \ \frac{dz}{dx} = p + q\Lambda_2 \cdots \frac{dt}{dx} = w + \varpi\Lambda_2 \cdots$$

definirt, unter $u \ldots \varpi$ die allgemeinsten Functionen von $x \ldots t$ verstanden, die (11) befriedigen; das zweite Charakteristikensystem von $F' = C'$ erhält man, wenn man hierin Λ_2 durch Λ_2' und (11) durch (12) ersetzt. Dies vorausgeschickt, können wir die Involutionsbeziehung zwischen F und F' auch durch die folgende Eigenschaft völlig charakterisiren:

„Alle Charakteristiken des zweiten Systems von $F = C$ sind Streifen von F', alle Charakteristiken des zweiten Systems von $F' = C'$ sind Streifen von F."

Wegen der zwischen F, F' herrschenden, völligen Reciprocität beweisen wir nur den ersten Theil der Behauptung. Substituirt man für $\frac{dy}{dx} \cdots \frac{dt}{dx}$ ihre Werthe aus (16) in die Relation:

$$dF' = 0,$$

so folgt

$$(17) \quad M' + \Lambda_2 N' + R'u + (S' + \Lambda_2 R')v + (T' + \Lambda_2 S')w + T'\Lambda_2\varpi = 0$$

und wir haben nur zu zeigen, dass diese Gleichung eine Folge von (11) ist. Rändert man aber die Matrix der drei Gleichungen (11), (17) mit der Horizontalreihe N', O, R', S', T' und der Verticalreihe $0 0 0 1$, so folgen nach einfacher Umformung die Bedingungen:

$$\begin{Vmatrix} M & R & S & T & 0 & 0 \\ N & 0 & R & S & T & 0 \\ M' & R' & S' & T' & 0 & -\Lambda_2 \\ N' & 0 & R' & S' & T' & 1 \end{Vmatrix} = 0,$$

welche, wie leicht zu sehen, nicht mehr und nicht weniger aussagen als (13), w. z. b. w.

Hat man zwei partielle Differentialgleichungen I. O. $f = C$, $f' = C'$, so führt die Forderung, dass alle charakteristischen Streifen 1. O. von f Streifen von f', und alle Charakteristiken von f' Streifen

von f seien, unter Gebrauch des Jacobi'schen Klammersymbols auf die Bedingung:

$$\{ff'\} \equiv 0.$$

Nach dem Vorhergehenden ist also die Matrix (13) in gewissem Sinne als ein Analogon des Jacobi'schen Klammerausdrucks zu betrachten.

§ 7.

Theorie der vollständigen Integrale und der Integralstreifen.

29. Versteht man in dem System Pfaff'scher Gleichungen:

$$(1)\quad \begin{aligned} &\delta z = p\delta x + q\delta y; \quad \delta p = r\delta x + s\delta y; \quad \delta q = s\delta x + t\delta y; \\ &\delta r = u\delta x + v\delta y; \quad \delta s = v\delta x + w\delta y; \quad \delta t = w\delta x + \varpi\delta y, \end{aligned}$$

unter $uvw\varpi$ Functionen von $xy\ldots t$, welche den Relationen § 6 (11) identisch genügen, so ist dieses System unbeschränkt integrabel, wenn man identisch hat:

$$(2)\quad D_y^{(2)}(u) = D_x^{(2)}(v); \quad D_y^{(2)}(v) = D_x^{(2)}(w); \quad D_y^{(2)}(w) = D_x^{(2)}(\varpi),$$

wobei nach Nr. 2 (3):

$$(3)\quad \begin{aligned} D_x^{(2)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} + u\frac{\partial f}{\partial r} + v\frac{\partial f}{\partial s} + w\frac{\partial f}{\partial t}, \\ D_y^{(2)}(f) &\equiv \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} + v\frac{\partial f}{\partial r} + w\frac{\partial f}{\partial s} + \varpi\frac{\partial f}{\partial t}. \end{aligned}$$

Differentiirt man aber die erste Relation (11) § 6 mit dem Symbol $D_y^{(2)}$, die zweite mit $D_x^{(2)}$, so folgt durch Subtraction die Identität:

$$(4)\quad \begin{aligned} R\big(D_y^{(2)}(u) - D_x^{(2)}(v)\big) + S\big(D_y^{(2)}(v) - D_x^{(2)}(w)\big) \\ + T\big(D_y^{(2)}(w) - D_x^{(2)}(\varpi)\big) \equiv 0. \end{aligned}$$

Da wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, R als nicht identisch verschwindend voraussetzen dürfen, so ist die erste Relation (2) eine Folge der beiden letzten; werden in diese letzteren für u, v ihre Werthe aus (11) § 6 substituirt, so gehen sie in zwei simultane partielle Differentialgleichungen I. O. mit den unbekannten Functionen w, ϖ und den unabhängigen Variabeln $x\ldots t$ über. Ist ein particuläres Lösungssystem $w\varpi$ dieser Gleichungen bekannt, so kennt man auch u, v, und die Integration von (1) liefert zu jedem Element 2. O. des Raums eine und nur eine dasselbe enthaltende Fläche, deren dritte Ableitungen den Relationen (11) § 6 identisch genügen, die also eine Integralfläche einer bestimmten unter den ∞^1 Gleichungen

$$(5)\quad F = C$$

darstellt, d. h. man erhält so ein vollständiges Integral von (5), in das ausser C noch fünf willkürliche Constante eingehen. Umgekehrt

ist leicht zu erkennen, dass *jedes* vollständige Integral von (5) in dieser Weise gewonnen werden kann.

30. Die ∞^7 charakteristischen Streifen 2. O.*), welche auf den ∞^6 Flächen eines gegebenen vollständigen Integrals von (5) verlaufen, werden durch Integration des Systems

$$(6)\quad \frac{dy}{dx}=\Lambda_\nu,\ \frac{dz}{dx}=p+q\Lambda_\nu \cdots \frac{dq}{dx}=s+t\Lambda_\nu,\ \frac{dr}{dx}=\varrho,\ \frac{ds}{dx}=\sigma,\ \frac{dt}{dx}=\tau$$

bestimmt, worin

$$(7)\qquad \varrho=u+v\Lambda_\nu,\quad \sigma=v+w\Lambda_\nu,\quad \tau=w+\varpi\Lambda_\nu$$

gesetzt ist, $u \ldots \varpi$ die dem vollständigen Integral nach der vorigen Nr. zugeordneten Functionen bedeuten, und unter Λ_ν eine der Wurzeln von (7) § 6 verstanden wird. Berechnet man uvw aus (7), so folgt durch Substitution in (3) unter Gebrauch der Abkürzungen der Nr. 20:

$$D_x^{(2)}(f) \equiv X_1(f)+(\tau-\varpi\Lambda_\nu)X_3(f),$$
$$D_y^{(2)}(f) \equiv X_2(f)+\quad \varpi \quad X_3(f).$$

Die beiden letzten Gleichungen (2) gehen dann mit Hülfe unserer Substitution zufolge leichter Rechnung bez. über in:

$$(8)\quad \Lambda_\nu X(\varpi)=X(\tau)+\tau X_2(\Lambda_\nu)-X_2(\sigma)-\varpi[2\Lambda_\nu X_2(\Lambda_\nu)+X_1(\Lambda_\nu)+X_3(\sigma)] -\varpi^2\Lambda_\nu X_3(\Lambda_\nu),$$

$$(9)\quad X(\varpi)=X_2(\tau)-\varpi\big(X_2(\Lambda_\nu)-X_3(\tau)\big)-\varpi^2 X_3(\Lambda_\nu),$$

woraus mit Rücksicht auf § 5 (11) durch Elimination von $X(\varpi)$ folgt:

$$X(\tau)-X_2(\sigma)+\tau X_2(\Lambda_\nu)-\Lambda_\nu X_2(\tau)$$
$$+\varpi\big(-X(\Lambda_\nu)-X_3(\sigma)+\tau X_3(\Lambda_\nu)-\Lambda_\nu X_3(\tau)\big)=0.$$

Nach Nr. 20 ist diese Relation unabhängig von ϖ erfüllt, wenn das ν^{te} Charakteristikensystem des gegebenen vollständigen Integrals unbeschränkt integrabel ist; umgekehrt, ist letzteres der Fall, so ist jede der Gleichungen (8), (9) eine Folge der andern; jeder particuläre Werth ϖ, welcher der partiellen Differentialgleichung 1. O. (9) genügt, macht zusammen mit den aus (7) zu berechnenden u, v, w das System (1) unbeschränkt integrabel, und es giebt also unbegrenzt viele vollständige Integrale von (5), welche das gegebene unbeschränkt integrabele Charakteristikensystem (6) miteinander gemein haben, was übrigens auch leicht aus § 5 gefolgert werden kann. Schreibt man in (9) $d\varpi : dx$ für $X(\varpi)$, so definirt diese gewöhnliche Differentialgleichung wie in Nr. 5 längs jeder $C^{(2)}$ des Systems (6) die hindurchgehenden *Charakteristiken* 3. *O.***)

*) Vgl. meine oben citirte Arbeit (Math. Ann. 47) § 1.

**) Ein Beispiel für ein vollständiges Integral, dessen *beide* Charakteristikensysteme unbeschränkt integrabel sind, liefert das in Nr. 24 behandelte Integral der Gleichung (15) daselbst.

31. Hat man ein vollständiges Integral von (5), dessen ν^{tes} Charakteristikensystem unbeschränkt integrabel ist, so lässt sich aus ihm durch Enveloppenbildung ein allgemeineres Integral von (5) ableiten. Nach den Nrn. 29, 30 geht nämlich durch jedes Element $E(x\ldots t)$ *eine* Integralfläche V des vollständigen Integrals und *eine* auf ihr gelegene Charakteristik C des Systems (6); durch ein benachbartes Element E', welches den Relationen § 5 (12) genügt (wo das Symbol d sich auf das System (6) bezieht), geht ebenso eine Fläche V' und eine darauf gelegene Charakteristik C'; diese liegt mit C ihrer ganzen Erstreckung nach vereinigt, d. h. jedes Element von C liegt mit den benachbarten Elementen von C' vereinigt. Da nun die Bedingung der vereinigten Lage benachbarter Elemente 2. O. ee' nichts anderes ausdrückt (Nr. 1), als dass das zu e' gehörige Element 1. O. auf e gelegen ist, so folgt, dass die Streifen CC', oder auch: die Flächen VV' den zu C' gehörigen Streifen 1. O. K' mit einander gemein haben. Versteht man also unter $S^{(2)}$ einen Streifen, der die Bedingungen § 5 (12) erfüllt, unter $EE'E''\ldots$ successive Elemente desselben, unter $CC'C''\ldots$ und $VV'V''\ldots$ die durch sie bestimmten Charakteristiken des Systems (6) bez. Flächen des gegebenen vollständigen Integrals, unter $KK'K''\ldots$ die zu $CC'C''\ldots$ bez. gehörigen Streifen 1. O., so ist die Fläche U, welche aus den Streifen $CC'C''\ldots$ aufgebaut ist, das Umhüllungsgebilde der eingliedrigen Flächenschaar $VV''\ldots$ in dem Sinne, dass jede Fläche V mit U einen Streifen 2. O. C, mit der benachbarten Fläche V' einen Streifen 1. O. K' gemein hat. U ist dann eine Fläche des in Aussicht genommenen allgemeineren Integrals von (5).

Umgekehrt erkennt man leicht, dass eine eingliedrige Flächenschaar $VV'\ldots$, in der jede Fläche V mit der benachbarten V' einen Streifen 1. O. K' gemein hat, eine Enveloppe U besitzt, die mit jeder Fläche V einen Streifen 2. O. gemein hat.*)

32. Besitzt die eingliedrige Flächenschaar

$$V(xyz\alpha)=0 \tag{10}$$

mit dem Parameter α die soeben geschilderte Eigenthümlichkeit, und setzen wir wie gewöhnlich zur Abkürzung

$$\partial V:\partial\alpha = V_\alpha,\quad \partial^2 V:\partial\alpha\,\partial x = V_{\alpha x}\ \text{etc.},$$

so sind die Gleichungspaare:

$$V_x+pV_z=0,\quad V_y+qV_z=0 \tag{11}$$

und

$$V_{\alpha x}+pV_{\alpha z}=0,\quad V_{\alpha y}+qV_{\alpha z}=0 \tag{12}$$

für jedes beliebige α und jedes Werthsystem xyz, das die Relationen

$$V=0,\quad V_\alpha=0 \tag{13}$$

*) Diese Art von Enveloppen betrachtet schon Du Bois-Reymond l. c. § 55.

erfüllt, miteinander verträglich. Nun bestehen zwischen der Fläche $V' = V + V_\alpha d\alpha = 0$ und der zweitbenachbarten Fläche V'' der Schaar (10) wieder dieselben Beziehungen wie zwischen V und V', d. h. sie haben einen zu K' benachbarten Streifen K'' 1. O. gemein. Einem Punkte xyz der Raumcurve $R^{(0)}$, die durch Elimination von α aus (13) und:

(14) $$V_{\alpha\alpha} = 0$$

sich ergiebt, ist so ein Element 1. O. e zugewiesen, für das man ausser (11), (12) hat:

(15) $$V_{\alpha\alpha x} + p\, V_{\alpha\alpha z} = 0, \qquad V_{\alpha\alpha y} + q\, V_{\alpha\alpha z} = 0.$$

Die solcherweise den Punkten von $R^{(0)}$ zugewiesenen Elemente 1. O. bilden einen durch $R^{(0)}$ gehenden Streifen $R^{(1)}$, d. h. man hat:

(16) $$dz = p\,dx + q\,dy$$

wo die dx etc. Verschiebungen auf $R^{(0)}$ anzeigen, und p, q den Gleichungen (11), (12), (15) genügen; man erhält die Relation (16) in der That durch Differentiation von (13), (14) unter Berücksichtigung der Beziehungen (11), (12), (15). Um das dem Nachbarpunkt $x + dx \ldots$ von $R^{(0)}$ zugewiesene Element 1. O. e' von $R^{(1)}$ zu finden, differentiiren wir (11), (12) unter der Annahme, dass α die durch (13), (14) definirte Function des Ortes auf der Raumcurve $R^{(0)}$ sei. Wir erhalten so wegen (12) und (15) z. B. für $dp : dx$, $dy : dx$ die beiden Gleichungen:

$$(V_{xx} + 2p\,V_{xz} + p^2\,V_{zz})dx + (V_{xy} + \cdots)dy + dp\,V_z = 0,$$
$$(V_{\alpha xx} + 2p\,V_{\alpha xz} + p^2\,V_{\alpha zz})dx + (V_{\alpha xy} + \cdots)dy + dp\,V_{\alpha z} = 0.$$

Dieselben Relationen erhält man aber, wenn man das auf K' gelegene zu $x \ldots q$ benachbarte Element bestimmt. Indem wir auf die Bezeichnungen der Nr. 31 zurückgreifen, können wir sagen:

„*Ordnet man nach der Methode der Nr.* 18 ∞^1 *Charakteristiken $CC' \ldots$ des unbeschränkt integrablen Systems* (6) *zu einer Fläche U zusammen, so umhüllen die zugehörigen Trägerstreifen* 1. *O.* $KK'K'' \ldots$ *im allgemeinen*) einen Streifen* 1. *O.* $R^{(1)}$ *in dem Sinne, dass jeder Streifen K mit $R^{(1)}$ zwei benachbarte Elemente ee' gemein hat.*“

Zu jedem Element e von $R^{(1)}$ gehört ein Element 2. O., welches definirt ist als Element der zu K gehörigen Charakteristik C; solcherweise ist ein durch $R^{(1)}$ gehender Streifen $R^{(2)}$ bestimmt, der augenscheinlich der Gleichung

(17) $$\frac{\delta y}{\delta x} = \Lambda_\nu$$

und den Relationen § 5 (12) genügt, die wegen (17) in die nachfolgenden übergehen:

---

*) Vgl. den Schluss der folgenden Nr.

(18) $$\frac{\delta z}{\delta x} = p + q\Lambda_\nu, \quad \frac{\delta p}{\delta x} = r + s\Lambda_\nu, \quad \frac{\delta q}{\delta x} = s + t\Lambda_\nu,$$

(19) $$\begin{cases} \dfrac{\delta r}{\delta x} + \Lambda_\nu \dfrac{\delta s}{\delta x} = \dfrac{dr}{dx} + \Lambda_\nu \dfrac{ds}{dx}, \\ \dfrac{\delta s}{\delta x} + \Lambda_\nu \dfrac{\delta t}{\delta x} = \dfrac{ds}{dx} + \Lambda_\nu \dfrac{dt}{dx} \end{cases}$$

worin die $dr : dx$ etc. wie gewöhnlich durch (6) bestimmt sind. Wegen (17), (18) ist also $R^{(2)}$ ein Integralstreifen 2. O. von $F = C$ (Nr. 7) und umgekehrt bestimmt nach Nr. 18 jeder Integralstreifen $R^{(2)}$ des ν^{ten} Systems, der (19) befriedigt, eine Integralfläche U von (5).

33. Die Relationen (17), (18), (19) sind erfüllt für:

$$\delta x = \delta y = \delta z = \delta p = \delta q = 0,$$
$$\delta r + \Lambda_\nu \delta s = 0, \quad \delta s + \Lambda_\nu \delta t = 0$$

d. h. für einen Streifen $S^{(2)}$ von ∞^1 Elementen 2. O., die alle ein Element $xyzpq$ gemein haben, und deren jedes das unmittelbar vorhergehende stationär berührt (NNr. 14, 15); $S^{(2)}$ ist dann selbst eine Charakteristik, welche der andern Wurzel $\Lambda_{\nu'}$ der Fundamentalgleichung entspricht. In der Bezeichnungsweise von § 3 correspondirt eine solche Serie $S^{(2)}$ von Elementen 2. O. einer *Developpabeln* innerhalb der daselbst betrachteten Strahlencongruenz. Die durch $S^{(2)}$ bestimmte Integralfläche des unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems (6) weist im Punkte xyz eine Singularität von transcendentem Charakter auf, und stellt das Analogon der sog. „Integralconoide"*) einer partiellen Differentialgleichung 1. O. dar. Die Existenz dieser Art von Integralflächen kann auch unabhängig von der Betrachtung eines unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems erschlossen werden, und man findet, dass durch jedes Element 2. O. E eine und nur eine derartige Fläche geht, welche eine willkürlich gewählte von E auslaufende Charakteristik enthält.

Die Ueberlegungen der vorigen Nr. werden ungültig, wenn (5) eine Ampère'sche Gleichung ist (Nr. 8); in diesem Falle artet ja, wie wir in Nr. 9 gesehen haben, die durch einen Integralstreifen bestimmte Integralfläche in die Element-$M_2^{(2)}$ aus, welche sich an eine $C^{(1)}$ anschliesst; in dieselben Element-$M_2^{(2)}$ gehen auch die soeben betrachteten besonderen Integralflächen über. Die Gleichungen (13), (14) stellen jetzt, solange die Flächenschar (10) nicht besonders gewählt ist, keine Raumcurve dar, sondern liefern (durch Elimination der xyz) eine Relation für α allein. Ein weitergehendes Studium dieser Verhältnisse würde uns indes hier zu weit führen.**)

*) Du Bois-Reymond l. c. § 31. p. 62.

**) Aus den bisherigen Entwickelungen folgert man leicht, dass der auf p. 9 meiner in Nr. 23 citirten Arbeit ausgesprochene Satz nur für vollständige

34. Ist $R^{(2)}$ ein Integralstreifen, der wie in Nr. 32 als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Charakteristiken $CC' \dots$ des Systems (6) definirt ist, so werden ihm entlang nach Nr. 7 die Ableitungen $u v w \varpi$ der durch ihn bestimmten Integralfläche U unendlich. Um weitere Aufschlüsse über das Verhalten von U in der Nähe von $R^{(2)}$ zu erhalten, nehmen wir an, dass ein beliebiger Punkt der vorhin mit $R^{(0)}$ bezeichneten Curve Nullpunkt sei, dass das zugehörige Element 1. O. in die xy-Ebene hineinfalle, und dass die x-Axe die Curve $R^{(0)}$ im Nullpunkt berühre.*) Es sei s die vom Nullpunkt aus gerechnete Bogenlänge dieser Curve, σ die Bogenlänge der Trägercurve einer der ∞^1 Charakteristiken $CC' \dots$, die längs $R^{(0)}$ aufgereiht sind, gezählt von ihrem Berührpunkt mit $R^{(0)}$. Die ∞^1 Trägerstreifen 1. O. $KK' \dots$ von $CC' \dots$ sind dann durch Gleichungen der folgenden Form gegeben:

$$\begin{gathered} x = \Phi(s, \sigma), \quad y = \Psi(s, \sigma), \quad z = \mathrm{X}(s, \sigma), \\ p = \Pi(s, \sigma), \quad q = \mathrm{K}(s, \sigma). \end{gathered} \tag{20}$$

worin die rechten Seiten gewöhnliche convergente Potenzreihen von s und σ bedeuten, und s als reihender Parameter aufzufassen ist.

Man hat für jedes s und σ

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \sigma}\right)^2 = 1 \tag{21}$$

ferner, da die Gleichungen (20) für $\sigma = 0$ den Streifen $R^{(1)}$ darstellen sollen, für $\sigma = 0$ und beliebiges s

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)^2 = 1. \tag{22}$$

Da $R^{(1)}$ von den Trägerstreifen der $CC' \dots$ eingehüllt wird, so folgt für jedes s wegen (21) und (22):

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{\partial \Phi(s, 0)}{\partial s} \cdots \left(\frac{\partial \mathrm{K}}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=0} = \frac{\partial \mathrm{K}(s, 0)}{\partial s}. \tag{23}$$

Endlich haben wir für jedes s und σ die Identitäten:

$$\frac{\partial z}{\partial s} \equiv \Pi \frac{\partial x}{\partial s} + \mathrm{K} \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial \sigma} \equiv \Pi \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \mathrm{K} \frac{\partial y}{\partial \sigma}. \tag{24}$$

Die Wahl unseres Coordinatensystems und die Bedingungen (21), (22), (23) erlauben uns, die Gleichungen (20) sogleich in folgender Form hinzuschreiben:

Integrale mit unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystemen, sowie im Falle der Ampère-Natani'schen Gleichungen richtig ist; der daselbst gegebene Beweis gilt, wie man leicht sieht, nur in dem letzteren Falle.

*) Vgl. die analoge Entwickelung für $n = 1$ bei Darboux, Sav. Etr. XXVII, 1883, p. 42 ff.

(25) $x = s + \sigma + \frac{1}{2}a(s+\sigma)^2 + \frac{1}{2}a'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\varphi_{111}(s^3 + 3s^2\sigma) + \cdots] + \cdots,$

(26) $y = \frac{1}{2}b(s+\sigma)^2 + \frac{1}{2}b'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\psi_{111}(s^3 + s^2\sigma) + \cdots] + \cdots,$

(27) $z = \frac{1}{2}c(s+\sigma)^2 + \frac{1}{2}c'\sigma^2 + \frac{1}{6}[\chi_{111}(s^3 + 3s^2\sigma) + 3\chi_{122}s\sigma^2 + \chi_{222}\sigma^3],$

$$p = \pi(s+\sigma) + \frac{1}{2}d(s+\sigma)^2 + \frac{1}{2}d'\sigma^2 + \cdots,$$

$$q = \varkappa(s+\sigma) + \frac{1}{2}e(s+\sigma)^2 + \frac{1}{2}e'\sigma^2 + \cdots.$$

Die erste der Identitäten (24) liefert dann die Relationen

$$c = \pi,$$

(28) $$\chi_{111} = d + 2a\pi + 2b\varkappa,$$

(29) $$\frac{1}{2}\chi_{122} = \frac{1}{2}(d+d') + a\pi + b\varkappa,$$

die zweite ergiebt die weiteren:

$$c' = 0,$$

(30) $$\chi_{122} = d + 2a\pi + 2b\varkappa + a'\pi + b'\varkappa,$$

(31) $$\frac{1}{2}\chi_{222} = \frac{1}{2}(d+d') + \pi(a+a') + \varkappa(b+b').$$

Aus (28)—(31) folgt:

$$a'\pi + b'\varkappa = d'; \quad \chi_{122} = \chi_{111} + d'; \quad \chi_{222} = \chi_{111} + 3d'.$$

Die Gleichungen (25), (26), (27) gehen also, wenn man $s + \sigma = u$ setzt, in die folgende Gestalt über:

(25a) $$x = u + \frac{1}{2}au^2 + \frac{1}{2}a'\sigma^2 + \cdots,$$

(26a) $$y = \frac{1}{2}bu^2 + \frac{1}{2}b'\sigma^2 + \cdots,$$

(27a) $$z = \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{2}d'u\sigma^2 + \frac{1}{6}\chi_{111}u^3 + \cdots.$$

Für die Schnittcurve von U mit einer den Nullpunkt, aber nicht die x-Axe enthaltenden Ebene E:

(32) $$x = my + nz$$

hat man wegen (25a) annähernd:

$$u = \varrho\sigma^2 + \varrho'\sigma^3 + \cdots.$$

Substituirt man dies in die vorigen Gleichungen, so kommt:

(33) $x = \alpha\sigma^2 + \alpha'\sigma^3 + \cdots, \quad y = \beta\sigma^2 + \beta'\sigma^3 + \cdots, \quad z = \gamma''\sigma^4 + \gamma'''\sigma^5 + \cdots$

worin γ''' im allgemeinen nicht verschwindet. Bestimmt man in der Ebene E ein rechtwinkliges Coordinatensystem ξ, η mit dem Nullpunkt als Anfangspunkt, so hat man wegen (32) Gleichungen der Form:

(34) $$\xi = \alpha y + \beta z, \quad \eta = \gamma y + \delta z \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0).$$

Aus (33), (34) gewinnt man eine Relation der folgenden Gestalt:

$$\eta = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi^i + \xi^{\frac{5}{2}} \left(\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \xi^k \right), \tag{35}$$

worin β_0 im allgemeinen nicht verschwindet; wir haben also das Resultat:

„*Ist* $R^{(2)}$ *ein Integralstreifen von* (5), *der den Bedingungen* (17), (18), (19) *genügt,* $R^{(0)}$ *seine Trägercurve,* U *die durch ihn festgelegte Integralfläche des unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems* (6), *so ist die Schnittcurve von* U *mit einer durch einen Punkt* P *von* $R^{(0)}$, *aber nicht durch die zugehörige Tangente von* $R^{(0)}$ *gehenden Ebene* E *in der Form* (35) *darstellbar, wenn* ξ, η *rechtwinklige Coordinaten in* E *mit* P *als Anfangspunkt bedeuten, besitzt also in* P *einen Rückkehrpunkt 2. O. Daher bezeichnen wir* $R^{(2)}$ *auch als Rückkehrstreifen 2. O. von* U."

35. Wir haben uns in § 5 damit begnügt, den Begriff des unbeschränkt integrabeln Charakteristikensystems *n*. O. aufzustellen, ohne für allgemeines *n* ein Beispiel anzugeben.*) Daher führen wir auch nur historisch an, dass die Entwickelungen dieses Paragraphen sich auch für allgemeines *n* ohne wesentliche Modificationen durchführen lassen. Genügt insbesondere ein Integralstreifen *n*. O. von

$$F^{(n)} = C \tag{36}$$

ausser den Relationen

$$\frac{\delta y}{\delta x} = \Lambda_\nu, \quad \frac{\delta \alpha_i^{(k)}}{\delta x} = \alpha_i^{(k+1)} + \Lambda_\nu \alpha_{i+1}^{(k+1)} \quad (i=0, \cdots k;\ k=0 \cdots n-1) \tag{37}$$

auch noch den folgenden

$$\frac{\delta \alpha_k^{(n)}}{\delta x} + \Lambda_\nu \frac{\delta \alpha_{k+1}^{(n)}}{\delta x} = \frac{d\alpha_k^{(n)}}{dx} + \Lambda_\nu \frac{d\alpha_{k+1}^{(n)}}{dx} \tag{38}$$

(worin sich die $d\alpha_i^{(n)}$, dx auf ein gegebenes unbeschränkt integrables Charakteristikensystem beziehen), so stellt er einen Rückkehrstreifen *n*. O. (Nr. 7) einer durch ihn gehenden Integralfläche von (36) dar, welche aus Charakteristiken des gegebenen unbeschränkt integrablen Systems aufgebaut ist, und umgekehrt. Die Gleichungen (38) gestatten eine sehr einfache Interpretation, der wir uns nun zuwenden.

36. Wir betrachten eine einzelne Charakteristik $C^{(n)}$ eines unbeschränkt integrablen Charakteristikensystems von (36), und einen Integralstreifen $R^{(n)}$ von (36), in dessen Definitionsgleichungen (37) dasselbe Λ_ν eingeht, das auch in den Bedingungsgleichungen der $C^{(n)}$

*) Es ist übrigens leicht, das Beispiel der Nrn. 23, 24 in diesem Sinne zu verallgemeinern.

auftritt (Nr. 4), und welcher mit $C^{(n)}$ ein Element $x \ldots \alpha_n^{(n)}$ gemein hat. Unter dieser Voraussetzung haben die bez. zu $R^{(n)}$ und $C^{(n)}$ gehörigen Trägerstreifen $n-1^{\text{ter}}$ O. $R^{(n-1)}$ und $C^{(n-1)}$ die beiden benachbarten Elemente $x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)}$ und $x + dx \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + d\alpha_{n-1}^{(n-1)}$ mit einander gemein; dies folgt unmittelbar aus der Definition der Integralstreifen, für $n = 2$ übrigens auch aus Nr. 32. Bezeichnet man wie bisher mit δ, d die resp. auf $R^{(n)}$, $C^{(n)}$ bezüglichen Differentiale, so hat man also:

$$(39)\quad \begin{cases} \delta x = dx; \quad \delta y = dy = \Lambda_\nu dx, \\ d\alpha_i^{(k)} = \delta\alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} dx + \alpha_{i+1}^{(k+1)} dy \quad (i = 0, \ldots k;\ k = 0, 1, \ldots n-1). \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$(40)\quad \delta^2 \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta^2 x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta^2 y + \delta\alpha_i^{(k+1)} dx + \delta\alpha_{i+1}^{(k+1)} dy$$
$$(i = 0, \ldots k;\ k = 0, 1, \ldots n-1).$$

Soll das zweitbenachbarte Element

$$x + 2\delta x + \delta^2 x \ldots \alpha_{n-1}^{(n-1)} + 2\delta\alpha_{n-1}^{(n-1)} + \delta^2 \alpha_{n-1}^{(n-1)}$$

von $R^{(n-1)}$ auf dem Element $x + dx \ldots \alpha_n^{(n)} + d\alpha_n^{(n)}$ von $C^{(n)}$ gelegen sein, so muss man haben:

$$(41)\quad \delta^2 \alpha_i^{(k)} = \alpha_i^{(k+1)} \delta^2 x + \alpha_{i+1}^{(k+1)} \delta^2 y + d\alpha_i^{(k+1)} dx + d\alpha_{i+1}^{(k+1)} dy.$$
$$(i = 0, \ldots k;\ k = 0. 1, \ldots n-1).$$

Wegen (40) ergiebt sich hieraus unter Vernachlässigung von Grössen 3. O. das Gleichungssystem (38); die für $k = 0, \ldots n-2$ aus (40), (41) folgenden Relationen erweisen sich nämlich vermöge (39) als identisch erfüllt. Da man umgekehrt von (38), (39), (40) aus leicht zu den Gleichungen (41) gelangt, so können wir den folgenden Satz aussprechen:

„Die Rückkehrstreifen $R^{(n)}$ der Integralflächen V eines unbeschränkt integrablen Charakteristikensystems besitzen die folgende Eigenschaft: hat der Trägerstreifen $R^{(n-1)}$ eines Streifens $R^{(n)}$ mit einer Fläche V zwei aufeinanderfolgende Elemente $n - 1^{\text{ter}}$ O. gemein, so liegt stets noch ein drittes benachbartes Element von $R^{(n-1)}$ auf V."

Für $n = 1$ ergiebt sich hieraus Lie's Theorem über die „Integralcurven" der partiellen Differentialgleichungen 1. O.*)

München, 1. März 1895.

*) Vgl. z. B. Goursat, l. c. Chap. IX, Nr. 77.

Ueber die Mittelwerthe der Functionen einer reellen Variabeln.

Von

L. Maurer in Strassburg.

Von dem Begriff des Mittelwerthes macht man in der Physik und mehr noch in der Statistik und Meteorologie Gebrauch, um den Verlauf einer durch Beobachtung zu bestimmenden Function in grossen Zügen — unter Vernachlässigung kleiner Schwankungen — festzustellen.

Ist die Function $f(x)$ nur für discrete Werthe des Argumentes x — etwa nur für ganzzahlige Werthe — definirt, so bestimmt man die mittleren Werthe $f_1(x)$ — ebenfalls nur für ganzzahlige Werthe von x — durch die Gleichung

$$f_1(x) = \frac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)+\cdots+f(x+m)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots+f(x-m)}{2m+1}.$$

Ist die Function $f(x)$ für alle Werthe von x definirt, so tritt an die Stelle des arithmetischen Mittels das Integral

$$f_1(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+\xi)\,d\xi.$$

Indem man die Operation, durch die $f_1(x)$ aus $f(x)$ abgeleitet worden ist, auf $f_1(x)$ anwendet, gelangt man zu dem zweiten Mittelwerth $f_2(x)$, von diesem zum dritten Mittelwerth $f_3(x)$ u. s. w. Je weiter man in der Reihe der Functionen $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ fortschreitet, zu desto regelmässiger verlaufenden Functionen gelangt man, desto kleiner werden die Schwankungen, die in einem Intervall von gegebener Länge stattfinden. Diese Thatsache ist bekannt. Es ist aber meines Wissens noch nicht genau festgestellt, wie weit hier ein allgemeines Gesetz reicht. Eine hierauf bezügliche Untersuchung bietet auch von einem anderen Gesichtspunkt aus betrachtet Interesse. Die Theorie der Mittelwerthe steht nämlich im engsten Zusammenhang mit dem Problem, eine willkürlich gegebene Function näherungsweise durch eine analytische Function darzustellen.

1.

Für alle Werthe der reellen Variabeln x sei eine reelle Function $f(x)$ eindeutig definirt, die den beiden folgenden Bedingungen genügt:

1) Der absolute Werth von $f(x)$ übersteigt nicht eine gegebene Grösse G.

2) Die Function $f(x)$ lässt durchweg die Integration zu.

Soweit diese Bedingungen nicht erfüllt sind, kann von mittleren Werthen der Function überhaupt nicht die Rede sein.

Durch die Voraussetzung, dass diese Bedingungen für *alle* Werthe von x erfüllt sind, wird die Allgemeinheit der Untersuchung nicht wesentlich beschränkt. Gelten dieselben nämlich nur für ein begrenztes Intervall, so kann man auf die mannigfaltigste Weise eine Function $\varphi(x)$ für alle Werthe von x der Art definiren, dass innerhalb des gegebenen Intervalls $\varphi(x)=f(x)$ ist, und dass auch ausserhalb desselben $\varphi(x)$ den oben genannten Bedingungen genügt. Es bietet dann keine Schwierigkeit festzustellen, in wie weit die für $\varphi(x)$ geltenden Sätze auch noch für $f(x)$ gelten.

Wir definiren nun für jeden Werth von x die Mittelwerthe $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... durch die Gleichungen

$$f_1(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f(x+\xi)\,d\xi,$$

$$f_2(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_1(x+\xi)\,d\xi=\frac{1}{4h^2}\int_{-h}^{+h}\int_{-h}^{+h} f(x+\xi_1+\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_{n-1}(x+\xi)\,d\xi=\frac{1}{(2h)^n}\int_{-h}^{+h}\int_{-h}^{+h}\cdots\int_{-h}^{+h} f(x+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi\ldots d\xi_n.$$

Die (positive) Constante h kann beliebig gewählt werden.

Wir untersuchen zunächst eine beliebige Function $f_\lambda(x)$ aus dieser Reihe in Bezug auf Stetigkeit und Differentiirbarkeit. Aus der Gleichung

$$\begin{aligned} f_\lambda(x+\delta)-f_\lambda(x) &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_{\lambda-1}(x+\delta+\xi)\,d\xi-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h} f_{\lambda-1}(x+\xi)\,d\xi \\ &= \frac{1}{2h}\int_{h}^{h+\delta} f_{\lambda-1}(x+\xi)\,d\xi-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{-h+\delta} f_{\lambda-1}(x+\xi)\,d\xi. \end{aligned}$$

ergiebt sich:

A) Die Function $f_\lambda(x)$ ist stetig, auch wenn die Function $f_{\lambda-1}(x)$ unstetig ist.

B) Wenn die Function $f_{\lambda-1}(x)$ stetig aber nicht differentiirbar ist, so besitzt die Function $f_\lambda(x)$ eine stetige erste Derivirte

$$f_\lambda'(x) = \frac{f_{\lambda-1}(x+h) - f_{\lambda-1}(x-h)}{2h}.$$

C) Besitzt die Function $f_{\lambda-1}(x)$ stetige Derivirte bis zur n^{ten} Ordnung einschliesslich, so besitzt die Function $f_\lambda(x)$ auch noch eine stetige Derivirte $n+1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$f_\lambda^{(n+1)}(x) = \frac{f_{\lambda-1}^{(n)}(x+h) - f_{\lambda-1}^{(n)}(x-h)}{2h}.$$

Hieraus folgt:

Die Function $f_1(x)$ ist jedenfalls stetig.

Die Function $f_2(x)$ besitzt mindestens eine stetige erste Derivirte.

Die Function $f_3(x)$ besitzt auch noch eine stetige zweite Derivirte.

. . . .

Die Function $f_n(x)$ besitzt eine stetige Derivirte der Ordnung $n-1$.

Die Functionen

$$f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x), \ldots f_n(x)$$

die durch fortgesetzte Mittelwerthbildung entstehen, nähern sich demnach in ihrem Verhalten mehr und mehr dem regulären Verhalten analytischer Functionen, und es ist vorauszusehen, dass der Grenzwerth, gegen den $f_n(x)$ convergirt, wenn n unbegrenzt wächst und h unbegrenzt abnimmt, eine analytische Function sein wird.

Um dies zu beweisen ist zunächst erforderlich, die schwerfällige Darstellung von $f_n(x)$ durch ein n-faches Integral durch eine geschmeidigere Ausdrucksform zu ersetzen.

2.

In dem n-fachen Integral

$$f_n(x) = \frac{1}{(2h)^n}\int_{-h}^{+h}\int_{-h}^{+h}\cdots\int_{-h}^{+h} f(x+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_n$$

führen wir an Stelle von ξ_n die Variable

$$u = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$$

ein und integriren zunächst nach u. Die Integration erstreckt sich auf alle die Werthe von u, die den beiden Ungleichungen genügen

$$(1) \qquad -nh \leq u \leq nh,$$

$$(2) \qquad -h \leq u - \xi_1 - \xi_2 - \cdots - \xi_{n-1} \leq h.$$

Wir können aber die Integration auf alle der Ungleichung (1) genügenden Werthe erstrecken, wenn wir nach Dirichlet's Vorgang durch

Einführung eines Discontinuitätsfactors dafür sorgen, dass der Integrand für alle die Werthe von u, die der Ungleichung (1) aber nicht der Ungleichung (2) genügen, verschwindet. Als Discontinuitätsfactor benützen wir das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}}{h}\,\omega\right)\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\omega,$$

das bekanntlich den Werth 1 oder 0 hat, je nachdem der absolute Werth des Quotienten

$$\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}}{h}$$

kleiner oder grösser als 1 ist.

Wir erhalten zunächst, indem wir die Reihenfolge der Integrationen verändern

$$f_n(x)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{2h}\int_{-nh}^{+nh}du\int_0^\infty d\omega\, f(x+u)\, J(u,\omega),$$

wo zur Abkürzung

$$J(u,\omega)=\frac{1}{(2h)^{n-1}}\int_{-h}^{+h}\int_{-h}^{+h}\cdots\int_{-h}^{+h}\cos\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}}{h}\,\omega\right)\frac{\sin\omega}{\omega}\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_{n-1}$$

gesetzt ist.

Dieses $n-1$-fache Integral lässt sich ohne weiteres ausrechnen. Es ist

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2h}\int_{-h}^{+h}\cos\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-1}}{h}\,\omega\right)d\xi_{n-1}\\ &=\frac{1}{2h}\cdot\frac{h}{\omega}\cdot\left[\sin\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-2}+h}{h}\,\omega\right)\right.\\ &\qquad\left.-\sin\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-2}-h}{h}\,\omega\right)\right]\\ &=\cos\left(\frac{u-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{n-2}}{h}\,\omega\right)\frac{\sin\omega}{\omega}.\end{aligned}$$

Dementsprechend ergiebt sich

$$J(u,\omega)=\cos\frac{u\omega}{h}\cdot\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^n.$$

Wir erhalten demnach

$$f_n(x)=\frac{1}{\pi h}\int_{-nh}^{+nh}du\int_0^\infty f(x+u)\cos\frac{u\omega}{h}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^n d\omega\,.$$

3.

Wir berechnen nun unter der Voraussetzung, dass n sehr gross ist, einen Näherungswerth von $f_n(x)$. Zu dem Zweck ist es erforderlich zunächst für das Integral

$$P(u) = \int_0^\infty \cos\frac{u\omega}{h}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^n d\omega$$

einen Näherungswerth zu ermitteln.

Wir zerlegen zunächst dieses Integral in zwei Theile $P_1(u)$ und $P_2(u)$, indem wir setzen

$$P_1(u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\frac{u\omega}{h}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^n dw,$$

$$P_2(u) = \int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \cos\frac{u\omega}{h}\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^n dw.$$

Das zweite Integral betreffend ergiebt sich sofort:

1) Der absolute Werth von $P_2(u)$ ist kleiner als

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty \frac{1}{\omega^n} d\omega = \frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1}.$$

Im Integral $P_1(u)$ führen wir an Stelle der Integrationsvariabeln ω die Variable $\frac{\omega}{\sqrt{n}}$ ein und setzen zur Abkürzung

$$\frac{u}{\sqrt{n}h} = v, \qquad \left(\frac{\sin\frac{\omega}{\sqrt{n}}}{\frac{\omega}{\sqrt{n}}}\right)^n = \psi(\omega)$$

so dass

$$P_1(u) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}\frac{\pi}{2}} \cos v\omega\, \psi(\omega)\, d\omega.$$

Für $-\pi < x < \pi$ gilt bekanntlich die Formel

$$\log\frac{\sin x}{x} = -s_2\frac{x^2}{\pi^2} - \frac{1}{2}s_4\frac{x^4}{\pi^4} - \frac{1}{3}s_6\frac{x^6}{\pi^6}\cdots$$

Hier bedeutet s_λ die Summe

$$1 + \frac{1}{2^\lambda} + \frac{1}{3^\lambda} + \cdots$$

und es ist insbesondere

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6}, \quad s_4 = \frac{\pi^4}{90}.$$

Wir ersetzen x durch $\frac{\omega}{\sqrt{n}}$ und multipliciren mit n. Es folgt

$$\log \psi(\omega) = -\frac{1}{6}\omega^2 - \frac{1}{2} s_4 \frac{\omega^4}{n\pi^4} - \frac{1}{3} s_6 \frac{\omega^6}{n^2\pi^6} \cdots$$

und

$$\log \frac{e^{-\frac{1}{6}\omega^2}}{\psi(\omega)} = \frac{s_4\omega^4}{2n\pi^4}\left(1 + \frac{2}{3}\frac{s_6}{s_4}\frac{\omega^2}{n\pi^2} + \frac{2}{4}\frac{s_8}{s_4}\frac{\omega^4}{n^2\pi^2}\cdots\right)$$

$$< \frac{s_4\omega^4}{2n\pi^4}\,\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{n\pi^2}}.$$

Für

$$\omega < \sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}$$

ist

$$\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{n\pi^2}} < \frac{4}{3},$$

also da $s_4 = \frac{\pi^4}{90}$

$$\log \frac{e^{-\frac{1}{6}\omega^2}}{\psi(\omega)} < \frac{\omega^4}{135n}.$$

Folglich ist

$$\psi(\omega) > e^{-\frac{1}{6}\omega^2 - \frac{\omega^4}{135n}}$$

und

$$e^{-\frac{1}{6}\omega^2} - \psi(\omega) < e^{-\frac{1}{6}\omega^2}\left(1 - e^{-\frac{\omega^4}{135n}}\right).$$

Solange x positiv ist, ist $1 - e^{-x} < x$, folglich

$$e^{-\frac{1}{6}\omega^2} - \psi(\omega) < \frac{\omega^4}{135n} e^{-\frac{1}{6}\omega^2}$$

für

$$0 \leq \omega \leq \sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}.$$

Wir schreiben nun die Gleichung

$$P_1(u) = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}\frac{\pi}{2}} \cos v\omega\,\psi(\omega)\,d\omega$$

in der Form

$$\text{(a)}\qquad \sqrt{n}\,P_1(u) = \int_0^\infty \cos v\omega\, e^{-\frac{1}{6}\omega^2}\, d\omega - \int_{\sqrt{n}\frac{\pi}{2}}^\infty \cos v\omega\, e^{-\frac{1}{6}\omega^2}\, d\omega$$

$$- \int_0^{\sqrt{n}\frac{\pi}{2}} \cos v\omega \left[e^{-\frac{1}{6}\omega^2} - \psi(\omega)\right] d\omega .$$

Das erste Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung hat den Werth

$$\frac{1}{2}\sqrt{6\pi}\; e^{-\frac{3}{2}v^2}.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite von (a) ist dem absoluten Werth nach kleiner als

$$\int_{\sqrt{n}\frac{\pi}{2}}^\infty e^{-\frac{1}{6}\omega^2}\, d\omega$$

und dies ist kleiner als

$$\frac{1}{2\cdot\frac{1}{6}\sqrt{n}\,\frac{\pi}{2}}\, e^{-\frac{1}{6}n\frac{\pi^2}{4}} = \frac{6}{\sqrt{n}\,\pi}\, e^{-\frac{n\pi^2}{24}}.$$

Das dritte Integral auf der rechten Seite von (a) ist dem absoluten Werth nach kleiner als

$$\frac{1}{135n}\int_0^\infty \omega^4 e^{-\frac{1}{6}\omega^2}\, d\omega = \frac{1}{135n}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{6\pi}\cdot\frac{3}{4}\cdot 36$$
$$= \frac{\sqrt{6\pi}}{10n}.$$

Damit ist bewiesen:

2) Der absolute Werth der Differenz

$$P_1(u) - \frac{\sqrt{6\pi}}{2\sqrt{n}}\, e^{-\frac{3}{2}v^2}$$

ist kleiner als

$$\frac{6}{n\pi}\, e^{-\frac{n\pi^2}{24}} + \frac{\sqrt{6\pi}}{10n\sqrt{n}}.$$

Hieraus folgt weiter mit Rücksicht auf (1):

Der absolute Werth der Differenz

$$P(u) - \frac{\sqrt{6\pi}}{2\sqrt{n}}\, e^{-\frac{3}{2}v^2}$$

ist kleiner als

$$\frac{1}{n-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} + \frac{6}{n\pi}\, e^{-\frac{n\pi^2}{24}} + \frac{\sqrt{6\pi}}{10n\sqrt{n}}.$$

An Stelle der Grösse v führen wir wieder ihren Werth $\frac{u}{\sqrt{n}\,h}$ ein. Sodann setzen wir zur Abkürzung

$$R_n = \frac{\sqrt{6\pi}}{10} + \frac{n\sqrt{n}}{n-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{n-1} + \frac{6\sqrt{n}}{\pi}e^{-\frac{n\pi^2}{24}}$$

und

$$k = \sqrt{\frac{2}{3}n}\cdot h.$$

Die für $P(u)$ gefundene Ungleichung ersetzen wir nun durch die Gleichung

$$P(u) = \frac{h\sqrt{\pi}}{k}e^{-\frac{u^2}{k^2}} + \frac{\varepsilon R_n}{n\sqrt{n}},$$

wo ε einen nicht näher bestimmten echten Bruch bedeutet.

Nun war

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi h}\int_{-nh}^{+nh} f(x+u)\,P(u)\,du.$$

Folglich ist

$$f_n(x) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-nh}^{+nh} f(x+u)\,e^{-\frac{u^2}{k^2}}\,du + \frac{\varepsilon'}{\sqrt{n}}\,\frac{GR_n}{\pi};$$

wo G das Maximum der Function $f(x)$ und ε' einen echten Bruch bedeutet.

Damit ist der Satz bewiesen:

Wenn n unbeschränkt zunimmt und h unbeschränkt abnimmt, der Art, dass $\lim \frac{2}{3}\sqrt{n}\,h = k$, so convergirt das n-fache Integral

$$f_n(x) = \frac{1}{(2h)^n}\int_{-h}^{+h}\int_{-h}^{+h}\cdots\int_{-h}^{+h} f(x+\xi_1+\xi_2+\cdots+\xi_n)\,d\xi_1\,d\xi_2\cdots d\xi_n$$

gegen das Integral

$$F(x,k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+u)\,e^{-\frac{u^2}{k^2}}\,du.$$

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mehr mit dieser Function $F(x,k)$.

Eine Verallgemeinerung dieser Function behandelt H. Weierstrass in seiner Abhandlung: Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Variabeln*). Man gelangt zu

---

*) Sitzungsberichte der Berliner Akademie 1885.

dieser Verallgemeinerung, indem man in dem Integral, das die Function $F(x, k)$ darstellt, die Exponentialgrösse durch eine allgemeinere Function ersetzt.

Unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ stetig ist — an dieser Voraussetzung wird in der genannten Abhandlung durchgehends festgehalten — beweist H. Weierstrass die beiden folgenden Sätze:

1) $F(x, k)$ convergirt gegen $f(x)$ wenn k gegen 0 convergirt.

2) Die Function $F(x, k)$ ist ganze transcendente Function von x.

Für die Gültigkeit des ersten Satzes ist es unerlässlich, dass die Function $f(x)$ wenigstens in der Umgebung des Punktes x stetig ist. Dagegen gilt der zweite Satz — wie sofort bewiesen werden soll — unverändert auch dann noch, wenn die Function $f(x)$ Unstetigkeiten, die die Integrirbarkeit nicht ausschliessen, darbietet.

4.

Bevor ich zu diesem Beweis übergehe, schicke ich einige Bemerkungen über die Derivirten der Function e^{-x^2} voraus.

Wie man sich leicht überzeugt, ist die n^{te} Derivirte von e^{-x^2} gleich dem Product von e^{-x^2} in eine ganze Function n^{ten} Grades, die gerade oder ungerade ist, je nachdem die Zahl n gerade oder ungerade ist. Setzen wir

$$\text{(a)} \qquad \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} = (-1)^n e^{-x^2}[\alpha_0^{(n)} x^n - \alpha_2^{(n)} x^{n-2} + \alpha_4^{(n)} x^{n-4} - \cdots].$$

Durch den Schluss von n auf $n+1$ bestätigt man leicht, dass

$$\alpha_0^{(n)} = 2^n \quad \text{und} \quad \alpha_{2\nu}^{(n)} = 2^{n-2\nu}\,\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2\nu+1)}{1.2.3\ldots\nu}.$$

Unter der Voraussetzung das x positiv ist, erhalten wir eine obere Grenze für den absoluten Werth von $\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}$ — er möge in üblicher Weise mit $\left|\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right|$ bezeichnet werden — wenn wir auf der rechten Seite der Gleichung (a) allen Gliedern das positive Vorzeichen geben. Folglich ist

$$\int_0^\infty \left|\frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}\right| dx < \sum_\nu \alpha_{2\nu}^{(n)} \int_0^\infty x^{n-2\nu} e^{-x^2}\, dx.$$

Nehmen wir zunächst an, n sei gerade $= 2m$. Dann ist

$$\int_0^\infty x^{2m-2\nu} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\frac{(2m-2\nu)!}{(m-\nu)!}\cdot\frac{1}{2^{2m-2\nu}}$$

und

$$\alpha_{2\nu}^{(2m)} \int_0^\infty x^{2m-2\nu} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{(2m)!}{(m-\nu)!\,\nu!}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{(2m)!}{m!}\, (m)_\nu,$$

wo $(m)_\nu$ den ν^{ten} Binomialcoefficienten bedeutet.

Wir haben also für $n = 2m$

$$\text{(1)} \qquad \int_0^\infty \left| \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \right| dx < \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, \frac{(2m)!}{m!}\, 2^m.$$

Nehmen wir nunmehr an n sei ungerade $= 2m+1$. In diesem Fall ist

$$\int_0^\infty x^{2m+1-2\nu} e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2}(m-\nu)!.$$

Nun ist

$$m! = \frac{1}{2^m} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m = \frac{(2m+1)!}{2^m . 1 . 3 . 5 \ldots (2m+1)}$$

und dies ist kleiner als

$$\frac{(2m+1)!}{2^m . 2 . 4 . 6 \ldots 2m} = \frac{(2m+1)!}{2^{2m}\, m!}.$$

Demgemäss ist

$$\frac{1}{2}(m-\nu)! < \frac{(2m-2\nu+1)!}{2^{2m-2\nu+1}\,(m-\nu)!}.$$

Folglich

$$\alpha_{2\nu}^{(2m+1)} \int_0^\infty x^{2m+1-2\nu} e^{-x^2}\, dx < \frac{(2m+1)!}{(m-\nu)!\,\nu!}$$

und dies ist gleich

$$\frac{(2m+1)!}{m!}\,(m)_\nu.$$

Wir haben also für $n = 2m+1$

$$\text{(2)} \qquad \int_0^\infty \left| \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \right| dx < \frac{(2m+1)!}{m!}\, 2^m.$$

Aus dem Umstand, dass das Integral

$$\int_0^\infty \left| \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \right| dx$$

einen endlichen Werth hat, ist zu schliessen, dass auf das Integral

$$F(x,k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

die Integration unter dem Integralzeichen beliebig oft angewendet werden darf. Es ist also

$$\frac{d^n F(x,k)}{dx^n} = F^{(n)}(x,k) = \frac{(-1)^n}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \frac{d^n}{du^n} e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

$$= \frac{(-1)^n}{k^n \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ku) \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} du.$$

Der absolute Werth von $\frac{1}{n!} F^{(n)}(x,k)$ ist kleiner als

$$\frac{1}{n!} \frac{2G}{k^n \sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \left| \frac{d^n e^{-u^2}}{du^n} \right| du$$

oder kleiner als

$$\frac{2^{\frac{n}{2}} G}{\left(\frac{n}{2}\right)!\, k^n}, \text{ wenn } n \text{ gerade ist}$$

und kleiner als

$$\frac{2^{\frac{n+1}{2}} G}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\, \sqrt{\pi} \cdot k^n}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist.}$$

Die Taylor'sche Reihe convergirt also für jeden Werth von x.

An Stelle des Maximalwerthes G von $f(x)$ können wir auch den halben Betrag der grössten Schwankung S der Function $f(x)$ einführen. Vermindert man nämlich die Function $f(x)$ um eine beliebig zu wählende Constante c, so wird $F(x,k)$ um dieselbe Constante c vermindert; die Derivirten von $F(x,k)$ und die Differenz $f(x) - F(x,k)$ bleiben ungeändert. Wählt man für c das arithmetische Mittel aus dem kleinsten und dem grössten Werth von $f(x)$, so ist der Maximalwerth von $f(x) - c$ gleich der Hälfte der Maximalschwankung S von $f(x)$.

Für die erste Derivirte $F'(x,k)$ ergiebt sich aus dem Vorangehenden die obere Grenze $\frac{S}{\sqrt{\pi}\, k}$. Demnach ist die grösste Schwankung, die die Function $F(x,k)$ in einem Intervall von der Länge b darbieten kann, kleiner als $\frac{b}{k} \cdot \frac{S}{\sqrt{\pi}}$, sie sinkt also bei wachsendem k unter jede gegebene Grösse. Dies überträgt sich auf die Function

$$f_n(x) = \frac{1}{(2h)^n} \int\limits_{-h}^{+h} \int\limits_{-h}^{+h} \cdots \int\limits_{-h}^{+h} f(x + \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

Hält man nämlich die Grösse h fest und lässt die Zahl n unbeschränkt wachsen, so wächst auch die Grösse $k = \frac{2}{3}\sqrt{n}\,h$ über alle Grenzen und $f_n(x)$ convergirt gegen $F(x, k)$.

5.

Für die Coefficienten der Potenzreihen, die zur Darstellung der Function $F(x, k)$ dienen, sind im vorigen Artikel obere Grenzen nachgewiesen worden.

Nun wird die obere Grenze für den Coefficienten von x^n unendlich wie $\frac{1}{k^n}$, wenn k gegen Null convergirt. Es bleibt daher die Möglichkeit offen, dass für den Coefficienten selbst dasselbe gilt. Dieser Fall kann in der That eintreten, wie sich an Beispielen zeigen lässt.

Nehmen wir an, es sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x < 0, \\ +1 & \text{für } x \geqq 0, \end{cases}$$

so ist

$$F(x, k) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{k}} e^{-u^2}\, du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)\,\nu!\,k^{2\nu+1}}.$$

Nehmen wir zweitens an, es sei

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leqq -1, \\ x & \text{für } -1 \leqq x \leqq +1, \\ +1 & \text{für } x \geqq 1. \end{cases}$$

In diesem Fall ist

$$F(x, k) = \frac{1+x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{1+x}{k}} e^{-u^2}\, du + \frac{k}{2} e^{-\left(\frac{1+x}{k}\right)^2}$$

$$- \frac{1-x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{1-x}{k}} e^{-u^2}\, du - \frac{k}{2} e^{-\left(\frac{1-x}{k}\right)^2}$$

oder

$$F(x, k) = \varphi(1+x) - \varphi(1-x)$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{k}} e^{-u^2} du + \frac{k}{2} e^{-\frac{x^2}{k^2}}.$$

Die n^{te} Derivirte $\varphi^{(n)}(x)$ ist gleich dem Product von $e^{-\frac{x^2}{k^2}}$ in eine ganze Function von x und $\frac{1}{k}$. Hat also x einen von 0 verschiedenen Werth, so convergirt $\varphi^{(n)}(x)$ bei abnehmendem k gegen 0. Dagegen ist $\varphi^{(n)}(0)$ bei geradem n gleich dem Product von $\frac{1}{k^{n-1}}$ in eine numerische Constante. Für unendlich kleine Werthe von k wird also $\varphi^{(n)}(0)$ unendlich wie $\frac{1}{k^{n-1}}$ und dasselbe gilt für

$$F^{(n)}(1, k) = \varphi^{(n)}(2) - \varphi^{(n)}(0).$$

6.

Um auch für den Fall, dass k nicht auf kleine Werthe beschränkt wird, und dass $f(x)$ Unstetigkeiten darbietet, die Beziehung zwischen den Werthen der Functionen $f(x)$ und $F(x, k)$ klar zu stellen, berechnen wir die Mittelwerthe der beiden Functionen für das Intervall $x - a,\ x + a$.

Der Mittelwerth von $f(x)$ ist

$$m(x, a) = \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{+a} f(x + \xi)\, d\xi.$$

Der Mittelwerth von $F(x, k)$ ist

$$\begin{aligned} M(x, k, a) &= \frac{1}{2a} \int\limits_{-a}^{+a} F(x + \xi, k)\, d\xi \\ &= \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}} \int\limits_{-a}^{+a} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x-\xi}{k}\right)^2} du \\ &= \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}} \int\limits_{-a}^{+a} d\xi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(u+x) e^{-\left(\frac{u-\xi}{k}\right)^2} du. \end{aligned}$$

Wir ändern die Integrationsordnung und lassen ξ an die Stelle von $u - \xi$ treten. Es ergiebt sich

$$M(x, k, a) = \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} du \int\limits_{u-a}^{u+a} f(u + x) e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi.$$

Das auf ξ bezügliche Integral wirkt, wenn $\frac{a}{k}$ sehr gross ist, wenigstens annähernd wie ein Discontinuitätsfactor. Um dies nachzuweisen, zerlegen wir zunächst die auf u bezügliche Integration in 3 Theile, indem wir zunächst von $-a$ bis $+a$, dann von a bis $+\infty$, endlich von $-\infty$ bis $-a$ integriren. Im letzten Integral vertauschen wir gleichzeitig u mit $-u$ und ξ mit $-\xi$. Es ergiebt sich

$$\text{(A)} \quad M(x, k, a) = \frac{1}{2ak\sqrt{\pi}}\Big\{\int_{-a}^{+a} du \int_{u-a}^{u+a} f(x+u) e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi$$

$$+ \int_{a}^{\infty} du \int_{u-a}^{u+a} [f(x+u) + f(x-u)] e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi\Big\}.$$

Um für die beiden Doppelintegrale Näherungswerthe zu finden, bemerken wir, dass für positive α

$$\frac{2}{k\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi < e^{-\frac{\alpha^2}{k^2}}.$$

Der Beweis dieser Behauptung beruht darauf, dass die Function

$$Q(\alpha) = e^{-\frac{\alpha^2}{k^2}} - \frac{2}{k\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi$$

für $\alpha = 0$ und $\alpha = \infty$ den Werth 0 hat und dass ihr Differentialquotient

$$Q'(\alpha) = \left(\frac{2}{k\sqrt{\pi}} - \frac{2\alpha}{k^2}\right) e^{-\frac{\alpha^2}{k^2}}$$

für $0 < \alpha < \frac{k}{\sqrt{\pi}}$ positiv und für $\alpha > \frac{k}{\sqrt{\pi}}$ negativ ist. Nehmen wir nun an, es sei $u \geq a$, so ist

$$\int_{u-a}^{u+a} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi < \int_{u-a}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} dx < \tfrac{1}{2}k\sqrt{\pi}\, e^{-\left(\frac{u-a}{k}\right)^2}.$$

Nehmen wir sodann an, es sei $0 \leqq u < a$, so ist

$$\int_{-(a-u)}^{a+u} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi - \int_{a+u}^{\infty} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi - \int_{-\infty}^{-(a-u)} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}} d\xi$$

$$> k\sqrt{\pi} - \tfrac{1}{2}k\sqrt{\pi}\left[e^{-\left(\frac{a+u}{k}\right)^2} + e^{-\left(\frac{a-u}{k}\right)^2}\right].$$

Wir können demnach, mit δ, ε positive echte Brüche bezeichnend, setzen:

$$\int\limits_{u-a}^{u+a} e^{-\frac{\xi^2}{k^2}}\,d\xi = \begin{cases} \delta\cdot\frac{1}{2}k\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\frac{u-a}{k}\right)^2} & \text{für } u \geq a, \\ k\sqrt{\pi}-\varepsilon\cdot\frac{1}{2}k\sqrt{\pi}\left[e^{-\left(\frac{a+u}{k}\right)^2}+e^{-\left(\frac{a-u}{k}\right)^2}\right] & \text{für } u < a. \end{cases}$$

Nun folgt aus (A):

$$M(x,k,a) = \frac{1}{2a}\int\limits_{-a}^{+a} f(x,u)\,du - \frac{1}{4a}\int\limits_{-a}^{+a}\varepsilon f(x+u)\left[e^{-\left(\frac{a+u}{k}\right)^2}+e^{-\left(\frac{a-u}{k}\right)^2}\right]du$$

$$+\frac{1}{4a}\int\limits_{a}^{\infty}\delta\,[f(x+u)+f(x-u)]\,e^{-\left(\frac{u-a}{k}\right)^2}\,du.$$

Das erste Integral auf der rechten Seite ist gleich $m(x, a)$. Der absolute Werth des zweiten Integrals ist kleiner als

$$\frac{G}{4a}\int\limits_{-a}^{+a}\left[e^{-\left(\frac{a+u}{k}\right)^2}+e^{-\left(\frac{a-u}{k}\right)^2}\right]du = \frac{G}{2a}\int\limits_{0}^{2a} e^{-\frac{u^2}{k^2}}\,du$$

und dies ist kleiner als

$$\frac{k}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,G}{4}.$$

Der absolute Werth des dritten Integrals ist kleiner als

$$\frac{G}{2a}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{k^2}}\,du = \frac{k}{a}\cdot\frac{\sqrt{\pi}\,G}{4}.$$

Damit ist bewiesen:

Die Differenz zwischen den Mittelwerthen $m(x, a)$ und $M(x, k, a)$ ist dem absoluten Werthe nach kleiner als

$$\frac{\sqrt{\pi}\,k}{2a}\cdot G.$$

An Stelle des Maximalwerthes G kann man aus dem im vorigen Artikel angegebenen Grund die Hälfte der Maximalschwankung von $f(x)$ einführen.

Wenn die Function $f(x)$ in der Umgebung des Punktes x stetig ist, so kann man erst die Grösse a so klein wählen, dass $m(x, a)$ beliebig wenig von $f(x)$ verschieden ist und dann k so klein wählen, dass die Grösse $\frac{\sqrt{\pi}\,k}{2a}G$ beliebig klein wird. In diesem Fall convergirt

also $F(x, k)$ bei abnehmendem k gegen $f(x)$, wie bereits am Schluss des Art. 3 bemerkt worden ist. Diejenigen Functionen $F(x, k)$, die grösseren Werthen von k entsprechen, kann man zwar nicht benützen, um die Werthe der Function $f(x)$ näherungsweise analytisch darzustellen, aber sie können zur näherungsweisen Darstellung der für hinreichend grosse Intervalle berechneten Mittelwerthe von $f(x)$ dienen. Die Functionen $F(x, k)$, die grösseren Werthen von k entsprechen, haben vor den Functionen, die kleineren Werthen von k entsprechen, den Vorzug, dass ihre Schwankungen in kleinen Intervallen geringer sind, und dass die Potenzreihen, die sie darstellen, schneller convergiren. Man wird daher, wenn man die hier erörterte Art der Darstellung practisch anwendet, den Parameter k so gross wählen, als dies mit der verlangten Genauigkeit der Darstellung verträglich ist.

7.

Die Darstellung einer stetigen Function $f(x)$ als Grenzwerth der analytischen Function $F(x, k)$ führt zu einer Darstellung von $f(x)$ durch eine unendliche Reihe, deren Glieder ganze transcendente Functionen sind.

Wir setzen voraus, die Function $f(x)$ sei gleichmässig stetig, es lasse sich also für die grösste Schwankung, welche die Function in einem Intervall von gegebener Länge darbieten kann, eine obere Grenze festsetzen und diese Grenze sinke unter jede gegebene Grösse, wenn das Intervall hinreichend klein gewählt wird.

Unter dieser Voraussetzung können wir den Parameter k so klein wählen, dass der absolute Werth der Differenz

$$\varphi_1(x) = f(x) - F(x, k)$$

für jeden Werth von x kleiner als qG wird, wo q einen beliebig zu wählenden positiven echten Bruch bedeutet.

Sodann setzen wir

$$F_1(x, k_1) = \frac{1}{k_1\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_1(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k_1}\right)^2} du$$

und wählen k_1 so klein, dass der absolute Werth der Differenz

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - F_1(x, k_1)$$

für jeden Werth von x kleiner als q^2G wird.

Hierauf setzen wir

$$F_2(x, k_2) = \frac{1}{k_2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_2(u)\, e^{-\left(\frac{u-x}{k_2}\right)^2} du$$

und wählen k_2 so klein, dass der absolute Werth der Differenz

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x) - F_2(x.\,k_2)$$

für jeden Werth von x kleiner als $q^3 G$ wird u. s. w.

In dieser Weise fortfahrend erhält man für $f(x)$ die Darstellung

$$f(x) = F(x, k) + F_1(x, k_1) + F_2(x, k_2) + \cdots$$

Es ist klar, dass diese Reihe für jeden Werth von x convergirt. Denn die Summe der n ersten Glieder ist $f(x) - \varphi_n(x)$ und der absolute Werth von $\varphi_n(x)$ ist kleiner als $q^n G$.

Um die charakteristische Bauart dieser Reihe besser hervortreten zu lassen, führen wir eine neue Bezeichnung ein.

Es sei γ_ν das Maximum des absoluten Werthes der Function $F_\nu(x, k_\nu)$, so dass $\gamma_\nu < q^\nu G$ ist. Wir setzen nun

$$\Phi_\nu(x) = \frac{1}{\gamma_\nu} F_\nu(k_\nu x, k_\nu).$$

Die $f(x)$ darstellende Reihe erhält nunmehr die Form

$$f(x) = \gamma\, \Phi\left(\frac{x}{k}\right) + \gamma_1 \Phi_1\left(\frac{x}{k_1}\right) + \gamma_2 \Phi_2\left(\frac{x}{k_2}\right) + \cdots$$

Hiezu ist zu bemerken:

1) Die Reihe $\gamma + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots$ deren Glieder sämmtlich positiv sind, convergirt.

2) Das Maximum des absoluten Werthes einer jeden Function $\Phi_\nu(x)$ ist gleich 1.

3) Die Function $\Phi_\nu(x)$ lässt sich ebenso wie die Function $F_\nu(x, k_\nu)$ in eine Reihe entwickeln, die für jeden Werth von x convergirt. Während aber der Coefficient von x^n in der Reihe für $F_\nu(x, k_\nu)$ bis zur Grössenordnung $\frac{1}{k_\nu^n}$ ansteigen kann, bleibt der entsprechende Coefficient in der Reihe für $\Phi_\nu(x)$ unter einer festen von k_ν unabhängigen Grenze (vergl. Art. 4).

Dass Reihen von dieser Bauart geeignet sind Functionen, die stetig aber nicht differentiirbar sind, darzustellen, ist längst bekannt: die bekannte von H. Weierstrass angegebene Function

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b^\nu \cos(a^\nu x \pi)$$

ist nach diesem Princip construirt. Es ist bemerkenswerth, dass sich *alle* derartigen Functionen in dieser Form darstellen lassen.

8.

Die näherungsweise Darstellung der Durchschnittswerthe einer gegebenen Function durch eine analytische Function ist auch dann

anwendbar, wenn die vorgelegte Function nur für discrete Werthe der Variabeln definirt ist.

Um uns auf den einfachsten Fall zu beschränken, nehmen wir an, die Function $f(x)$ sei nur für ganzzahlige Werthe von x definirt. Wir definiren dann eine Function $\varphi(x)$ für alle Werthe von x, indem wir, unter n eine ganze Zahl verstehend, setzen

$$\varphi(x) = f(n) \quad \text{für} \quad n - \tfrac{1}{2} < x \leqq n + \tfrac{1}{2}.$$

Für ganzzahlige Werthe von x ist

$$f(x) = \int\limits_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}} \varphi(\xi)\, d\xi$$

und wenn a ebenfalls eine ganze Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{f(x)+f(x+1)+f(x+2)+\cdots+f(x+a)+f(x-1)+f(x-2)+\cdots+f(x-a)}{2a+1}$$

$$= \frac{1}{2a+1} \sum_{\nu=-a}^{+a} \int\limits_{x+\nu-\frac{1}{2}}^{x+\nu+\frac{1}{2}} \varphi(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2a+1} \int\limits_{x-a-\frac{1}{2}}^{x+a+\frac{1}{2}} \varphi(\xi)\, d\xi.$$

Das arithmetische Mittel aus den $2a+1$ Functionswerthen

$$f(x-a) \; f(x-a+1) \cdots f(x+a-1) \; f(x+a)$$

stimmt also mit dem für das Intervall

$$x - a - \tfrac{1}{2}, \quad x + a + \tfrac{1}{2}$$

berechneten Mittelwerth der Function $\varphi(x)$ überein. Die Aufgabe, die Mittelwerthe von $f(x)$ analytisch darzustellen, ist damit auf die im Vorhergehenden behandelte Aufgabe, die Mittelwerthe von $\varphi(x)$ analytisch darzustellen, zurückgeführt.

Strassburg im Juli 1895.

Anzahl der Zerlegungen einer ganzen, rationalen Zahl in Summanden, II.

Von

J. Hermes in Lingen.

In der früheren Arbeit über die Anzahl G der Zerlegungen der Zahl m zu je k mit dem niedrigsten Summanden ϱ ist

$$G(m, k, \varrho) = G\left(m - k(\varrho - 1), k, 1\right)$$

als *Binomialcoefficient*

$$\binom{m - k(\varrho - 1) + k - 1 - k\cdot 1}{k - 1} = \binom{m + k - 1 - k\varrho}{k - 1},$$

und demnach

$$G(m, k, 1) = \binom{m - 1}{k - 1}$$

mit Rücksicht auf permutirte Zerlegungen ermittelt worden*). Die Euler'schen Anzahlen E**) dagegen beziehen sich auf Zerlegungen ohne Permutation der Summanden.

Dies legt die Frage nach dem Zusammenhange von E und G nahe und nach einem *independenten* Bildungsgesetze der Zahlen E. Zugleich bietet sich eine *Verallgemeinerung der Euler'schen Tafel* dar.

Beginnen wir mit der letzteren, um eine Entwickelung aus der Definition zu erhalten, die uns auch auf die den E beigeordneten Zahlen A führen wird.

Jedem Raumpunkte mit ganzzahligen, rationalen Coordinaten s, t, n werde eine ebenfalls ganze rationale Zahl $\underset{s,t}{E}(n)$ zuertheilt, die für Argumente kleiner als Null verschwinden, für $n = 0$ *ausnahmelos* den Werth 1, sonst für positives n und $s = t = 0$ den Werth Null haben soll und neben

$$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{t,s}{E}(n)$$

---

*) Math. Annalen Bd. 45.

**) Vgl. das frühere Citat und Bachmann's Zahlenlehre, Abschnitt 2.

durch

$$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{s,t}{E}(n-t) + \underset{s,t-1}{E}(n)$$

definirt sei.

Anm. Für $t = 0$ werden die E, wie eine leichte Ueberlegung zeigt*), die Zahlen der Euler'schen Tafel; $\underset{s,0}{E}(n)$ giebt an, wie oft sich die Zahl $m = n + s$ in s ganze positive Summanden zerlegen lässt. Wir stellen einige naheliegenden Folgerungen aus der Definition zusammen.

Zunächst ergiebt sich aus derselben und daraus, dass E für Argumente < 0 verschwinden soll, dass für $n < t$

$$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{s,t-1}{E}(n) = \underset{s,t-2}{E}(n) = \cdots = \underset{s,n}{E}(n)$$

ist, und falls man auch noch $n < s$ voraussetzt, wird:

(1) $$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{n,n}{E}(n).$$

Daher befinden sich in jeder Raumschicht (s, t) abgesehen von einem immer breiter und breiter werdenden Rande lauter einander gleiche Zahlen, (*Permanenzzahlen* im weiteren Sinne).

Für $n > s$ ist

(2) $$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{s,t}{E}(n-s) + \underset{s-1,t}{E}(n) = \underset{s,t}{E}(n-s) + \underset{s-1,t}{E}(n-s+1) + \underset{s-2,t}{E}(n)$$
$$= \cdots = \sum_{h=0}^{h=s} \underset{s-h,t}{E}(n-s+h).$$

Dies geht für $t = 0$ in:

(3) $$\underset{s,0}{E}(n) = \underset{0,0}{E}(n) + \underset{1,0}{E}(n-1) + \underset{2,0}{E}(n-2) + \cdots + \underset{s,0}{E}(n-s),$$

und für $n = s$ und $t = 0$ in:

(3') $$\underset{s,0}{E}(s) = \underset{s,0}{E}(0) + \underset{s-1,0}{E}(1) + \underset{s-2,0}{E}(2) + \cdots = \sum_{h=0}^{h=s} \underset{h,0}{E}(s-h)$$

über, was die bekannten Sätze liefert:

„Die Zahl $n + s$ lässt sich ebenso oft zu je s als n zu je 1 und zu je 2 ... und zu je s zerlegen"

und

„Die Zahl $2s$ kann ebenso oft in s Summanden zerlegt werden, als sich s überhaupt als Summe ganzer, (pos.) Zahlen darstellen lässt"

Ferner wird (2) für $n < s$ mit Beziehung auf (1) zu

(4) $$\underset{s,t}{E}(n) = \underset{n,t}{E}(n) = \underset{0,0}{E}(0) + \underset{1,1}{E}(1) + \cdots + \underset{h,h}{E}(h) + \underset{n-h-1,t}{E}(n),$$

worin $h < t$ und $n - h \geqq h$ sein muss; z. B.

$$\underset{6,4}{E}(6) = 1 + 2 + 5 + 10 + \underset{2,4}{E}(6) = 62,$$

*) Man sondere die $\underset{s,0}{E}(n-s)$ eins-freien von den übrigen $\underset{s-1,0}{E}n$ Zerlegungen ab.

was als Reduction auf Permanenzzahlen und ein E niederer Ordnung anzusehen ist.

Setzt man in (2) $t = h$ und $n = s + h$, so wird:

$$
\begin{aligned}
\underset{s,t}{E}(n) &= \underset{s,h}{E}(h) + \underset{s-1,h}{E}(h+1) + \underset{s-2,h}{E}(h+2) + \cdots + \underset{0,h}{E}(n) \\
(5) \qquad &= \underset{s,h}{E}(0) + \underset{s-2,h}{E}(2) + \cdots \\
&\quad + \underset{s,h-1}{E}(h) + \underset{s-1,h}{E}(h+1) + \underset{s-2,h-1}{E}(h+2) + \underset{s-3,h}{E}(h+3) + \cdots,
\end{aligned}
$$

was auch noch weiter zerlegt werden könnte.

Durch Summation von

$$
\begin{aligned}
\underset{s,t}{E}(x) &= \underset{s,t}{E}(x-s) + \underset{s-1,t}{E}(x), \\
\underset{s,t}{E}(x-s) &= \underset{s,t}{E}(x-2s) + \underset{s-1,t}{E}(x-s), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\underset{s,t}{E}\big(x-(\partial-1)s\big) &= \underset{s,t}{E}(x-\partial s) + \underset{s-1,t}{E}\big(x-(\partial-1)s\big)
\end{aligned}
$$

erhält man den *Summationssatz:*

$$
(6) \qquad \sum_{k=0}^{k=\partial-1} \underset{s-1,t}{E}(x-ks) = \underset{s,t}{E}(x) - \underset{s,t}{E}(x-\partial s)
$$

in Worten: „*Eine Summe von Euler'schen Zahlen der Ordnung* $(s-1)$, *bei denen das Argument in Intervallen von der Grösse s fortschreitet, ist gleich der Differenz zweier E der Ordnung s an den Grenzen x und* $x_1 = x - \partial s$ *genommen*"*).

---

*) Hieraus folgt mittels leichter Schlüsse, dass sich die $\underset{s,0}{E}(n)$ durch Summation einer *schief angeordneten*, in's Unendliche gehenden, *figurirten* Zahl $(s-1)^{\text{ter}}$ Ordnung bis zur n^{ten} Zeile hin, ergeben müssen:

$$
\text{z. B. } \underset{3,0}{E}(n) \text{ aus: }
\left|
\begin{array}{cccccl}
1 & & & & \cdots & 1 = \underset{3,0}{E}(0) \\
 & & & & \cdots & 1 \\
1 & & & & \cdots & 2 \\
 & 1 & & & \cdots & 3 \\
1 & & & & \cdots & 4 \\
 & 1 & & & \cdots & 5 \\
1 & & 1 & & \cdots & 7 \\
 & 1 & & & \cdots & 8 \\
1 & & 1 & & \cdots & 10 \\
 & 1 & & 1 & \cdots & 12 = \underset{3,0}{E}(9)
\end{array}
\right.
\quad \text{etc.}
$$

Umgekehrt ist auch ein $\underset{0,\sigma}{E}(\nu)$ niederer Ordnung durch eine Summe (mit abwechselnden Zeichen) von $E(2\nu)$ höherer Ordnung $2\sigma-h, h$ darstellbar, doch können sich letztere Summen auch annulliren.

Das ist der Fall, wenn die Gliederanzahl gerade, (*s also ungerade*) ist. So wird, wie unmittelbar evident:

$$\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}(n)=0, \quad \text{falls} \quad s=2\sigma+1. \tag{7}$$

Aber auch bei geradem $s=2\sigma$ ist für ungerades $n=2\nu+1$ ebenfalls

$$\sum_{h=0}^{h=2\sigma}(-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\nu+1)=0, \tag{8}$$

was sich wie Satz (9) beweisen lässt und hier übergangen werden mag.

Sind $s=2\sigma$ und $n=2\nu$ *beide gerade*, so reducirt sich:

$$\sum_{h=0}^{h=2\sigma}(-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\nu) \tag{9}$$

auf die Euler'sche Zahl $\underset{\sigma,0}{E}(\nu)$ mit halb so grossem Argumente. Ebenso ist:

$$\sum_{h=0}^{h=2\sigma}(-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\nu-h)=\underset{\sigma,0}{E}(\nu) \tag{10}$$

und

$$\sum_{h=0}^{h=2\sigma-1}(-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\nu-h)=\sum_{h=0}^{h=2(\sigma-1)}(-1)^h \underset{2(\sigma-1)-h,h}{E}(2\nu-h)=\underset{\sigma-1,0}{E}(\nu). \tag{11}$$

B e w e i s zu Satz (9), (10) und (11).

Ist $\nu>\sigma$, so möge der Bernoulli'sche Schluss angewendet werden, indem für kleinere ν und σ die Sätze schon als giltig angenommen, dann aber noch im Anfange zu verificiren sind, vgl. (12) und (13).

Durch Zerlegung der einzelnen Glieder nach der Definition geht die linke Seite von (9) in die linke Seite von (10) über, indem die noch daneben auftretende Summe wegen gerader Gliederzahl nach (7) fortfällt. Die linke Seite von (10) geht aber durch Zerlegung jedes Gliedes in die linke Seite von (11) über, vermehrt um eine Summe, die nach (9) für kleineres Argument $\underset{\sigma,0}{E}(\nu-\sigma)$ ist, also im Ganzen in:

$$\underset{\sigma-1,0}{E}(\nu)+\underset{\sigma,0}{E}(\nu-\sigma)=\underset{\sigma,0}{E}(\nu).$$

Für $\nu - \varkappa\sigma \gtreqless \varrho$ verliert jedoch diese Schlussweise ihre Gültigkeit. Es ist also noch der Satz für $\nu \gtreqless \sigma$ nachzuweisen, wobei wieder der Schluss von n auf $n+1$ angewandt wird, indem (12) und (13) für kleinere Argumente bereits gelten mögen.

$$(12) \qquad \nu = \sigma; \quad \sum_0^{2\sigma} (-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\sigma) = \underset{\sigma,0}{E}(\sigma),$$

$$(13) \qquad \nu < \sigma; \quad \sum_0^{2\sigma} (-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\nu) = \underset{\sigma,0}{E}(\nu).$$

Beweis zu (12). Indem man auf jedes Glied der Summe $\sum\limits_0^{2\sigma}$ den Satz (5) anwendet und die dort tiefgestellten Glieder gegen entsprechende für das um 1 kleinere h jedesmal forthebt, wird:

$$\sum_0^{2\sigma} (-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2\sigma) = \sum_0^{2\sigma} (-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(0) + \sum_0^{2\sigma-2} (-1)^h \underset{2\sigma-h,h}{E}(2) + \cdots$$

$$= \underset{\sigma,0}{E}(0) + \underset{\sigma-1,0}{E}(1) + \cdots$$

nach (13) und dies

$$= \underset{\sigma,0}{E}(\sigma)$$

nach (3').

Beweis zu (13). Man stelle jedes Glied der $\sum\limits_0^{2\sigma}$ nach (4) dar, dann heben sich alle $\pm \underset{h,h}{E}(h)$ gegen einander fort und es bleibt nur für $(\sigma - \nu = \tau)$:

$$\sum_0^{2\tau} (-1)^h \underset{2\tau-h,h}{E}(2\nu),$$

was nach (12)

$$= \underset{\tau,0}{E}(\nu) = \underset{\sigma,0}{E}(\nu)$$

ist, da

$$\nu < \sigma.$$

Hiermit können nun die folgenden Sätze (14)—(18) bewiesen werden, von denen Satz (14) das Eigenthümliche aufweist, dass eine Summe für endliches $n > s(x-1)$ *unabhängig* von n und x wird, obgleich x eine beliebige Zahl (ganz u. rat.) *auch Null* sein kann. Der Grund dieses Verhaltens ist in letzter Linie darin zu suchen, das $E(0)$ ausnahmelos gleich 1 und für negatives Argument verschwinden sollte.

Es wird:

$$\sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n - \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2} - hx\right) = 0 \tag{14}$$

$$\text{für } n > s(x-1)$$

und

$$\sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right) = \underset{s,x}{A}(n) \tag{15}$$

$$= \sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(s(x-1) - n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right).$$

Diesen Satz wollen wir als *Symmetriesatz**) bezeichnen. Durch ihn sind die $\underset{s,x}{A}(n)$ bestimmt. Z. B. $\underset{2,3}{A}$ $(n=0$ bis $n=4)$ wird 1, 1, 2, 1, 1 $\underset{s,x}{A}(n)$ giebt die Anzahl der Zerlegungen an von m**) $= n + x - 1$ zu je $x-1$ Summanden aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots s+1$.

Wird nämlich $\underset{s-h,h}{E}$ zerlegt, wie es die Definition erfordert, so sieht man, dass

$$\underset{s,x}{A}(n) = \underset{s-1,x}{A}(n) + \underset{s,x-1}{A}(n-s)$$

ist, was auch als Definition für die $\underset{s,x}{A}$ gebraucht werden kann.

Ist nun Z eine der Zerlegungen von m, die keinen höheren Summanden als $s+1$ haben, so schliesst sie *entweder* auf $s+1$, falls die Summanden nach der Grösse geordnet sind; dann kann sie als entstanden angesehen werden aus einer der Zerlegungen, die $m-s-1$ zu je $(x-2)$ hat, da ja

$$m - s - 1 = n - s + x - 2$$

ist, *oder* sie ist eine der übrigen auf $s_1 \overline{\overline{<}} s$ schliessenden Zerlegungen, deren Zahl eben $\underset{s-1,x}{A}(n)$ ist. Mithin sind im Ganzen $\underset{s,x}{A}(n)$ Zerlegungen.

Mit den $\underset{s,x}{A}(n)$ in Beziehung stehen die abwechselnd aus nur positiven oder nur negativen Zahlen $\underset{s,x}{D}(\nu)$***) bestehenden, sich auch

---

*) Vgl. J. C. V. Hoffmann's Zeitschrift Jahrg. XXVI (1895) Aufg.-Rep. S. 349. Nr. 1419—1420.

**) Z. B. $m = 16$ zu je 6 aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 hat

$$\underset{4,7}{A}(16 - 7 + 1) = \underset{4,7}{A}(10) = 16 \text{ Zerlegungen.}$$

***) Wird $\nu = N \mp \varrho$ gesetzt, $N = \frac{x(x-1)}{2} + 3s(s+x-1)$ und $\varrho = \frac{xs}{2} - \mu$, so wird $\underset{s,x}{D}(\nu) = (-1)^s\left(\underset{x-1,s+1}{A}(\mu - s) + \underset{x-1,s}{A}(\mu)\right)$. Der Beweis beruht auf der Identität:

$$(-1)^s \underset{s,x}{D}(\nu) = \underset{x,s+1}{A}(\mu) - \underset{x,s-1}{A}(\mu - x) = \underset{x-2,s+1}{A}(\mu) + \underset{x-2,s}{A}(\mu+s) + \underset{x-1,s}{A}(\mu - x + 1)$$
$$+ \underset{x-1,s+1}{A}(\mu - x + 1 - s) - \left(\underset{x-2,s}{A}(\mu + s) + \underset{x-2,s+1}{A}(\mu - x - 2s + 1)\right).$$

für $x \gtreqless 4$ theilweise überdeckenden *symmetrischen Zahlenfolgen* in der Reihe der Werthe $\underset{x}{C}\left(n + \frac{x(x-1)}{1.2}\right)$, welche die Summe

$$(15') \quad \sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^h \underset{h,0}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right) = \sum_{h=0,\ \text{resp.}\ 1}^{h=\infty} (-1)^h \underset{x-1,0}{E}\left(n - \frac{h}{2}(3h \mp 1)\right)$$

annimmt, wenn n von 0 bis ∞ die natürlichen Zahlen durchläuft und worin $\underset{x+1}{C}(\nu) = \underset{x+1}{C}(\nu - x) + \underset{x}{C}(\nu - x)$;

$$\underset{x}{C}\left(\frac{x(x-1)}{1.2}\right) = +1 \quad \text{und} \quad \underset{x}{C}(\nu) = \sum_{s} \underset{s,x}{D}(\nu)$$

ist. Der Beweis von (15') kann nach Obigem folgendermassen geführt werden: Durch Zerlegung von

$$(-1)^h \underset{h,0}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right)$$

in

$$(-1)^h \underset{h,0}{E}\left(n - h\left(x + 1 + \frac{h-1}{2}\right)\right) + (-1)^h \underset{h-1,0}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right)$$

und Umformung des letzteren Gliedes in

$$-(-1)^{(h-1)} \underset{(h-1),0}{E}\left(n - x - (h-1)\left(x + 1 + \frac{h-2}{2}\right)\right)$$

kann man successive den allgemeinen Fall (nicht $x = 0$) *), *auch* den Fall $x = 1$ {der, so scheint es, ohne diese Zurückführung nur auf analytischem Wege erledigt werden konnte,} *auf den Fall* $x = 2$ reduciren, der nun zu beweisen wäre.

Benutzt man jetzt die Note pag. 283 und stellt die verlangte Summe von positiven und negativen Gliedern, also:

$$\sum_{h=0}^{h=\infty} (-1)^h E\left(n - \frac{h(h+3)}{1.2}\right)$$

das ist:

$$\underset{0,0}{E}(n) - \underset{1,0}{E}(n-2) + \underset{2,0}{E}(n-5) - \underset{3,0}{E}(n-9) + \cdots$$

für $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$ in *schief-figurirten* Zahlen auf, {statt -1 und $+1$ möge der Kürze halber $-$ und $+$ stehn,} nämlich:

---

*) Für $x = 0$ sind alle $\underset{0}{C} = 0$, siehe Formel (19').

$n = 0$	(+) [nur einmal zu denken und nicht mitzusummiren]
$n = 1$	.
$n = 2$	− (I)
$n = 3$	.
$n = 4$	.
$n = 5$	+ (II)
$n = 6$	⋮ .
	+ .
	⋮ .
$n = 9$	+ − (III)
	. ⋮ .
	. + −
	. −
	. + −
$n = 14$	+ IV −
	etc. −
	Rand

so heben sich die Zeichen der II$^{\text{ten}}$ Ordnung, bis auf die zwei ersten, gegen die erste Colonne der III$^{\text{ten}}$ (denn $5 + 2 + \lambda = 9$; $\lambda = 2$) und die übrigen der III$^{\text{ten}}$, bis auf einen Rand II$^{\text{ter}}$ Ordnung, gegen die erste Unterabtheilung der IV$^{\text{ten}}$ fort, (denn $9 + 3 + \lambda = 14$;) u. s. w. $\left(\text{denn } \frac{h(h+3)}{1.2} + h\,(\lambda - 1) + \lambda = \frac{(h+1)\,(h+1+3)}{1.2} + (h+1)\,(\lambda - 2)\right)\cdots$, *dann* aber wiederholt sich in Bezug auf die noch stehen gebliebenen Ränder (um 1 niederer Ordnung) derselbe Process $\{\lambda = 3\}$ *und so fort*, $\lambda = 4, 5 \ldots$ und es bleiben schliesslich von jeder Ordnung nur zwei Zeichen stehen, nämlich

von II in Zeile $n = 5$ und $n_1 = 5 + 2 = 7$ zwei +,
von III in Zeile $n = 9 + 1 \cdot 3 = 12$ und $n_1 = 12 + 3 = 15$ zwei −,
von IV in Zeile $n = 14 + 2 \cdot 4 = 22$ und $n_1 = 26$ zwei +,

$$\cdots \text{ in } h \text{ für } n = \frac{h(h+3)}{1.2} + (h-2)h = \frac{3h^2 \pm h}{2} \text{ zwei } (-1)^h \cdot$$

Nach dem Wegheben ist nun (vgl. Note pag. 283) bis zur $1, 2, 3 \ldots n^{\text{ten}}$ Zeile nacheinander zu addiren, dann ergeben sich die $\underset{2}{C}$ (resp. $\underset{\tau,2}{D}$) als:

$$1,\ 0,\ -1,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0 \ldots$$

d. i. nach h Nullen $2h + 1$ positive oder negative Einheiten $(-1)^\tau$, je nachdem h gerade oder ungerade, und dies ist das behauptete Gesetz für den Fall $x = 2$.

Hieraus folgt dann auch für $x = 1$ *speciell* die Zahlenreihe $\underset{1}{C}(\nu)$ als:

$$1,\ -1,\ -1,\ 0\,0,\ 1\,0\,1,\ 0\,0\,0\,0\ -1,\ 0\,0\ -1,\cdots$$

durch Zerlegung der

$$\underset{h,0}{E}\left(n - \frac{h(h+1)}{2}\right)$$

nach der Definition, das ist, wenn man die Bedeutung der $\underset{h,0}{E}$ berücksichtigt, der bekannte Euler'sche Satz*) *über die Pentagonalzahl:* $\frac{3h^2 \pm h}{2} = \omega$;

$$\prod_{s=1}^{s=\infty} (1 - q^s) = 1 - q^1 - q^2 - q^5 + q^7 - q^{12} - q^{15} + \cdots \pm q^{\omega} \cdots$$

Bei beliebigem $x = x$ ist nun die erwähnte Beziehung zwischen den $\underset{x}{C}$ (resp. $D(\nu)$) und den $A(n)$ die, dass die betreffenden Zahlenfolgen der $\pm E(\nu)$ und $+ A(n)$, beide symmetrisch, dieselben Aufangs- und Endglieder haben, in der Mitte aber von einander abweichen, indem die Zahlenfolge der $\pm D(\nu)$ für ein bestimmtes x mehr Glieder hat, als die Zahlenfolge der zugeordneten $A(n)$, worauf wir jedoch hier nicht näher einzugehen brauchen.

Andere Eigenschaften der Zahlen $\underset{s,x}{A}(n)$ sind folgende: Addiren wir die Zahlenfolge der $\underset{s,x}{A}(n)$ aus dem Symmetriesatze, z. B.

$$1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 6 = \binom{3}{2},$$

so ergiebt sich ein *Binomialcoefficient.* Dies kann aus der successiven Entstehung der Zahlenfolgen leicht hergeleitet werden.

---

*) Vgl Bachmann: Zahlenlehre, 2. Abschnitt, pag. 24, 25 und Citat daselbst. Bei Euler bedeutet bekanntlich:

$$f(m, h, s) = \left[\left[\prod_1^s (1 + q^s z)\right]_{z^h}\right]_{q^m}$$

die Anzahl der Zerlegungen von m zu je h der Zahlen $1, 2, 3 \ldots s$ ohne Wiederholungen und

$$\varphi(m, h, s) = \left[\left[\prod_1^s \left(\frac{1}{1 - q^s z}\right)\right]_{z^h}\right]_{q^m}$$

die Anzahl der Zerlegungen von m zu je h der Zahlen $1, 2, 3 \ldots s$ mit Wiederholungen, woraus sich dann auf *analytischem* Wege die Sätze über die Zerlegungen der Zahlen ergeben.

Mithin hat man die Formel:

$$(16)\quad \sum_{n=0}^{n=\infty}\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-\frac{h(h-1)}{1.1}-hx\right)=\binom{x+s-1}{s}$$
$$=\binom{s+x-1}{x-1}\text{*)},$$

dagegen:

$$(17)\quad \sum_{n+x-1=m;}\ \sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(x+\frac{h-1}{2}\right)\right)=\underset{s+1,0}{E}m.$$

Aus (17) ersieht man, dass die Anzahl aller Zerlegungen von m aus den Summanden $1, 2, 3 \ldots s+1$ gleich der Anzahl der Zerlegungen einer Zahl m zu je 1 und zu je 2 und ... zu je $(s+1)$ ist, denn $\underset{s+1,0}{E}(m)$ ist nach (2)

$$=\underset{0,0}{E}(m)+\underset{1,0}{E}(m-1)+\underset{2,0}{E}(m-2)+\cdots+\underset{s+1,0}{E}(m-s-1).$$

Endlich kann man noch einen, vom Vorhergehenden unabhängigen Weg angeben, um zu den $\underset{s,x}{A}(n)$ zu gelangen.

Will man eine Zahl M {zuerst als Summe von M Einheiten gedacht,} in $M-k$ Summanden zerlegen, indem $M-k-s$ Summanden aus einzelnen Einheiten, s Summanden aus $\mathfrak{a}$ gleichen $\alpha(>1)$, $\mathfrak{b}$ gleichen $\beta\,(>1), \ldots$ bestehen, wobei $\mathfrak{a}\alpha+\mathfrak{b}\beta+\cdots=k+s$ sein muss, so kann die Frage nach der Anzahl der Zerlegungen von s unter einer solchen *Nebenbedingung*, mit Hülfe der E und A beantworden werden.

Denkt man sich nämlich eine Tafel, die in Quadrate zu je k^2 Felder abgetheilt ist, der Art construirt, dass man das ganze vorhergehende Quadrat k^2 in die linke untere Ecke des folgenden $(k+1)^2$ mit um 1 erhöhter Endziffer überträgt, dann aber noch

Zeile 1 aus dem Quadrate k^2,
Zeile 2 aus dem Quadrate $(k-1)^2$
. . . .

*) Euler hat die Formel:

$$\underset{3,0}{E}(n)+2\underset{3,0}{E}(n-1)+2\underset{3,0}{E}(n-2)+\underset{3,0}{E}(n-3)=\binom{n+2}{2}.$$

Die *Verallgemeinerung* derselben wird:

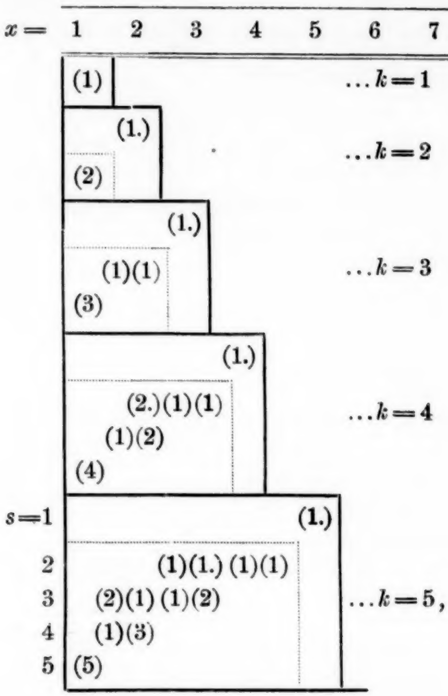
$$(16')\quad \sum_{h=0}^{h=k} c_{h,k}\,\underset{h,0}{E}(n-h)=\binom{n+k-1}{k-1},$$

worin die Coefficienten c durch

$$\sum_{i=0}^{i=k-1}\underset{h-i,k}{c}=\underset{h,k+1}{c}$$

bestimmt sind.

mit einem Punkte (Null)*) versehen in *dieselbe* Zeile, aber um eine Colonne weiter nach rechts gerückt, zufügt, also:



Beispiel:

$k = 5$; $s = 3$; $x = 2$,

(2)(1) bedeutet;

$(2)(x+1)+(1)y=k+s$

$2.3+1.2=8$

so enthält die s^{te} Zeile jedes Quadrates lauter Felder, welche die Zerlegungen von

$$s = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = (\mathfrak{a})(\mathfrak{b}) \ldots ^{**})$$

anfangs in defecter, später in abundirender Zahl angeben.

---

*) Der Punkt wird demnach bei der Erhöhung zur 1.

**) Die Bezeichnung in ( ) statt der Pluszeichen ist, wie sich im Folgenden zeigt, *symbolisch*; enthält das Feld (s, x) die Complexionen:

$$\boxed{\begin{array}{l} (\mathfrak{a})(\mathfrak{b})\ldots \\ (\mathfrak{c})(\mathfrak{d})\ldots \end{array}},$$

so gelten

$$\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \cdots = \mathfrak{c}\alpha + \mathfrak{d}\delta + \cdots = k + s;$$

Ist $\alpha > \beta > \cdots > 1$, so ist $\alpha = x + 1$.

Die *Anzahl* dieser Zerlegungen (Complexionen) wird für das Feld (s, x) des Quadrates k^2, nach der für die Zahlen A gegebenen Definition $= \underset{s-1,x}{A}\big(k+1-(s+x)\big)$. Die Summe der Anzahlen in einer Zeile ist $\underset{s,0}{E}(k-s)$ und die Anzahl aller Zerlegungen im Quadrate k^2 giebt die Permanenzzahl $\underset{k,0}{E}(k)$ im engeren Sinne, mithin:

$$(18)\quad \sum_{s+m=k-1;} \sum_{n+x-1=m;} \sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(x+\frac{h-1}{2}\right)\right) = \underset{k,0}{E}(k).$$

Der Bau jedes Quadrates ist insofern *symmetrisch*, als die Anzahlen in den Feldern der s^{ten} Zeile mit denen in der x^{ten} Colonne für $x=s$ übereinstimmen. Es muss daher auch

$$\underset{x-1,s}{A}\big(k+1-(s+x)\big) = \underset{s-1,x}{A}\big(k+1-(s+x)\big)$$

sein, so viel wie

$$\underset{s,x}{A}(n) = \underset{x-1,s+1}{A}(n)$$

d. i. „die Anzahl der Zerlegungen von $m=n+x-1$ zu je $x-1$ aus den Zahlen $1, 2, \ldots (s+1)$ ist gleich der Anzahl der Zerlegungen von $n+s$ zu je s aus den Zahlen $1, 2, \ldots x$.

Nach diesen Bemerkungen über die Zahlen $\underset{s,x}{A}(n)$ geben wir die Beweise für die Sätze (14) und (17).

Beweis*) zu (14). Weil für ein um 1 kleineres x, das y heissen mag, nach der Definition die Gleichung:

*) Es ist wohl anzunehmen, dass sich dieser Beweis auch auf analytischem Wege führen lassen möchte. Denn umgekehrt, können einige in Bachmann's Zahlenlehre 2ter Abschnitt, angeführten Sätze mit Hülfe obiger Formeln und durch unmittelbare dem Gebiete selbst angehörende Gründe dargethan werden, so Satz pag. 24; 25 daselbst wie wir sahen; ferner die Sätze pag. 21. Es sei

$$\alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varepsilon$$

eine der f Darstellungen von m aus h verschiedenen Summanden und

$$\alpha<\beta<\gamma<\cdots<\varepsilon,$$

so ist

$$(\alpha-1)+(\beta-2)+(\gamma-3)+\cdots+(\varepsilon-h)$$

die entsprechende der φ Darstellungen von $m-\frac{h(h+1)}{1\cdot 2}$ zu je 1 und zu je 2... und zu je h (denn es können auch eine oder mehrere der Differenzen = Null, aber nicht *negativ* werden) und, da die Entsprechung eine eindeutige ist, muss $f=\varphi$ sein und nach (17) auch $=\psi$, wenn ψ die Anzahl der Darstellungen von $m-\frac{h(h+1)}{1\cdot 2}$ aus Summanden $1, 2 \ldots h$. Ferner: „eine Zahl m lässt sich ebenso oft aus h verschiedenen Summanden zusammensetzen, wie die Zahl $m-\frac{h(h-1)}{1.2}$ aus gleichen oder verschiedenen zu je h“, denn es sei wiederum

$$\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(y+\frac{h-1}{2}\right)\right)$$

$$=\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(y+1+\frac{h-1}{2}\right)\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{k=s-1}(-1)^{k+1} \underset{s-k-1,k}{E}\left(n-(k+1)\left(y+\frac{k}{2}\right)\right)$$

gilt, so kann durch Hinüberschaffen der Σ_k auf die andere Seite, die linke Seite von (14), nämlich:

$$\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(x+\frac{h-1}{2}\right)\right)$$

als

$$\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(y+\frac{h-1}{2}\right)\right)$$

$$+\sum_{k=0}^{k=s-1}(-1)^k \underset{(s-1)-k,k}{E}\left(n-y-k\left((y+1)+\frac{k-1}{2}\right)\right)$$

für $x=y+1$ aufgefasst werden.

Gilt also der Satz (14) bereits für $s-1$, so haben wir die Bedingung $n-y>(s-1)(x-1)$ für das Verschwinden der Summe Σ_k.

Die Summe:

$$\sum_{h=0}^{h=s}(-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n-h\left(y+\frac{h-1}{2}\right)\right)$$

ist $=0$ für $n>s(y-1)$, während sich aus der vorhergehenden

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots+\varepsilon$$

eine der f Darstellungen von m zu je h, wo

$$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\cdots<\varepsilon$$

sei, so ist

$$(\alpha-0)+(\beta-1)+(\gamma-2)+(\delta-3)+\cdots+(\varepsilon-(h-1))$$

die entsprechende der φ_1 Darstellungen von $m-\frac{h(h-1)}{1\cdot 2}$ zu je h. Die Entsprechung ist eindeutig, also ist $f=\varphi_1$; Der Satz kann auf diesem Wege verallgemeinert werden. „Eine Zahl $m\equiv \varrho h \bmod \delta$ (also einer arithmetischen Reihe mit der Differenz δ angehörend), lässt sich ebenso oft aus h stets von einander verschiedenen positiven Zahlen der Linearform $\varrho+\delta x$ darstellen, als die Zahl $m-h(\varrho-1)-\frac{h(h-1)\delta}{1\cdot 2}$ aus h Zahlen der Form $1+\delta x$ überhaupt und auch ebenso oft als die Zahl $1+\frac{m-\varrho h}{\delta}-\frac{(h-1)(h-2)}{1\cdot 2}$ aus je h der natürlichen Zahlenreihe." Analog kann auch Satz (8) bewiesen werden, indem die Zerlegungen $\alpha,\beta,\ldots 0,0\ldots$ und $1+\alpha$, $1+\beta,\ldots 1,1$ sich eindeutig entsprechen, etc.

Bedingung $n > y + (s-1)(x-1)$ das ist $n > s(x-1)$ ergiebt. Da nun $s(x-1) > s(y-1)$, so wird für $n > s(x-1)$ schliesslich auch

$$\sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,\,h}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right) = 0$$

sein. —

Es muss aber noch gezeigt werden, dass (14) auch für $x = 0$ gilt, dass also

$$(19)\quad (s>0),\ \underset{s,0}{E}(n) - \underset{s-1,1}{E}(n) + \underset{s-2,2}{E}(n-1) - \underset{s-3,3}{E}(n-3) + \underset{s-4,4}{E}(n-6) \cdots = 0\text{*)}$$

ist, Die linke Seite wird:

$$\left\{\begin{array}{llll} \underset{s,0}{E}(n-s) & -\left\{\begin{array}{l} \underset{s-1,0}{E}(n-s+1) - \underset{s-2,1}{E}(n-s+1) + \underset{s-3,2}{E}(n-s+1-1) \\ \qquad\qquad\qquad - \underset{s-4,3}{E}(n-s+1-3) + \cdots \end{array}\right\} & & \\ & - \quad \underset{s-1,1}{E}(n-s) & + \underset{s-2,2}{E}(n-s-1) & - \underset{s-3,3}{E}(n-s-3) \\ & & + \underset{s-4,4}{E}(n-s-6) - \cdots & \\ + \underset{s-1,0}{E}(n) & - \quad \underset{s-2,1}{E}(n) & + \underset{s-3,2}{E}(n-1) & - \underset{s-4,3}{E}(n-3) \\ & & + \underset{s-5,4}{E}(n-6) - \cdots. & \end{array}\right.$$

Gilt nun der Satz (19) schon für kleinere Argumente $n-s$ und $n-s+1$ und für die niedere Ordnung $s-1$ bei ebensogrossem Argumente n, so gilt er überhaupt.

Dass er aber anfangs gilt, ist evident, denn $\underset{0,0}{E}(n)$ ist Null ausser für $n=0$, wo es den Werth 1 hat, und $\underset{1,0}{E}(n) - \underset{0,1}{E}(n-1)$ wird für $n=0$ den Werth 1, sonst 0 haben.

B e w e i s z u (17). In die linke Seite von (17) führe man die $\underset{s,x}{A}(n)$ ein und zerlege dieselben, so wird:

$$\sum_{n-x-1=m} \underset{s-1,x}{A}(n) + \sum_{\substack{n-s+x-2 \\ =m-s-1}} \underset{s,x-1}{A}(n-s)$$

erhalten; dass ist, wenn der Satz für kleinere Argumente derselben Ordnung und für die niedere Ordnung bereits besteht,

---

*) Es gilt auch die Formel (wie oben für $x=0$ bemerkt),

$$(19')\qquad 0 = \underset{0,0}{E}(n) - \underset{1,0}{E}(n) + \underset{2,0}{E}(n-1) - \underset{3,0}{E}(n-3) + \underset{4,0}{E}(n-6) - \cdots,$$

denn durch Zerlegung nach der Definition heben sich alle Glieder identisch gegen einander fort.

$$\underset{s,0}{E}(m) + \underset{s+1,0}{E}(m-s-1) = \underset{s+1,0}{E}(m),$$

was gezeigt werden sollte.

In den bisher angegebenen Formeln (1) bis (19') kamen nur die Summen der E vor. Es lässt sich aber auch unschwer*) die Formel (20) beweisen, in welche auch Producte der E niederer und höherer Ordnung eingehen. Die Formel lautet für

$$p = m - n - \frac{s(s-1)}{1 \cdot 2}$$

und

$$q = n - h(\varrho - s) - \frac{h(h-1)}{1 \cdot 2}$$

bei fest gedachtem m, k und ϱ

$$(20) \qquad \sum_{s=0}^{s=\varrho-1} \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=s} (-1)^{h+s} \underset{k-s,0}{E}(p) \underset{s-h,h}{E}(q) = \underset{k,0}{E}\Big(m - k(\varrho - 1)\Big).$$

Macht man ϱ genügend gross, so könnte man, weil dann rechts 0 steht, $\underset{k,0}{E}(m)$ ermitteln, einfacher jedoch mit (16') und namentlich mit (6),

Was den Zusammenhang zwischen den G und E betrifft, so ist ein solcher zwar durch die Formel (16) [und (16')]

$$G(x+s,\ x,\ 1) = G(s+x,\ s+1,\ 1)$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=s} (-1)^h \underset{s-h,h}{E}\left(n - h\left(x + \frac{h-1}{2}\right)\right)$$

gegeben, doch lassen sich noch andere Beziehungen ableiten, was wir hier zum Schlusse andeuten wollen, zugleich mit Rücksicht auf die Frage nach einem *independenten* Bildungsgesetze der E.

Rechnen wir eine Zerlegung

$$Z = \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \cdots + \beta + \beta + \beta + \cdots = s + n,$$

bei welcher $\mathfrak{a}$ gleiche Summanden α, $\mathfrak{b}$ gleiche β ... vorkommen, nur als $\frac{1}{\mathfrak{a}!\,\mathfrak{b}!\ldots}$, so werden wir die Anzahl der Zerlegungen unter der Form von Brüchen erhalten; sie sei $\underset{s,0}{F}(n)$.

Es werden also, da alle Zerlegungen von

$$s = \mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \cdots = (\mathfrak{a})(\mathfrak{b})\cdots$$

zu benutzen sind, in $\underset{s,0}{F}(n)$ höchstens $\underset{s,0}{E}(s)$ Brüche sein, die Ganzen

---

*) Man ersetze in der dreifachen Summe die Summe Σ_h durch die $\underset{s,x}{A}(n)$ (15) und beachte, wie die *Differenz* zweier horizontal benachbarten $\underset{-,0}{E}$ die Anzahl der 1-freien Zerlegungen von $m+k$ giebt und wie analog die Anzahl 2, 3, ... ϱ-freier Zerlegungen von $m+k$ erhalten werden.

als Bruch mit dem Nenner (1) (1) (1) . . . mit eingerechnet. „*Nun müssen die Zähler von* $\underset{s,0}{F}(n)$ *zusammen* $\underset{s,0}{E}(n)$ *ergeben, während gleichzeitig:*

$$s!\,\underset{s,0}{F}(n) = G(n+s,\ s,\ 1)$$

wird, unter $(\mathfrak{a}), (\mathfrak{b}) \ldots$ *die Facultäten* $\mathfrak{a}!, \mathfrak{b}!, \ldots$ *verstanden.*“

Beispiel: $s = 3$.

$$\underset{3,0}{F}(6x+3) = \frac{3x^2+3x+1}{(1)(1)(1)} + \frac{3x+1}{(2)(1)} + \frac{1}{(3)}.\text{*)}$$

Es wird demnach:

$$1\cdot 2\cdot 3\,\underset{3,0}{F} = \frac{(6x+4)(6x+5)}{1\cdot 2} = G(6x+6,\ 3,\ 1)$$

und die Zählersumme beträgt:

$$3x^2 + 6x + 3 = \underset{3,0}{E}(6x+3)$$

d. h. „*eine Zahl von der Form* $6x+6$ *lässt sich auf* $3x^2+6x+3$ *Arten in 3 Summanden ohne Permutationen zerlegen.*“

Beispiel: $s = 4$.

$$\underset{4,0}{F}(12x+2) = \frac{12x^3+3x^2}{(1)(1)(1)(1)} + \frac{6x(3x+1)-x}{(2)(1)(1)} + \frac{4x+1}{(3)(1)} + \frac{3x+1}{(2)(2)};\text{*)}$$

Mithin

$$1.2.3.4\,F(12x+2) = G(12x+6,\ 4,\ 1) = \binom{12x+5}{3}$$

und die Summe der Zähler

$$= \underset{4,0}{E}(12x+2) = 12x^3 + 21x^2 + 12x + 2$$

d. h. „eine Zahl von der Form $12x+6$ *kann auf*

$$12x^3 + 21x^2 + 12x + 2$$

Arten in 4 *Summanden* der natürlichen Zahlenreihe zerlegt werden **).

Setzt man in das Glied mit Nenner (1)(1)(1)(1), also in $12x^3+3x^2$ für x den Werth $x+1$, so erhält man nach dem in Note zu pag. 292 bewiesenen Satze über m und $m - \frac{h(h-1)}{1\cdot 2}$ auch

$$\underset{4,3}{E}\left(12x+2+\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\right) = E(12x+8) = E(12x+\mathfrak{r})_{\mathfrak{r}=8)},$$

$$12x^3 + 39x^2 + 42x + 15;\ \text{etc.}$$

Hat man $\mathfrak{r}$ der $\underset{s-1,0}{E}$ für die Ordnung $s-1$ aufgestellt, so kann man irgend ein E für die folgende Ordnung s *independent* bis auf das freie

---

*) Diese Formel ist umgekehrt aus den für sie geltenden Beziehungen ermittelt zu denken.

**) $\underset{4,0}{E}(n) = 12x^3 + 3\mathfrak{r}\,.\,x^2 + \frac{x}{4}\left(\mathfrak{r}^2 - \frac{3}{3}(-1)^{\mathfrak{r}} - \frac{5}{2}\right) + \underset{4,0}{E}(\mathfrak{r}-5)$

für $n = 12x - 5 + \mathfrak{r}$.

Glied, das eine Permanenzzahl wird (18), *stets durch den Summationssatz* (6) *ermitteln;* so erhält man z. B.:

$$\underset{5,0}{E}(120x) = 72000x^4 + 18000x^3 + 1550x^2 + 55x + 1.$$

Hiernach lässt sich 125 auf 91606 Arten in 5 Summanden der natürlichen Zahlenreihe zerlegen, 1000 auf 11 835 956 777 Arten in 6 Summanden.

Aus diesen Formeln erhellt, dass die independente Ausrechnung der $\underset{s,0}{E}(u)$ in Bezug auf n möglich ist, aber bald für grösseres s sehr complicirt wird*). Dies hat seinen Grund darin, dass die $\underset{s,0}{E}$ nicht nur, wie in Note zu p. 285, sondern noch in anderer Art (*lückenhafte*) *figurirte* Zahlen der $(s-1)^{\text{ten}}$ Ordnung repräsentiren. Diese Lücken haben die Intervalle, zuerst 1; 2 resp. 2; 1, dann 2, dann 2; 3 resp. 3; 2, dann 3 etc.

So ist z. B. $\underset{5}{E}(15) =$

$$\begin{array}{llllllll}
8+7 & +5+4 & +2+1 & & & & & \\
 & +6+5 & +3+2 & +6+4+3 & +1 & & & \\
 & & +4+3 & +1 & +4 & +2+1+3+2 & +1 & \\
 & & & +2+1 & & +2 & & +1
\end{array}$$

$= 84$, d. h. 20 lässt sich auf 84 Arten in 5 Summanden zerlegen. Wollte man jedoch die Formel $E(120x)$ für $x = \frac{1}{8}$ benutzen, was *nicht* zulässig, so würde man $84 + \frac{53}{64}$ erhalten. Will man die Formeln auch für negatives x gelten lassen (zum Unterschiede werde ein Strich gesetzt), so wird für $n \gtrless \frac{s(s+1)}{2}$ die Zahl $E'(-n) = (-1)^{s-1} E\left(n - \frac{s(s+1)}{2}\right)$ und bei Satz 14) fällt die Bedingung fort. Dann ist auch $\underset{0,0}{E'}(0) = 0$.

Lingen a. d. Ems, den 28. April 1895.

---

*) Schon $\underset{6,0}{E}(n)$ wird $= 9000x^5 + 750\,\mathfrak{r}x^4 + 25\left(\mathfrak{r}^2 - \frac{91}{12}\right)x^3$

$$+ 5\left(\frac{\mathfrak{r}^3}{12} - \frac{91}{48}\mathfrak{r} + \frac{15}{16} i^{2\mathfrak{r}-1}\right)x^2$$

$$+ \frac{x}{288}\left[\mathfrak{r}^4 - 91\left(\frac{\mathfrak{r}^2}{2} - \frac{101}{48}\right) + 5 i^{2\mathfrak{r}-1}\left(9\mathfrak{r} - \frac{128}{3}\sin\left(\frac{\mathfrak{r}\pi}{3}\right)\right)\right] + \underset{6,0}{E'}\left(-\frac{21}{2} + \mathfrak{r}\right),$$

wo $\mathfrak{r}$ aus $n = 60x - \frac{21}{2} + \mathfrak{r}$ zu entnehmen. Die Coefficienten hängen mit den Bernoulli'schen Zahlen zusammen; $i = \sqrt{-1}$.

Ueber eine besondere Classe von Functionen einer reellen Veränderlichen.

Von

E. Study in Bonn.

Herr C. Jordan hat behufs einer Anwendung auf Fourier'sche Reihen eine Classe von Functionen einer reellen Veränderlichen definirt (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 92, 1881, p. 228), die er neuerdings *„fonctions à variation bornée"* nennt, und die dadurch ausgezeichnet sind, dass sie sich als Differenzen zweier endlicher monotoner Functionen ausdrücken lassen (Cours d'Analyse, Paris 1893, t. I, Nr. 67—72).

Wenn nun auch das nächste Ziel dieser Untersuchung in den Hintergrund treten muss, seit umfassendere Kriterien für die Darstellbarkeit einer Function durch die Fourier'sche Reihe bekannt geworden sind, so haben doch die genannten Functionen an sich Interesse, namentlich weil ihre Theorie die der sogenannten *rectificirbaren Curven* umfasst (Cours d'Analyse, Nr. 105—113). Auch Dini's reducibel-oscillirende Functionen gehören zu dieser Classe.

Das Kennzeichen, das nach C. Jordan über die Zugehörigkeit einer vorgelegten Function zu den „fonctions à variation bornée" entscheidet, und das ihm zugleich zur Definition dieser Functionen dient (Nr. 67), leidet nun, wie mir scheint, an einem Uebelstand. Es wird nämlich verlangt, die Ergebnisse einer unendlichen nicht abzählbaren Menge von Grenzübergängen abzuschätzen, also eine Operation vorzunehmen, die sich nicht allzu oft wirklich wird ausführen lassen. Aber auch abgesehen davon dürfte es wünschenswerth sein, die Definition des Herrn C. Jordan durch eine einfachere — übrigens naheliegende — Formulirung zu ersetzen, und von dieser aus die Theorie der besprochenen Functionen in einigen Punkten noch etwas vollständiger zu entwickeln.

Wie sich bei Ausführung dieses Gedankens alsbald gezeigt hat, sind die anzustellenden Betrachtungen grossentheils nahe verwandt denen, die Scheeffer's bekannter Untersuchung über die rectificirbaren Curven zu Grunde liegen (Acta Mathematica, Bd. V, 1885, S. 49).

Die Voraussetzungen sind jedoch bei uns — in mehreren Richtungen — noch etwas allgemeiner. Wir werden einige der Scheeffer'schen Sätze noch erweitern (Nr. 5, 6, 11) und auf Grund des — bei Scheeffer und C. Jordan fehlenden — Theorems in Nr. 1 eine neue Form der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Rectificirbarkeit einer Curve $y = f(x)$ aufstellen (Nr. 10, I).

Von den einzuführenden charakteristischen Zahlen M, μ und ν kommt die erste bereits bei C. Jordan vor.

---

1) Wir denken uns das Intervall von $x = a$ bis $x = b$ $(a < b)$, in dem die zu betrachtende Function $y = f(x)$ definirt sein soll, in bekannter Weise in eine endliche Zahl aneinander stossender Theilintervalle $\delta_i = x_{i+1} - x_i$ $(x_{i+1} > x_i)$ zerlegt, und bezeichnen mit M_i und m_i die obere und untere Schranke von y im Intervall δ_i, unter Mitberücksichtigung der Grenzen des Intervalls. Δ_i sei das Zeichen für die Schwankung $M_i - m_i$ von y im Intervalle δ_i, $\Sigma\Delta_i$ bedeute die Summe der Schwankungen in allen Theilintervallen. Wir behaupten:

Wenn bei irgend einer unendlichen Folge von Theilungen die Intervalle δ_i schliesslich alle unendlich klein werden, und wenn die zu den einzelnen Gliedern der Folge gehörigen Schwankungssummen $\Sigma\Delta_i$ alle unterhalb einer endlichen Grösse liegen, so haben die sämmtlichen Schwankungssummen eine obere Schranke M.

Die Grenzwerthe oder Unbestimmtheitsgrenzen von $\Sigma\Delta_i$, die zu den verschiedenen Folgen der angegebenen Beschaffenheit gehören, liegen dann zwischen M *und einer unteren Schranke μ, die der Ungleichung*

$$2\mu \geqq \mathsf{M} \tag{1}$$

genügt.

Insbesondere sind immer solche Folgen von Theilungen vorhanden, für die lim $\Sigma\Delta_i$ *existirt und den Werth μ oder den Werth* M *hat**), *darunter auch solche Folgen, bei denen jede Theilung aus der vorangehenden durch Zerlegung der in dieser vorkommenden Theilintervalle entsteht.*

Es sei δ'_x das allgemeine Intervall einer beliebig vorgelegten Theilung, und $\Sigma\Delta'_x$ die zugehörige Schwankungssumme. Wir nehmen nun δ kleiner als das kleinste der Intervalle δ'_x und wählen in der vorausgesetzten Folge von Theilungen ein Glied der Art aus, dass alle $\delta_i \leqq \delta$ werden. Es wird dann, wenn man beide Theilungen überlagert, jedes Intervall δ_i höchstens in zwei neue Intervalle δ''_{ij} zerlegt. Man hat also, je nachdem, entweder $\Delta_i = \Delta''_{i1}$, oder

---

*) Für die zwischen μ und M gelegenen Werthe besteht ein ähnlicher Satz im Allgemeinen nicht.

$$\Delta_i \leqq \Delta''_{i1} + \Delta''_{i2} \leqq 2\Delta_i.$$

Andrerseits ist $\Sigma\Delta'_\varkappa \leqq \Sigma\Delta''_{ij}$; also, wenn für alle Theilungen der Folge $\Sigma\Delta_i \leqq G$ ist,

$$\Sigma\Delta'_\varkappa \leqq 2G,$$

wie auch die Theilung $(\delta'_\varkappa)$ beschaffen sein möge; mithin haben die Schwankungssummen eine obere Schranke $\mathsf{M} \leqq 2G$.

Jede Folge von Summen $\Sigma\Delta_i$, die einer Folge von Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen entspricht, hat nun nothwendig entweder einen bestimmten Grenzwerth λ, oder eine untere Unbestimmtheitsgrenze λ und eine obere Unbestimmtheitsgrenze Λ; und alle Grössen λ haben eine untere Schranke μ. Es wird also für jeden noch so kleinen Werth der positiven Grösse σ eine Folge von Theilungen vorhanden sein, für die

$$\mu \leqq \lambda < \mu + \sigma$$

ausfällt; und in dieser Folge wird es Theilungen mit beliebig kleinen Intervallen geben, für die auch

$$\Sigma\Delta_i < \mu + \sigma$$

ist. Mithin wird für jede beliebige Art der Theilung des Intervalls $a \ldots b$

$$\Sigma\Delta'_\varkappa < 2(\mu + \sigma);$$

und da dieses für jeden positiven Werth von σ richtig ist,

$$\Sigma\Delta'_\varkappa \leqq 2\mu,$$

und also auch $\mathsf{M} \leqq 2\mu$.

Hiermit ist der erste und zweite Theil unseres Satzes bewiesen. Den Beweis der letzten Behauptung verschieben wir bis zur Entwicklung weiterer Hülfsmittel (Nr. 4).

2) Durch den nachgewiesenen Satz wird aus der Gesammtheit der Functionen $y = f(x)$ einer reellen Veränderlichen eine besondere Classe hervorgehoben. Da diese sich als mit den „fonctions à variation bornée" des Herrn C. Jordan identisch erweisen, wollen auch wir sie „*Functionen mit beschränkter Schwankung*" nennen; wiewohl wir uns nicht verhehlen, dass der Ausdruck nicht ganz sachgemäss ist, und zu dem Missverständniss Anlass geben kann, als seien überhaupt nicht unendlich werdende Functionen gemeint.

Die Functionen mit beschränkter Schwankung haben keine Singularitäten zweiter Art, d. h. *es existiren immer die Grenzwerthe* $f(x+0)$ *und* $f(x-0)$ — an den Stellen a und b natürlich nur $f(a+0)$ und $f(b-0)$. In der That führt die Annahme von endlichen Oscillationen in der Nähe auch nur eines Punktes sofort zu der Folgerung, dass beim Uebergang zu unendlich kleinen Intervallen alle Grössen $\Sigma\Delta_i$ über jede Grenze wachsen.

Es sind also höchstens einfache Sprünge vorhanden, und überdies sind die Summen der rechtsseitigen und linksseitigen Sprünge

$$\Sigma\,|f(x+0)-f(x)|,\quad \Sigma\,|f(x-0)-f(x)|$$

endlich. Hieraus folgt, erstens, dass $f(x)$ *integrabel* ist, zweitens, dass die Sprungstellen eine (auf die Mannigfaltigkeit der ganzen Zahlen) *abzählbare Menge* bilden.*)

Reihen von der Form $\Sigma c_n f_n(x)$ liefern zahlreiche Beispiele hierher gehöriger Functionen, darunter solche, die in keinem noch so kleinen Intervall nur zunehmen oder nur abnehmen. Setzt man voraus, dass Σc_n eine convergente Reihe positiver Grössen ist, dass $f_n(x)$ selbst eine beschränkte Schwankung hat, und dass endlich M_n und $|f_n(x)|$ unter einer von n (und x) unabhängigen Schranke liegen, so wird offenbar $\Sigma c_n f_n(x)$ wieder eine Function von beschränkter Schwankung.

3) Unter den Functionen mit beschränkter Schwankung haben die ein besonderes Interesse, bei denen die beiden Schranken μ und M zusammenfallen, wie es z. B. bei den stetigen Functionen, soweit sie überhaupt hierher gehören, der Fall sein muss.

Um die fragliche Functionsclasse einfach zu charakterisiren, führen wir hier bereits den Begriff des „*äusseren Sprunges*" der Function $f(x)$ an einer Stelle x ein. Wir verstehen darunter, wenn $a < x < b$, die kleinere der beiden Differenzen

$$|f(x)-f(x+0)|,\quad |f(x)-f(x-0)|,$$

sofern nämlich $f(x)$ *ausserhalb* des Intervalls $f(x-0)\ldots f(x+0)$ liegt. Wir können dann sagen:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass bei einer Function $f(x)$ mit beschränkter Schwankung alle Summen $\Sigma\Delta_i$ bei fortgesetzter Verkleinerung der Intervalle δ_i einem und demselben Grenzwerth M zustreben, besteht darin, dass keine äusseren Sprünge vorkommen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist die Convergenz der Schwankungssummen überdies gleichmässig; d. h., man kann einen beliebigen Grad der Annäherung an M erreichen lediglich dadurch, dass man die Breite der Theilintervalle δ_i unter einer passend gewählten Schranke δ hält.

Dass die angegebene Bedingung nothwendig ist, leuchtet ohne Weiteres ein. Dass sie auch hinreichend ist, erkennen wir durch die folgende Ueberlegung.

---

*) Dass die Unstetigkeitsstellen einer integrabelen Function im Allgemeinen die Mächtigkeit des Linear-Continuums haben, folgt aus der Thatsache, dass es perfecte Mengen vom Inhalte Null gibt. Wegen dieser Punktmengen vgl. Harnack, Math. Ann. Bd. 19, S. 239, Cantor, Ann. 21, S. 590; 23, S. 453 u ff. (§ 16 und § 19), Acta Math. Bd. 4, S. 386, Harnack, Ann. 24, S. 225 u. ff.

Betrachten wir zuerst zwei in einem bestimmten Punkt x an einanderstossende Intervalle $x-\delta_1 \ldots x$ und $x \ldots x+\delta_2$; $\delta_{12}=\delta_1+\delta_2$ sei die Breite des Intervalls von $x-\delta_1$ bis $x+\delta_2$. Dann können wir immer $\delta_1+\delta_2$ so klein wählen, dass die entsprechende Differenz $\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{12}$ einen beliebig kleinen Werth erhält. In der That haben wir, *wenn $f(x)$ im Inneren oder an der Grenze des Intervalls $f(x-0) \ldots f(x+0)$ liegt,*

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \varepsilon \cdot \{f(x) - f(x-0)\} + \sigma_1,\\
\Delta_2 &= \varepsilon \cdot \{f(x+0) - f(x)\} + \sigma_2,\\
\Delta_{12} &= \varepsilon \cdot \{f(x+0) - f(x-0)\} + \sigma_{12},
\end{aligned}$$

wo die Grössen σ_1, σ_2 und σ_{12} zugleich mit δ_{12} gegen Null convergiren, und wo ε die positive oder negative Einheit bedeutet, je nachdem $f(x+0)-f(x-0)$ positiv oder negativ ausfällt; es wird also

$$\Delta_1+\Delta_2-\Delta_{12}=\sigma_1+\sigma_2-\sigma_{12}$$

zugleich mit δ_{12} unendlich klein.

Wir betrachten nun, unter der hervorgehobenen Voraussetzung, eine Folge in einander eingeschalteter Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen. Die zugehörige Folge von Schwankungssummen wird dann nothwendig einen bestimmten Grenzwerth $\lim \Sigma\Delta_i = G$ haben. Wir behaupten, dass G identisch ist mit der oberen Schranke M der Schwankungssummen.

In der That müsste es, wenn dies nicht richtig wäre, eine Theilung der Strecke $b-a$ in sagen wir n Intervalle $\delta'_\varkappa$ geben, der Art, dass die zugehörige Summe $\Sigma\Delta'_\varkappa$ einen grösseren Werth als G, etwa den Werth $G+\alpha$ hätte. Ueberlagern wir nun jede Theilung unserer Folge mit der Theilung $(\delta'_\varkappa)$, so entsteht eine neue Folge von Theilungen (δ''_{ij}); und wir dürfen voraussetzen, dass dabei jedes Intervall δ_i in höchstens zwei neue Intervalle δ''_{ij} zerfällt (Nr. 1). Wir haben dann

$$\Sigma\Delta'_{ij}-\Sigma\Delta_i=\Sigma(\Delta''_{i1}+\Delta''_{i1}-\Delta_i),$$

wo die Summe rechts sich nur auf die Intervalle δ_i bezieht, die in *zwei* Theilintervalle δ''_{ij} zerlegt sind. Nun ist

$$\Sigma\Delta''_{ij} \geqq \Sigma\Delta'_\varkappa \geqq G+\alpha, \quad \text{und} \quad \Sigma\Delta_i \leqq G;$$

also hat die Differenz links in obiger Gleichung einen endlichen Werth $\geqq \alpha$; die Summe rechts aber, die höchstens $n-1$ Glieder enthält, können wir, wie wir gesehen haben, so klein machen als wir wollen. Dies ist ein Widerspruch; wir müssen also annehmen, dass $G=\mathsf{M}$.

Um nun zu zeigen, dass sämmtliche Schwankungssummen gegen den Werth M convergiren, und zwar gleichmässig, suchen wir zunächst irgend eine Theilung $(\delta'_\varkappa)$ des Intervalls $a \ldots b$ auf, bei der

$\Sigma\Delta'_\varkappa \geqq \mathsf{M} - \frac{\sigma}{2}$ wird, unter σ eine beliebig kleine positive Zahl verstanden. Hierauf grenzen wir zu beiden Seiten eines jeden Theilpunktes x dieser Theilung Intervalle δ_1 und δ_2 von der gemeinsamen Breite $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ab; und wir wählen dieses δ erstens kleiner als die kleinste der Grössen $\frac{1}{2}\delta'_\varkappa$, zweitens so klein, dass die zugehörige Summe $\Sigma(\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{12})$ (s. oben), erstreckt über alle Theilpunkte x, $\leqq \frac{\sigma}{2}$ ausfällt.

Betrachten wir nun irgend eine Theilung der Strecke $b - a$ mit Intervallen $\delta_i \leqq \delta$, und überlagern wir diese Theilung mit der Theilung $(\delta'_\varkappa)$, so entsteht eine neue Theilung (δ''_{ij}); und wir haben

$$\Sigma\Delta''_{ij} \geqq \Sigma\Delta'_\varkappa \geqq \mathsf{M} - \frac{\sigma}{2},$$

$$\Sigma\Delta''_{ij} - \Sigma\Delta_i \leqq \frac{\sigma}{2},$$

also

$$\Sigma\Delta_i \geqq \mathsf{M} - \sigma. \tag{2}$$

Hier ist σ beliebig, und die Intervalle δ_i haben, wie gesagt, der einzigen Bedingung $\delta_i \leqq \delta$ zu genügen.

4) Bei den unter 3) besprochenen Functionen hat es nunmehr einen Sinn, von einer bestimmten *Gesammtschwankung* zu reden; wir verstehen unter der „Gesammtschwankung S_a^b der Function $f(x)$ im Intervalle $a \ldots b$" natürlich die Grösse M, die gemeinsame obere Grenze aller Schwankungssummen. Aus unserem Beweise geht ohne Weiteres hervor, dass diese Grösse ihren Werth nicht ändert, wenn man an allen Sprungstellen den Functionswerth $f(x)$ nach Belieben innerhalb des Intervalls $f(x-0) \ldots f(x+0)$ verschiebt.

Ferner ergiebt sich aus unseren Betrachtungen ein wichtiges auf den allgemeinen Fall der Functionen von beschränkter Schwankung bezügliches Resultat: *Die Differenz* $\mathsf{M} - \mu$ *ist die Summe der äusseren Sprünge der Function* $f(x)$. Damit haben wir nun auch den Beweis der letzten Behauptung des Satzes in Nr. 1): Bei jeder Folge in einander geschalteter Theilungen, bei der die Stellen mit äusseren Sprüngen als Intervallgrenzen durchaus vermieden werden, wird $\lim \Sigma\Delta_i = \mu$; und bei jeder Folge in einander geschalteter Theilungen, in der, für jeden Werth der positiven Grösse σ, alle Stellen mit äusseren Sprüngen $\geqq \sigma$ als Intervallgrenzen vorkommen, wird $\lim \Sigma\Delta_i = \mathsf{M}$. Vorausgesetzt ist natürlich, dass die Intervalle schliesslich unendlich klein werden.

Wir erkennen ferner, dass unter der Voraussetzung $a \leqq x < y < z \leqq b$, mit leicht verständlicher Bezeichnung

(3) $$\mathsf{M}_x^y + \mathsf{M}_y^z = \mathsf{M}_x^z,$$

also insbesondere bei bestimmter Gesammtschwankung,

(3b) $$S_x^y + S_y^z = S_x^z$$

ist, während für die untere Schranke μ, wenn $\mu < \mathsf{M}$, nur die Ungleichung

(4) $$\mu_x^y + \mu_y^z \geqq \mu_x^z$$

gilt.

Man kann nach dem Gesagten aus jeder Function $f(x)$ mit beschränkter Schwankung auf unendlich viele Arten eine andere Function $\varphi(x)$ ableiten, der eine bestimmte Gesammtschwankung zukommt, indem man nämlich den Functionswerth an den Sprungstellen zwischen a und b nöthigenfalls in geeigneter Weise abändert. Unter diesen Functionen $\varphi(x)$ befindet sich insbesondere eine, die im Inneren des Intervalls vorwärts [rückwärts] stetig ist, also daselbst mit der Function $f(x+0)$ [$f(x-0)$] übereinstimmt und eine, die, abgesehen von den Grenzen a und b überall der Bedingung $2\varphi(x) = \varphi(x+0) + \varphi(x-0)$ genügt, und daher im Inneren des Intervalls mit $\frac{1}{2}\{f(x+0)+f(x-0)\}$ zusammenfällt.

Alle diese Functionen haben zwischen a und b dieselbe Gesammtschwankung

(5) $$\nu = 2\mu - \mathsf{M};$$

und sie liefern zwischen beliebigen Grenzen dasselbe Integral, wie die Function $f(x)$.

Das Studium der Functionen $f(x)$ lässt sich also ohne Weiteres auf das Studium der einfacher beschaffenen Functionen $\varphi(x)$ zurückführen; aber auch diese Functionen lassen sich, wie wir unter 6) und 7) sehen werden, noch durch einfachere Functionen ausdrücken. —

In einem weiteren Sinne könnte man übrigens alle Functionen, bei denen überall die Grenzwerthe $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existiren und keine äusseren Sprünge vorkommen, „Functionen mit bestimmter Gesammtschwankung“ nennen. Unter diesen sind die hier betrachteten dadurch ausgezeichnet, dass sie eine *endliche* Gesammtschwankung haben. Wir werden von dieser Redewendung gelegentlich Gebrauch machen.

5) Unter den Eigenschaften der Functionen mit beschränkter Schwankung hatten wir die gefunden, dass überall bestimmte Grenzwerthe $f(x+0)$, $f(x-0)$ vorhanden sind. Indem wir jetzt diese Eigenschaft an die Spitze stellen und geeignete weitere Beschränkungen hinzufügen, gelangen wir dahin, die Stellung unserer Func-

tionen innerhalb allgemeinerer Functionenclassen noch in anderer Weise zu charakterisiren als bisher geschehen.

Wir setzen also zunächst voraus, dass die Function $f(x)$ nur einfache Sprünge hat.

Dann folgt, dass die Sprünge, die absolut genommen grösser sind als eine gegebene Zahl, nur in endlicher Anzahl auftreten können; denn andernfalls müsste mindestens eine Häufungsstelle der genannten Sprungstellen vorhanden sein, und für diese würde wenigstens einer der Grenzwerthe $f(x \pm 0)$ nicht existiren. Also auch diese Functionen sind integrabel und haben Sprungstellen in abzählbarer Menge.

Wir schränken nun die Function $f(x)$ durch die weitere Forderung ein, dass ihre Sprünge im Innern eines jeden Theilintervalls $x \dots y$ $(a \leq x < y \leq b)$ eine bestimmte „algebraische Summe" $\mathfrak{S}_x^y$ haben sollen. Mit dieser Redewendung wollen wir sagen, dass für jedes Theilintervall die Summe aller Differenzen

$$f(\xi + 0) - f(\xi - 0) \qquad (x < \xi < y),$$

die absolut genommen $\geq \sigma$ sind, einem bestimmten Grenzwerth $\mathfrak{S}_x^y$ zustrebt, wenn σ sich der Null nähert.*)

Endlich wollen wir annehmen, dass bei Festhaltung eines Endpunktes des Intervalls $x \dots y$ die Grösse $\mathfrak{S}_x^y$ zugleich mit der Intervallbreite $|y - x|$ der Null zustrebt.

Unter diesen Voraussetzungen (von denen keine entbehrlich ist) können wir behaupten, dass die Function

$$(6) \quad \psi(x) = \begin{cases} = f(a+0) - f(a) + \mathfrak{S}_a^x + f(x) - f(x-0) & (x > a) \\ = 0 \quad (x = a), \end{cases}$$

die die algebraische Summe aller Sprünge von $f(x)$ zwischen a und x darstellt, dieselben Eigenschaften hat, die wir soeben der Function $f(x)$ beigelegt haben, und dass sie überdies eben so unstetig wird, wie die Function $f(x)$ selbst. In der That findet man sofort

$$\psi(x+0) - \psi(x) = f(x+0) - f(x),$$
$$\psi(x-0) - \psi(x) = f(x-0) - f(x).$$

Setzen wir also $\varphi(x) = f(x) - \psi(x)$, so wird $\varphi(x)$ eine stetige Function.

Jede Function der beschriebenen Art lässt sich also in zwei einfacher beschaffene Bestandtheile zerlegen,

*) Wollte man eine ähnliche Forderung für die einseitigen Sprünge $f(x+0) - f(\xi)$, $f(\xi) - f(\xi - 0)$ stellen, so würde das eine weitere Einschränkung der Function $f(x)$ bedeuten, die durch die Natur unserer Untersuchung nicht gerechtfertigt wäre. — Statt der Intervalle von x bis y genügt es offenbar die Intervalle von a bis x zu betrachten.

$$(7)\qquad f(x) = \varphi(x) + \psi(x),$$

deren einer $\varphi(x)$ *stetig ist, während der andere* $\psi(x)$ *die Eigenschaft hat, dass der Functionswerth an irgend einer Stelle* x *zugleich die algebraische Summe aller Sprünge der Function von* a *bis* x *ist,*

$$(8)\qquad \begin{aligned} \psi(x) = \psi(a+0) - \psi(a) + \psi(x) - \psi(x-0) + \\ + \lim_{\sigma=0} \sum\nolimits_\xi \{\psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)\} \\ \big(|\psi(\xi+0) - \psi(\xi-0)| \geqq \sigma, \quad a < \xi < x\big). \end{aligned}$$

Wir bemerken noch, dass die dritte unserer Voraussetzungen die Annahme umfasst, dass die Summen der Sprünge von $f(x)$ im Inneren der Intervalle $x \ldots y$ *gleichmässig* gegen die Grenzen $\mathfrak{S}_x^y$ convergiren, d. h., dass man für jedes x und y denselben Grad der Annäherung erreichen kann dadurch, dass man σ hinreichend klein wählt. In der That folgt dann aus der Existenz der Grenzwerthe $f(x+0)$ und $f(x-0)$, dass

$$(9)\qquad \lim_{h=0} \mathfrak{S}_x^{x+h} = 0, \quad \lim_{h=0} \mathfrak{S}_{x-h}^x = 0.$$

Als *Beispiel* betrachten wir, indem wir unter (x) das bekannte Riemann'sche Zeichen verstehen (Abhandlung über die trigonometrische Reihe Nr. (6)), die periodische Function

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cdot \frac{(2^{n-1}x)}{2^{n-1}} \qquad (\alpha > 0),$$

im Intervall von 0 bis 1.

Die Sprungstellen dieser Function sind die rationalen Zahlen ξ, deren Nenner die Form 2^n hat; und zwar wird

$$f(\xi \pm 0) = f(\xi) \pm \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{2^n}.$$

Die Summe aller Differenzen $f(\xi+0) - f(\xi-0)$ $(x < \xi < y)$, die absolut gleich $\frac{1}{2^{n-1} n^\alpha}$ sind, unterscheidet sich von $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}(y-x)$ um weniger als $\frac{1}{2^{n-2} n^\alpha}$; also die algebraische Summe aller Differenzen, die absolut $\leqq \frac{1}{2^{n-1} n^\alpha}$ sind, von $\sum_0^\infty{}_m \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)^\alpha} \cdot (y-x)$ um weniger als $\sum_0^\infty{}_m \frac{1}{2^{n+m-2}(n+m)^\alpha}$. Da nun $y - x$ höchstens gleich der Einheit ist, und da die beiden letzten unendlichen Summen, wenn man durch

passende Wahl von n die Grösse $\sigma = \frac{1}{2^{n-1}n^\alpha}$ beliebig klein macht, gegen Null convergiren, so folgt, dass die Summen $\sum_x^y{}_\xi \{f(\xi+0)-f(\xi-0)\}$ $(x < \xi < y)$ bei abnehmenden Werthen von σ *gleichmässig* gegen die Grenzen $\mathfrak{S}_x^y$ convergiren. Es sind also alle Bedingungen unseres Satzes erfüllt. Ueberdies können wir die stetige Function $\varphi(x)$ von vorn herein angeben: Es wird

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty{}_n \frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} \cdot x. -$$

Es ist vielleicht nicht überflüssig, auch noch durch ein Beispiel nachzuweisen, dass es Functionen giebt, für die die erste und zweite unserer Voraussetzungen erfüllt sind, nicht aber die dritte, und dass für diese der aufgestellte Satz illusorisch wird.

Wir denken uns zu diesem Zweck auf der Strecke $b-a$ eine unendliche Folge zunehmender Werthe ξ_i mit einem Häufungspunkt bei b definirt. Schreiben wir nun der Function $f(x)$ vor, dass sie an jeder Stelle ξ_i einen Sprung ausführen soll, der Art, dass $f(\xi+0)-f(\xi-0)$ der Reihe nach die Werthe

$$1,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \text{u. s. w.}$$

annimmt, und schalten wir zwischen diese Sprünge geeignete stetige Züge so ein, dass $\lim\limits_{x=b} f(x) = 0$ wird; so genügt diese Function unseren Bedingungen in jedem Intervall $a \ldots x$, so lange $x < b$; sie genügt aber der dritten Bedingung nicht mehr, wenn b Intervallgrenze wird. Bilden wir nun die Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, so erkennen wir, dass die Grenzwerthe $\psi(b-0)$ und $\varphi(b-0)$ nicht existiren, dass also $\varphi(x)$ bei $x=b$ nicht mehr stetig ist.

6) Zu den in Nr. 5) betrachteten Functionen gehören insbesondere die Functionen mit beschränkter Schwankung; denn bei diesen convergirt die Summe der Sprünge absolut, es convergiren also die Summen $\sum_x^y \{f(\xi+0)-f(\xi-0)\}$ gleichmässig gegen ihre Grenzwerthe $\mathfrak{S}_x^y$. Ueberdies erkennen wir sofort die Richtigkeit des Satzes:

Damit eine Function $f(x)$ der unter 5) *beschriebenen Art eine beschränkte Schwankung habe, ist nothwendig und hinreichend, dass den Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ einzeln diese Eigenschaft zukommt. Insbesondere wird dann die Function $f(x)$ eine bestimmte Gesammtschwankung haben, wenn $\psi(x)$ eine bestimmte Gesammtschwankung hat.*

Dass $\psi(x)$ eine beschränkte Schwankung hat, heisst natürlich nichts Anderes, als dass die Summe aller Sprünge von $f(x)$ im Intervall von a bis b absolut convergirt.*)

Ferner wird, wenn wir annehmen, dass $f(x)$ eine beschränkte Schwankung hat,

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}^{\varphi} + \mathsf{M}^{\psi}, \quad \mu = \mu^{\varphi} + \mu^{\psi} \tag{10}$$
$$(\mathsf{M}^{\varphi} = \mu^{\varphi}),$$

wo die verwendete Bezeichnung einer besonderen Erklärung wohl nicht bedarf.

Zum Beweise betrachten wir statt der Function $\psi(x)$ zunächst eine andere Function $\varphi_\tau(x)$, die wie $\psi(x)$, für $x = a$ den Werth Null hat, im Uebrigen aber dadurch definirt sein soll, dass sie alle Sprünge von $f(x)$ mitmacht, die absolut $\geq \tau$ sind, und abgesehen von diesen Sprungstellen aus lauter Invariabilitätszügen besteht — ein Verhalten, das wir etwa durch die Bezeichnung

$$\psi_\tau(x) = [f(a+0) - f(a)]_\tau + \sum_a^x [f(\xi) - f(\xi - 0)]_\tau$$
$$+ \sum_a^x [f(\xi+0) - f(\xi)]_\tau + [f(x+0) - f(x)]_\tau \qquad (x > a)$$

andeuten mögen. Setzen wir dann noch

$$\varphi_\tau(x) = f(x) - \psi_\tau(x),$$

so wird sicher

$$\mathsf{M} = \mathsf{M}^{\varphi_\tau} + \mathsf{M}^{\psi_\tau}, \qquad \mu = \mu^{\varphi_\tau} + \mu^{\psi_\tau};$$

und die Gesammtheit aller Sprünge von $\varphi_\tau(x)$ wird identisch mit dem Inbegriff *der* Sprünge von $f(x)$, die kleiner als τ sind.

Wählen wir jetzt τ so, dass die Summe der absoluten Beträge aller Sprünge von $f(x)$, die $< \tau$ sind, den Betrag ε nicht übersteigt, so wird

$$|\psi_\tau(x) - \psi(x)| \leq \varepsilon, \qquad |\varphi_\tau(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon,$$

d. h. die Grössen $\varphi_\tau(x)$ und $\psi_\tau(x)$ convergiren bei gegen Null abnehmenden Werthen von τ gegen die Grenzen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, und zwar *gleichmässig* für alle Werthe von x. Gleichzeitig convergiren die monoton zunehmenden Functionen M^{ψ_τ} und μ^{ψ_τ} von τ gegen gewisse Grenzen, die sich sofort als mit M^{ψ} und μ^{ψ} identisch erweisen.

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass die Grenzwerthe $\lim\limits_{\tau=0} \mathsf{M}^{\varphi_\tau}$

*) Ein einfaches Kriterium für die Existenz einer endlichen Gesammtschwankung der stetigen Function $\varphi(x)$ findet man unter 8), Nr. 3. Vergl. das Theorem III bei Scheeffer.

und $\lim\limits_{\tau=0} \mu^{\varphi_\tau}$ der monoton abnehmenden Functionen $\mathsf{M}^{\varphi_\tau}$ und μ^{φ_τ} beide mit der Gesammtschwankung M^φ der stetigen Function $\varphi(x)$ zusammenfallen.

Nennen wir, ausgehend von einer beliebigen Theilung des Intervalls $a \ldots b$, η_i die Summe der absoluten Beträge aller Sprünge von $\varphi_\tau(x)$ im Theilintervall δ_i (einschliesslich der Grenzen), so wird offenbar

$$\left| \Delta_i^{\varphi_\tau} - \Delta_i^\varphi \right| \leqq \eta_i;$$

also:

$$\left| \Sigma \Delta_i^{\varphi_\tau} - \Sigma \Delta_i^\varphi \right| \leqq \Sigma \eta_i \leqq 2\varepsilon;$$

und statt dieser Ungleichung erhält man beim Uebergang zu unendlich kleinen Intervallen die beiden

$$\left| \mathsf{M}^{\varphi_\tau} - \mathsf{M}^\varphi \right| \leqq 2\varepsilon,$$

$$\left| \mu^{\varphi_\tau} - \mathsf{M}^{\varphi} \right| \leqq \varepsilon,$$

in denen der zu beweisende Satz enthalten ist. Es ist also

$$(11) \qquad \lim_{\tau=0} \lim_{\delta=0} \Sigma \Delta_i^{\varphi_\tau} = \lim_{\delta=0} \lim_{\tau=0} \Sigma \Delta_i^{\varphi_\tau} \quad (\delta_i \leqq \delta). \text{ —}$$

Als *Beispiel* können wir wieder die unter 5) besprochene Function betrachten, indem wir jetzt an Stelle der Bedingung $\alpha > 0$ die engere $\alpha > 1$ treten lassen. Unter dieser Voraussetzung hat nämlich nicht nur $\varphi(x)$ eine endliche Gesammtschwankung, sondern auch $\psi(x)$ hat eine solche $\left(= \sum \frac{1}{n^\alpha}\right)$.

Aehnlich verhalten sich die Functionen

$$f(x) = \sum_1^\infty{}_n \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{(nx)}{n} \qquad (\alpha > 1),$$

aus denen bei Uebergang zur Grenze $\alpha = 1$ die bekannte Riemann'sche Function hervorgeht.

7) Betrachten wir wieder eine endliche Theilung der Strecke $b - a$ in auf einander folgende Intervalle $\delta_i = x_{i+1} - x_i$, und führen wir die Bezeichnung ein

$$(12) \qquad D_i = | y_{i+1} - y_i | = | f(x_{i+1}) - f(x_i) |,$$

so können wir den Satz aussprechen:

Ist $f(x)$ eine Function mit beschränkter Schwankung, so haben die Summen ΣD_i eine obere Schranke, und umgekehrt. Diese Schranke fällt zusammen mit der oberen Schranke M der Schwankungssummen.

Ferner ist die untere Schranke der Unbestimmtheitsgrenzen und Grenzwerthe von ΣD_i, die den verschiedenen Folgen von Theilungen

mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen entsprechen, identisch mit der bereits definirten Grösse

(5) $$\nu = 2\mu - \mathsf{M}.$$

Wenn die Function $f(x)$ insbesondere eine bestimmte Gesammtschwankung hat, so convergiren die Summen ΣD_i gleichmässig gegen den gemeinsamen Grenzwerth M.

Um zuvörderst den Satz über Functionen mit bestimmter Gesammtschwankung zu erhärten, bemerken wir zuerst, dass das in Nr. 3 über die Differenz $\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_{12}$ Gesagte ohne Weiteres auf die entsprechende Differenz $D_1 + D_2 - D_{12}$ übertragen werden kann.

Wir überlagern nun, wie in Nr. 3, eine Theilung $(\delta'_\varkappa)$, die der Bedingung

$$\mathsf{M} - \frac{\sigma}{2} \leqq \Sigma\Delta'_\varkappa \leqq \mathsf{M}$$

genügt, mit einer beliebigen Theilung in Intervalle $\delta_i \leqq \delta$, und bezeichnen die neu entstandene Theilung mit $(\delta''_{\varkappa j})$. Das zu benutzende δ wählen wir zunächst so klein, dass für alle Theilungen (δ_i)

$$\Sigma D''_{\varkappa j} - \Sigma D_i \leqq \frac{\sigma}{2}$$

wird, was nach dem eben Bemerkten möglich ist. Können wir nun überdies durch weitere Einschränkung von δ erreichen, dass

$$\Sigma D''_{\varkappa j} \geqq \Sigma\Delta'_\varkappa$$

wird, so folgt

(13) $$\mathsf{M} - \sigma \leqq \Sigma D_i \leqq \Sigma\Delta_i \leqq \mathsf{M},$$

für alle Theilungen mit Intervallen $\delta_i \leqq \delta$; und dies ist der zu beweisende Satz.

Die letzte Forderung lässt sich aber in der That erfüllen. Nennen wir nämlich $Y'_\varkappa$ und $y'_\varkappa$ die beiden Functionswerthe in den Grenzen des Intervalls $\delta'_\varkappa$, der Grösse nach geordnet, so wird wenn $M'_\varkappa - Y'_\varkappa = y'_\varkappa - m'_\varkappa = 0$ ist, unter allen Umständen $\Sigma_j D''_{\varkappa j} \geqq \Delta'_\varkappa$; wenn aber wenigstens eine der Differenzen $M'_\varkappa - Y'_\varkappa$, $y'_\varkappa - m'_\varkappa$ einen von Null verschiedenen Werth $\tau'_\varkappa$ hat, so wird man eine Grösse $\varepsilon'_\varkappa$ so bestimmen können, dass jedesmal, wenn alle $\delta''_{\varkappa j} \leqq \varepsilon'_\varkappa$ sind, $\Sigma_j D''_{\varkappa j}$ der Grösse $\mathsf{M}'_\varkappa - m'_\varkappa + \tau'_\varkappa$ beliebig nahe kommt, oder sie übertrifft, also sicher $\geqq \Delta'_\varkappa$ wird. Wählt man demnach δ nicht grösser als die kleinste der Grössen $\varepsilon'_\varkappa$, so wird $\Sigma D''_{\varkappa j} \geqq \Sigma\Delta'_\varkappa$.

Auf den hiermit bewiesenen Satz lässt sich sodann das an die Spitze gestellte allgemeinere Theorem zurückführen. Man bezeichne mit $\varphi(x)$ eine Function, die aus einer Function $f(x)$ mit beschränkter Schwankung dadurch entsteht, dass man alle äusseren Sprünge beseitigt (Nr. 4), und mit

$$\nu = 2\mu - \mathsf{M} = \lim \Sigma \Delta_i^\varphi = \lim \Sigma D_i^\varphi$$

ihre Gesammtschwankung. Ferner sei h_σ die Summe der absoluten Werthe aller *äusseren* Sprünge von $f(x)$, die $\geqq \sigma$ sind, und $f_\sigma(x)$ eine Function, die aus $\varphi(x)$ hervorgeht, wenn man *diese* Sprünge wieder einschaltet. Man erkennt dann ohne Weiteres, dass ν und $\nu + 2h_\sigma$ die untere und obere Schranke der Unbestimmtheitsgrenzen von $\Sigma D_i^{f_\sigma}$ sind. Da nun die Summe der äusseren Sprünge absolut convergirt, so kann man zur Grenze $\sigma = 0$ übergehen; und da $\lim h_\sigma = \mathsf{M} - \mu$ (Nr. 4, S. 303), so ergibt sich der zu beweisende Satz. Ueberdies sieht man, dass für alle Folgen von Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen, bei denen

$$\text{wird,}\quad \left.\begin{array}{l} \lim \Sigma\Delta_i = \mu \quad \text{oder} \quad \lim \Sigma\Delta_i = \mathsf{M} \\ \lim \Sigma D_i = \nu \quad \text{und} \quad \lim \Sigma D_i = \mathsf{M} \end{array}\right\} \tag{14}$$

ist.

Hat endlich $f(x)$ keine beschränkte Schwankung, gibt es also keine obere Schranke für $\Sigma\Delta_i$, so kann es auch keine obere Schranke für die Summen ΣD_{ij} geben.

Hiermit ist der aufgestellte Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

8) Der unter 7) behandelte Satz lässt sich noch etwas anders wenden, derart, dass man ein brauchbares Kriterium für die Zugehörigkeit einer vorgelegten Function zu unserer Classe erhält. Ein in vielen Fällen brauchbares Kriterium ist zwar schon in unserer Definition dieser Functionen, in dem Satze der Nr. 1, enthalten. Dieser setzt indessen voraus, dass man wenigstens für *eine* Folge von Theilungen ein Mittel hat, die Schwankungen der Function in den zugehörigen Intervallen abzuschätzen. In dem folgenden Kriterium tritt an Stelle dieser Annahme die andere, dass man die Sprungstellen kennt.

Damit die (in einem bestimmten Intervall definirte) Function $y = f(x)$ eine beschränkte Schwankung hat, ist nothwendig und hinreichend, dass

1) *überall die Grenzwerthe $f(x+0)$ und $f(x-0)$ existiren,*

2) *die Summe der äusseren Sprünge (diese absolut genommen) endlich ist,*

3) *alle Summen $\Sigma D_i = \Sigma |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$, die zu einer Folge von Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen gehören, unterhalb einer endlichen Grösse G bleiben.*

Bei den Functionen, die den Bedingungen 1) und 2) genügen, ist nämlich die Möglichkeit völlig ausgeschlossen, dass die Summen ΣD_i eine einzelne Unbestimmtheitsgrenze im Endlichen haben könnten. Die Unbestimmtheitsgrenzen sind vielmehr, wie aus dem unter 7)

geführten Beweise hervorgeht, entweder beide zugleich endlich, oder sie vereinigen sich in dem Werthe ∞.

9) Der in Nr. 7) bewiesene Satz zeigt, dass unsere „Functionen mit beschränkter Schwankung" identisch sind mit den „fonctions à variation bornée" des Herrn C. Jordan. Wir können daher dessen Untersuchung nunmehr den Satz entnehmen:

Es ist nicht nur (wie selbstverständlich) die Summe einer monoton zunehmenden endlichen Function $f_1(x)$ und einer monoton abnehmenden endlichen Function $f_2(x)$ eine Function von beschränkter Schwankung, sondern es kann auch umgekehrt jede Function $f(x)$ von beschränkter Schwankung in dieser Weise zerlegt werden (natürlich auf unendlich viele Arten).

Insbesondere ist jede Function mit bestimmter Gesammtschwankung und jede stetige Function mit endlicher Gesammtschwankung die Summe zweier monotoner Functionen derselben Eigenschaft.

Es ergibt sich dies unmittelbar aus den in Nr. 4) angestellten Betrachtungen.

Beschränken wir uns auf den allgemeinen Fall, und verstehen wir, wie in Nr. 4), unter M_a^x die obere Schranke der Schwankungssummen im Intervall von a bis x, so haben wir in den Formeln

$$\tag{15} \begin{aligned} f_1(x) &= \tfrac{1}{2}\left(f(x) + \mathsf{M}_a^x\right), \\ f_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left(f(x) - \mathsf{M}_a^x\right) \end{aligned}$$

eine Zerlegung der verlangten Art.

Natürlich können wir diesen Gedanken mit dem in Nr. 5) und 6) durchgeführten verbinden, und so die Function $f(x)$ in vier Functionen von einfacheren Eigenschaften zerlegen.

10) Das über die Summen ΣD_i Gesagte lässt sich mit geringen Aenderungen in den Sätzen und Beweisen auf die ähnlich gebildeten Summen

$$\sum\sqrt{\delta_i^2 + D_i^2} = \sum\sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$$

übertragen. Ueberdies erkennen wir, dass beide Arten von Summen im Grenzfall gleichzeitig endlich oder unendlich bestimmt oder unbestimmt sind. Von besonderem Interesse ist auch hier wieder der Fall, wie sich ein bestimmter endlicher Grenzwerth L, oder mit genauerer Bezeichnung

$$\tag{16} L_a^b = \lim_{\delta=0} \sum\sqrt{\delta_i^2 + D_i^2}$$

einstellt. Indem wir x und $y = f(x)$ als rechtwinklige Coordinaten

in einer Ebene auffassen, nennen wir, mit Scheeffer, den genannten Grenzwerth vorläufig „die Länge der Curve $y = f(x)$", und wir sagen in diesem Falle, die „Curve" sei rectificirbar. *Die rectificirbaren Curven $y = f(x)$ entsprechen demnach den Functionen $f(x)$ von bestimmter Gesammtschwankung.*

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Rectificirbarkeit einer Curve $y = f(x)$ stellen sich uns also in doppelter Gestalt (I, II) dar:

I. a) Die Schwankungssummen $\Sigma \Delta_i$ müssen bei *einer* Folge von Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen durchweg endlich bleiben (Nr. 1).

b) Es dürfen keine äusseren Sprünge vorkommen (Nr. 3). —

II. a) Es müssen überall die Grenzwerthe $f(x+0)$, $f(x-0)$ existiren.

b) Es dürfen keine äusseren Sprünge vorhanden sein.

c) Bei *einer* Folge von Theilungen mit schliesslich unendlich klein werdenden Intervallen müssen die Summen ΣD_i oder auch die Summen $\sum \sqrt{\delta_i^2 + D_i^2}$ endlich bleiben (Nr. 8)*). —

Die letzte Bedingung IIc) kann ersetzt werden durch zwei Bedingungen:

c_1) Es muss die Summe der absoluten Werthe aller Sprünge

$$S^{(\psi)} = |f(a+0) - f(a)| + \sum_a^b |f(x+0) - f(x-0)| + |f(b) - f(b-0)|.$$

eine endliche Grösse sein.

c_2) Die in Nr. 5 definirte *stetige* Curve $y = \varphi(x)$ muss eine endliche Länge $L^{(\varphi)}$ haben (S. IIc).

Es wird dann

$$L = L^{(\varphi)} + S^{(\psi)}\text{**}). \tag{16}$$ —

Interessante Systeme von hinreichenden aber nicht nothwendigen Bedingungen findet der Leser in der erwähnten Abhandlung Scheeffers.

Wegen weiterer *Beispiele* verweisen wir ebenfalls auf diese Arbeit, sowie auf eine Abhandlung von Harnack (Math. Ann. Bd. 24, S. 225), worin eine besonders interessante monoton wachsende stetige Function ausführlich besprochen wird.

---

*) II ist im Wesentlichen das Theorem II bei Scheeffer. Von den fünf Bedingungen, die dort aufgezählt werden, hat Scheeffer die dritte selbst noch als überflüssig erkannt; sie ist es aber nicht nur, weil sie in der zweiten, sondern auch, weil sie in der vierten enthalten ist; und die vierte ist selbst überflüssig, weil sie eine Folge der fünften ist. Auch die Beschränkung auf Folgen in einander eingeschalteter Theilungen ist nicht nöthig für die Geltung des Satzes.

**) Dies ist Scheeffers Theorem III.

11) Der in der vorigen Nr. zur Anwendung gekommene Curvenbegriff ist nicht ganz einwandsfrei. Es werden nämlich ohne Noth, d. h. ohne dass irgendwie eine grössere Allgemeinheit erreicht würde, zwei Eigenschaften aufgegeben, die man an den gewöhnlich betrachteten „Curven" vorfindet: der Zusammenhang und der Charakter des Inbegriffs der Curvenpunkte als einer perfecten Menge*). Man kann indessen diesen Einwand sofort beseitigen, wenn man an allen Sprungstellen von $f(x)$ die von den Punkten $\big(x,\ f(x-0)\big)$ und $\big(x,\ f(x+0)\big)$ begrenzte, geradlinige Strecke einschaltet und der „Curve" hinzurechnet**). x und y werden dann, wie man leicht erkennt, beide stetige Functionen einer und derselben Grösse $s = s(x)$, die an allen Stetigkeitsstellen von $f(x)$ mit der Grösse L_α^x übereinstimmt, und auf den Strecken $f(x-0)\cdots f(x+0)$ ebenso wächst wie $|y - f(x-0)|$.

Die letzte Bemerkung zeigt den Weg, den man zu gehen hat, wenn man die Sätze der Nr. 10 auf beliebige Curven der Ebene oder oder des Raumes ausdehnen will.

Wir nennen eine ganz im Endlichen enthaltene Menge von Punkten (x, y, z) des Raumes dann ein *„einfaches Curvenstück"*, wenn sich ihre Punkte den Punkten einer Strecke $t = a \ldots t = b$ eindeutig-umkehrbar und stetig zuordnen lassen; und wir nennen *„Sehnenpolygon"* schlechtweg jedes zwischen den Endpunkten A $(t = a)$ und B $(t = b)$ ausgespannte geradlinige Polygon, dessen Seiten eine endliche Zahl von auf einander folgenden (zu wachsenden Werthen von t gehörigen) Punkten P_i, P_{i+1} der Curve verbinden. Dann können wir sagen:

Wenn bei einer Folge von Sehnenpolygonen mit schliesslich unendlich klein werdenden Seiten, die zwischen den Endpunkten A und B eines einfachen Curvenstücks ausgespannt sind, die Summe der Seitenlängen durchweg unterhalb einer endlichen Grösse bleibt, so convergirt diese Summe gegen einen bestimmten Grenzwerth, der zugleich die obere Schranke für den Umfang aller möglichen Sehnenpolygone ist.

Gegen denselben Grenzwerth convergirt dann auch der Umfang des Sehnenpolygons, und zwar gleichmässig, in jeder anderen Folge der beschriebenen Art.

Wir sagen in diesem Falle, das Curvenstück sei „rectificirbar", und bezeichnen, wenn P einen zwischen A und B gelegenen Curvenpunkt bedeutet, die Grösse

$$s = L_A^P = \lim \sum_A^P \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$$

*) S. Cantor, Math. Annalen Bd. 21, S. 576, 590.

**) Vgl. Scheeffer. a. a. O. S. 51, Anmerkung.

als *Bogenlänge* des Curvenstücks zwischen A und P. Wir können dann noch hinzufügen:

Die Coordinaten x, y, z eines Punktes P, der ein rectificirbares einfaches Curvenstück $A \ldots B$ durchläuft, sind stetige Functionen mit endlicher Gesammtschwankung sowohl des Parameters t als auch des Bogens s.

Bemerkt sei noch, dass die Convergenz der Sehnenpolygone gegen den Grenzwerth L_A^P auch gleichmässig ist in Bezug auf jede Lage des Punktes P zwischen A und B, sowie dass von den beiden Parametern s und t (s. oben) jeder eine stetige monoton wachsende Function des anderen ist.

Aus einer abzählbaren Menge von rectificirbaren einfachen Curvenstücken setzt sich schliesslich die allgemeinste „Raumcurve" zusammen, bei der überhaupt noch von einer Bogenlänge die Rede sein kann.

12) Die Anwendung des Längenbegriffs in solchen Fällen, in denen die Integraldarstellung des Bogens keinen Sinn hat, ist nicht unbestritten geblieben. Allerdings beziehen sich die erhobenen Einwände weniger auf den Kern der Sache, als auf die gewählte Bezeichnung, nämlich auf die Ausdrücke „Curve" und „Bogenlänge"; indessen ist die Terminologie, d. i. die Umgrenzung der Begriffe, durchaus nichts Gleichgültiges; und da noch ganz neuerdings ein hervorragender Mathematiker den erwähnten Bedenken Gewicht beigelegt hat, so mag es mir gestattet sein, vorzubringen, was meiner Meinung nach darauf zu erwidern ist.

P. Dubois-Reymond hat Scheeffer gegenüber hervorgehoben dass der Curvenbegriff, wie er in der Geometrie, der Mechanik und der Variationsrechnung heimisch und erforderlich sei, die Differentiirbarkeit voraussetze*). Dies ist gewiss theilweise richtig; man darf aber nicht übersehen, dass wir einen allgemein annehmbaren Curvenbegriff zur Zeit überhaupt nicht besitzen. Es haben sich vielmehr, verschiedenen Forschungsrichtungen entsprechend, verschiedene mehr oder weniger deutlich umschriebene Curvenbegriffe herausgebildet. So ist der Curvenbegriff der gewöhnlichen analytischen Geometrie, wo man z. B. auch von imaginären Curven zu reden pflegt, sicher ein anderer, als der, der bei den sogenannten Randwerthaufgaben zur Verwendung kommt, und dieser ist wieder verschieden von dem Begriff der Curve als eines Integrationswegs auf einer Riemann'schen Fläche. Gerade in dem letzten *wichtigen* Fall, wie wohl auch meist in der

*) Acta Mathematica Bd. 6, S. 167. Die gelegentlich vertretene Ansicht, dass zur „Curve" (wie überhaupt zur Geometrie) die sogenannte Anschaulichkeit gehöre, hat Dubois-Reymond nicht geltend gemacht und ganz gewiss auch nicht getheilt. Ein so verschwommener Begriff gehört eben gar nicht in die Mathematik.

Analysis situs, spielt die Differentiirbarkeit gar keine Rolle*). Aber wenn auch solche Beispiele nicht schon vorhanden wären, so würden wir es doch nicht für zulässig halten, unter Hinweis auf den derzeitigen Zustand der Wissenschaft der Freiheit der Begriffsbildung Schranken ziehen zu wollen.

Noch weniger verständlich ist uns Dubois-Reymond's Einwand gegen die erweiterte Anwendung des Begriffs der Bogenlänge. Es sei vonnöthen zu zeigen, dass eine „Curve" nicht auch zwei verschiedene „Längen" haben könne, dass nicht bei anderen Annäherungsverfahren, zum Beispiel durch geeignet gekrümmte Kreisbogen, eine andere Länge herausgebracht werden könne als bei Verwendung der Sehnenpolygone.

Die ursprüngliche und zugleich die elementarste Definition der Bogenlänge ist doch jedenfalls auch in den gewöhnlichen Fällen die durch das Sehnenpolygon, das ja (allerdings nicht ausschliesslich) bereits von Euclid zur Bestimmung des Kreisumfanges verwendet worden ist. Alle anderen Processe, die zu demselben Resultat führen, wie

$$\int dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

und die von Dubois-Reymond erwähnten (die genauer zu definiren der verdiente Forscher leider unterlassen hat) haben Dem gegenüber einen abgeleiteten Charakter. Sie stellen Sätze dar, die man beweisen muss, und die bei näherer Prüfung eine sehr verwickelte Beschaffenheit zeigen. Das Fortbestehen der Definition nun von dem Fortbestehen solcher aus ihr *und anderen* Forderungen gezogener Folgerungen abhängig machen zu wollen, wäre unseres Erachtens geradezu ein logischer Fehler. Es ist als wollte man ein Dreieck dann „rechtwinklig" nennen, wenn ein Winkel und die Summe der beiden anderen je einem Rechten gleich ist.

Wir können daher nicht umhin, die Anwendung des Längenbegriffs auf Curven ohne Tangente für völlig gerechtfertigt zu halten; und wir müssen uns der von Scheeffer geäusserten Ansicht anschliessen, dass die üblich gewordene Definition des Bogens durch ein bestimmtes Integral eine sachlich nicht zu begründende Beschränkung enthält.

Bemerkt sei noch, dass Herr C. Jordan, dem die Scheeffer'sche Untersuchung offenbar entgangen ist, zu ganz derselben Auffassung der Bogenlänge gelangt ist, wie Scheeffer.

Bonn, im April 1895.

*) Pringsheim, Sitzungsber. der k. Bayr. Ak. Bd. 25 (1895), S. 49.

Mathematatische Theorie der Diffraction.

(Mit einer Tafel.)

Von

A. Sommerfeld in Göttingen.

Die Theorie der Diffraction, wie sie von Fresnel begründet und von Kirchhoff analytisch präcisirt ist, genügt aus verschiedenen Gründen nicht den Anforderungen der mathematischen Strenge. Einige Einwendungen dieser Art habe ich bereits früher*) vorgebracht. Ihre relativ gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung verdankt diese Theorie lediglich dem Umstande, dass die Wellenlänge des Lichtes eine sehr kleine Grösse ist. Für die Behandlung Hertz'scher Schwingungen und akustischer Wellen, deren Wellenlänge bedeutend grösser ist, muss sie sich als ganz unbrauchbar erweisen. Auch in der Optik giebt es Bedingungen, unter denen die ältere Beugungstheorie nicht mehr ausreicht. Dem gegenüber gebe ich hier eine mathematisch strenge Behandlung, welche lediglich auf den durch die elektromagnetische Theorie sicher gestellten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen fusst. Dabei aber muss ich mich auf die allereinfachsten Fälle beschränken, weil es von vornherein aussichtslos scheint, Probleme von so ausserordentlicher Complicirtheit, wie sie die gewöhnliche Optik zu behandeln vorgiebt, mathematisch befriedigend zu lösen. Auf eine Arbeit des Herrn Poincaré**), welche gleichfalls mit der älteren Theorie bricht, komme ich später zu sprechen.

§ 1.

Allgemeine Problemstellung.

Wir betrachten einen optischen Zustand, wie er sich bei Anwesenheit eines leuchtenden Punktes unter dem Einfluss eines fremden Körpers ausbildet. Die (elektrischen) Componenten des Lichtvectors

*) Zur mathematischen Theorie der Beugungserscheinungen. Göttinger Nachr. 1894. Nr. 4.

**) Sur la polarisation par diffraction. Acta Math. Bd. 16.

bezeichnen wir mit X, Y, Z. Dann bestehen die Differentialgleichungen:

$$A^2 \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \Delta X, \quad A^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = \Delta Y, \quad A^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = \Delta Z.$$

Dazu kommt die sog. Incompressibilitätsbedingung:

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Die Abhängigkeit von t können wir ein für allemal specialisiren. Wir nehmen an, der Zustand sei stationär periodisch und das Licht einfarbig. Die Periode der Lichtschwingung heisse τ. Dann darf man X, Y, Z in der Form annehmen:

$$X = \Re e\left(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}}\, \Xi\right), \quad Y = \Re e\left(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}}\, \mathsf{H}\right), \quad Z = \Re e\left(e^{\frac{2i\pi t}{\tau}}\, \mathsf{Z}\right).$$

wo Ξ, H, Z von t unabhängige Functionen der räumlichen Coordinaten sind, welche den Gleichungen genügen:

$$\Delta \Xi + k^2 \Xi = 0, \quad \Delta \mathsf{H} + k^2 \mathsf{H} = 0, \quad \Delta \mathsf{Z} + k^2 \mathsf{Z} = 0,$$

$$\frac{\partial \Xi}{\partial x} + \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial y} + \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial z} = 0.$$

Die hier eingeführte Constante k ist gleich $\frac{2\pi A}{\tau}$. Man nennt $\frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge des Lichts.

Um weitere einfache Bedingungen für Ξ, H, Z zu bekommen, nehmen wir an, der fremde Körper sei ein ebener, unendlich dünner, undurchsichtiger Schirm. Die Ebene des Schirmes sei die x, z-Ebene. Wir bezeichnen den Schirm mit S, seine Randcurve mit C. Unter Undurchsichtigkeit verstehen wir, dass das Material des Schirmes ein vollkommener Leiter für die Elektricität sei. Alsdann ergiebt die Lichttheorie, dass die in die Ebene des Schirmes fallenden (elektrischen) Componenten in Punkten des Schirmes verschwinden, dass also auf $S: \Xi = 0$, $\mathsf{Z} = 0$. Weiter werden wir verlangen, dass der Lichtvector überall endlich sei, ausser in dem leuchtenden Punkte P. Wir wollen einen leuchtenden Punkt einfachster Art voraussetzen, nämlich annehmen, dass in P die Componenten des Lichtes unendlich werden, wie das Newton'sche Potential $\frac{1}{r}$ für $r = 0$. Wir nennen dann P einen einfachen Pol. Dazu kommt noch eine auf das Unendliche bezügliche Forderung.

Die Bedingungen für Z sind daher folgende:

a) $\Delta \mathsf{Z} + k^2 \mathsf{Z} = 0$ im ganzen Raume.

b) $\mathsf{Z} = \infty$ wie $\frac{1}{r}$ in P, sonst überall endlich.

c) $\mathsf{Z} = 0$ in S.

Analoge Bedingungen bestehen für Ξ. Die dritte Componente H ist durch die Incompressibilitätsbedingung mitbestimmt.

Eine so einfache Grenzbedingung, wie die vorliegende (c) wird man nach dem *Symmetrieprincipe* zu befriedigen versuchen; man wird also den leuchtenden Punkt in Bezug auf die Ebene von S spiegeln. Dadurch würde eine zweite Unendlichkeitsstelle von Z in dem Spiegelpunkte P' entstehen. Die Bedingung b) untersagt uns aber, eine solche irgendwo im Raume zu schaffen.

In dem gewöhnlichen Raume ist für den Spiegelungsprocess kein Platz. Wir construiren daher einen doppelt überdeckten Raum, in welchem er möglich wird.

Einen solchen *Riemann'schen Doppelraum* erzeugen wir uns auf folgende Weise. Wir denken uns den gewöhnlichen Raum in zwei Exemplaren angefertigt, welche wir beide längs der Fläche von S aufschneiden und wechselweise an einander fügen. Die Randcurve C bildet für diesen Doppelraum eine Verzweigungslinie.

Wir betrachten nun eine Function u, welche in dem Doppelraume eindeutig ist, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genügt und in dem einen Punkte P des Doppelraumes einen einfachen Pol besitzt. (An der entsprechenden Stelle $\overline{P}$ in dem anderen Exemplare des Raumes soll sie endlich bleiben). Die Function u ist durch die Beschaffenheit des Doppelraumes und durch die Lage ihres Poles bestimmt, wenn man noch eine auf das Unendliche sich beziehende Bedingung hinzufügt. Um die Abhängigkeit von der Lage ihres Poles anzudeuten, mögen wir sie als $u(P)$ schreiben.

Wir construiren nun den Spiegelpunkt P' von P in Bezug auf die Ebene von S; derselbe fällt jetzt in das zweite Exemplar des Raumes, wenn P in dem ersten liegt. Bilden wir die Differenz

$$v = u(P) - u(P'),$$

so genügt diese den für Z gestellten Bedingungen; denn sie wird nur an der einen Stelle P des physikalischen Raumes unendlich und sie verschwindet in S aus Symmetrierücksichten. Mithin giebt uns die zweiwerthige Function v eine Lösung unseres Beugungsproblemes. Man bemerke übrigens, dass v nicht auch gleichzeitig in den *ausserhalb* C gelegenen Punkten der Schirmebene verschwindet. Denn es liegen nur die Punkte *innerhalb* C symmetrisch zu P und P'.

Dass wir hier von einem Doppelraume sprechen, bedeutet, abstract zu reden, nichts Anderes, als dass wir die Function über das Gebiet, in dem sie einen physikalischen Sinn hat, hinaus analytisch fortsetzen und dass wir *den physikalischen Zweig der Function und seine analytische Fortsetzung gleichzeitig betrachten.*

Mathematisch interessanter wird das Problem noch, wenn wir es weiter specialisiren. Wir wollen nämlich nur solche Zustände betrachten,

welche von einer Coordinate (z) unabhängig sind. Wir müssen dann auch dem Schirm eine nach der z-Richtung symmetrische Gestalt geben, d. h. seine Begrenzungscurve C in Geraden ausziehen, welche der z-Axe parallel laufen. Ebenso müssen wir statt des *leuchtenden Punktes* eine der z-Axe parallele *leuchtende Linie* annehmen. Der *Riemann'sche Raum* reducirt sich dann auf eine *Riemann'sche Fläche*, von der *Verzweigungscurve* C kommen nur ihre Schnittpunkte mit der x, y-Ebene in Betracht, welche gewöhnliche *Verzweigungspunkte* werden, von der leuchtenden Linie nur der in der x, y-Ebene enthaltene Punkt. Für diesen werden wir ein Unendlichwerden von der Ordnung des zweidimensionalen Potentials $\log \frac{1}{r}$ vorzuschreiben haben. Die Differentialgleichung lautet nunmehr:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

Die exakte Lösung des so specialisirten Beugungsproblemes führt also auf die Aufgabe: *diese wohlbekannte Differentialgleichung auf Riemann'schen Flächen zu integriren.*

Bei dieser Fragestellung wird man unwillkürlich an die Theorie der complexen *algebraischen Functionen* erinnert, welche ja für den speciellen Fall $k = 0$ sich in die gesuchten Functionen einordnen würden. Können die Methoden, welche zur Aufstellung der algebraischen Functionen führen, auf unsern Fall übertragen werden? Direkt geht das jedenfalls nicht.

Bei der Gleichung $\Delta u = 0$ kann man bekanntlich die Bildung verzweigter Functionen auf die der eindeutigen zurückführen, indem man statt der reellen Function u die complexe $u + iv = w$ betrachtet und die symmetrischen Functionen der Werthe von w in übereinanderliegenden Punkten der Riemann'schen Fläche bildet. Diese symmetrischen Functionen werden natürlich in der schlichten Ebene eindeutig und genügen überdies wieder der Gleichung $\Delta u = 0$. Sie können daher als bekannt angesehen werden. Die Berechnung von u hängt dann nur noch von der Lösung einer algebraischen Gleichung ab.

Bei unserer Differentialgleichung fehlt uns zunächst der Begriff der conjugirten Function. Die symmetrischen Functionen der Werthe $u_1, u_2, \ldots u_n$ von u in übereinander liegenden Punkten der Riemann'schen Fläche sind natürlich auch hier in der einfachen Ebene eindeutig; aber sie sind nicht mehr Lösungen derselben Differentialgleichung. Das trifft vielmehr nur bei der *symmetrischen Function ersten Grades* $u_1 + u_2 + \cdots u_n$ zu. Diese kann in der Folge stets als bekannt angesehen werden; sie ist nämlich gleich der Lösung des entsprechenden Problems in der schlichten Ebene.

Dennoch ist die Analogie mit den algebraischen Functionen auch hier sehr nützlich. Wir werden nämlich einen Weg kennen lernen, auf welchem man aus einer Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ mit gewissen Eigenschaften geradezu eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ mit ähnlichen Eigenschaften herstellt.

Eine weitere Schwierigkeit bildet das *Verhalten unserer Functionen im Unendlichen.* Hier wird jede Lösung unserer Differentialgleichung *wesentlich singulär.* Es geht daher nicht an, zu verlangen, dass unsere Functionen auf der ganzen Riemann'schen Fläche mit Einschluss des Unendlich-Fernen stetig sind und der Differentialgleichung Genüge leisten. Vielmehr müssen wir uns die Ebene (bez. die Riemann'sche Fläche) durch einen Kreis mit sehr grossem Radius begrenzt denken und für Punkte dieses Kreises Randwerthe vorschreiben. Diese können vom theoretischen Standpunkte aus willkürlich angenommen werden. Wollen wir aber zu physikalisch brauchbaren Functionen kommen, so werden wir ganz bestimmte Randwerthe wählen müssen, welche sich aus der physikalischen Betrachtung ergeben.

§ 2.

Entwickelungen nach Bessel'schen Functionen.

Bevor wir zur Aufstellung specieller verzweigter Functionen schreiten, wollen wir einige allgemeine Eigenschaften der Lösungen unserer Differentialgleichung ableiten. Es soll sich um diejenigen *Reihenentwickelungen**) handeln, *welche den Potenzreihen der Potentialtheorie entsprechen.*

1. Es sei u eine irgendwie bekannte Lösung der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, welche in der Umgebung des Punktes $x = 0$, $y = 0$ eindeutig und stetig ist. Wir beschreiben um diesen Punkt einen Kreis mit dem Radius R, so dass im Innern und auf dem Rande desselben die Function denselben Charakter hat. Die Werthe von u auf diesem Kreise entwickeln wir in eine Fourier'sche Reihe mit dem Argumente $\varphi = \operatorname{artg} \frac{y}{x}$ was immer möglich ist, weil die stetigen Lösungen unserer Differentialgleichung nothwendig analytische Functionen sind**). Es ergebe sich:

$$u = \sum A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi.$$

Wir setzen diese Reihe in das Innere des Kreises R so fort, dass sie gliedweise der in Polarcoordinaten transformirten Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$

*) Diese Reihen sind nach ihrer formalen Seite bereits in dem mehrfach zu citirenden Buche von F. Pockels: Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891, aufgestellt. Vgl. Theil IV § 6.

**) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 214.

Genüge leistet und dass sie für $r = R$ gliedweise in die vorstehende Entwickelung übergeht. Dann müssen die Factoren von $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} m\varphi$ Bessel'sche Functionen mit dem Argumente kr und dem Index m sein, und zwar „Bessel'sche Functionen erster Art", da u für $r = 0$ der Voraussetzung nach endlich ist. Wir werden so zu der folgenden Reihe geführt:

$$(1)\qquad \begin{gathered} u_1 = \sum J_m(kr)\,\{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi\}, \\ \alpha_m = \frac{A_m}{J_m(kR)}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{J_m(kR)}. \end{gathered}$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass keine der Grössen $J_m(kR)$ verschwindet.

Hätten wir im Vorstehenden unter u eine Lösung der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ verstanden, so würden wir auf genau demselben Wege zu einer Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von r gekommen sein, in der Form:

$$(1')\qquad \begin{gathered} u = \sum r^m\,\{\alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi\}, \\ \alpha_m = \frac{A_m}{R^m}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{R^m}. \end{gathered}$$

Unsere Reihe (1) entspricht also *formal* der Potenzentwickelung (1') der Potentialtheorie.

2. Es sei der Punkt $x = 0$, $y = 0$ für die Function u ein $(n-1)$-facher Windungspunkt. Wir beschreiben um diesen Punkt einen Kreis mit dem Radius R so, dass im Innern und auf dem Rande desselben kein Unstetigkeitspunkt und ausser dem Nullpunkte kein weiterer Windungspunkt vorhanden ist. Auf der Peripherie dieses Kreises können wir die Function in eine Fourier'sche Reihe entwickeln, welche nach Vielfachen des Argumentes $\frac{\varphi}{n} = \frac{1}{n} \operatorname{artg} \frac{y}{x}$ fortschreitet. Die Reihe laute:

$$u = \sum A_m \cos \frac{m}{n}\varphi + B_m \sin \frac{m}{n}\varphi.$$

Diese Reihe setzen wir in's Innere des n-fach überdeckten Kreises nach der Bedingung fort, dass sie gliedweise der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ Genüge leisten solle. Dann müssen die Coefficienten von $\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \frac{m}{n}\varphi$ Bessel'sche Functionen mit dem Argumente kr und dem Index $\frac{m}{n}$ sein, und zwar „Bessel'sche Functionen erster Art". So kommen wir zu der folgenden Entwickelung:

$$(2)\qquad \begin{gathered} u_1 = \sum J_{\frac{m}{n}}(kr)\left\{\alpha_m \cos \frac{m}{n}\varphi + \beta_m \sin \frac{m}{n}\varphi\right\}, \\ \alpha_m = \frac{A_m}{J_{\frac{m}{n}}(kR)}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{J_{\frac{m}{n}}(kR)}, \end{gathered}$$

unter der abermaligen Voraussetzung, dass keine der Grössen $J_{\frac{m}{n}}(kR)$ verschwindet.

Dasselbe Verfahren würde uns bei einer Function u, welche der Potentialgleichung genügt, zu der Reihe:

$$(2') \qquad \begin{gathered} u = \sum r^{\frac{m}{n}} \left\{ \alpha_m \cos \frac{m}{n} \varphi + \beta_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right\} , \\ \alpha_m = \frac{A_m}{R^{\frac{m}{n}}}, \quad \beta_m = \frac{B_m}{R^{\frac{m}{n}}} \end{gathered}$$

geführt haben. Es entspricht also, wenigstens *formal*, die Reihe (2) der Potenzentwickelung (2') der Potentialtheorie.

3. Die Analogie ist aber keine bloss formale: *wir können zeigen, dass die Reihen* (1) *und* (2) *gerade so weit convergiren, wie die entsprechenden Potenzreihen, und dass sie die vorgelegte Function* u *wirklich darstellen.*

Zu diesem Zwecke untersuchen wir das Verhalten von $J_\nu(x)$ mit wachsendem Index ν, auf Grund der bekannten Reihendarstellung:

$$J_\nu(x) = \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2^2(\nu+1)} + \frac{x^4}{2^4 . 2!(\nu+1)(\nu+2)} - \cdots\right)$$

Ist $\nu + 1 > \frac{x^2}{4}$, so wird jedes folgende Glied der Reihe kleiner als das vorhergehende. Demnach folgt für reelle positive Werthe von x unter der Bedingung $\nu + 1 > \frac{x^2}{4}$

$$(3) \qquad J_\nu(x) < \frac{x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad J_\nu(x) > \frac{\vartheta_\nu x^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)},$$

wo ϑ_ν einen echten, von Null verschiedenen Bruch bedeutet, von der Beschaffenheit, dass $\vartheta_{\nu'} > \vartheta_\nu$, falls $\nu' > \nu$.

Prüfen wir darauf hin die Convergenz unserer Reihen, und zwar sogleich der Reihe (2), von der die Reihe (1) nur ein specieller Fall ist. Der Rest der Reihe von einem Gliede N ab sei

$$X_N = \sum_N^{\infty}{}^{(m)} \frac{J_{\frac{m}{n}}(kr)}{J_{\frac{m}{n}}(kR)} \left(A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi\right),$$

wobei wir N gemäss der Ungleichung $\frac{N}{n} + 1 > \left(\frac{kR}{2}\right)^2$ bestimmen und $r < R$ voraussetzen wollen. Dann ergiebt sich aus (3):

$$|X_N| < \frac{1}{\vartheta_{\frac{N}{n}}} \sum_N^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \left| A_m \cos \frac{m}{n} \varphi + B_m \sin \frac{m}{n} \varphi \right|.$$

Die Grössen A_m und B_m bleiben unterhalb einer festen Grenze, weil die ursprüngliche Fourier'sche Reihe convergirt. Daher wird:

$$|X_N| < M \sum_N^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \text{ oder auch } |X_N| < M' \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{N}{n}},$$

wo M und M' gewisse endliche Zahlen bedeuten, die von N unabhängig sind. Wir können mithin, indem wir N nöthigen Falls noch grösser nehmen, den Rest der Reihe (2) für alle Punkte $r < R$ beliebig klein machen.

Andrerseits ist die Summe der ersten N Glieder von (2) eine endliche Grösse immer dann, wenn R nicht Wurzel einer der N Gleichungen $J_{\frac{m}{n}}(kr) = 0$ $[m < N]$ ist, was wir einstweilen ausgeschlossen haben. Die *Convergenz* der Reihe (2) ist also unter dieser Voraussetzung bewiesen.

Wir müssen uns ferner überzeugen, dass unsere Reihe für $\lim r = R$ wirklich *in die gegebenen Werthe von u übergeht*. Die letzteren haben wir durch eine Fourier'sche Reihe dargestellt. Nun convergirt bekanntlich eine Fourier'sche Reihe absolut, wenn die dargestellte Function im Entwickelungsintervalle stetige erste Differentialquotienten hat. Dies ist aber von den Lösungen unserer Differentialgleichung bekannt*). Mithin können wir durch Wahl eines Werthes $m = M$, welcher überdies der Ungleichung $\frac{M}{n} + 1 > \left(\frac{kR}{2}\right)^2$ genügen möge, erreichen, dass

$$\sum_M^{\infty} \left| A_m \cos \frac{m}{n}\varphi + B_m \sin \frac{m}{n}\varphi \right| < \varepsilon \vartheta_{\frac{M}{n}}$$

wird, wo ϑ der in (3) vorkommende echte und von Null verschiedene Bruch sein möge. Dann wird der Rest der Reihe (2) von demselben Gliede M ab für $r \leq R$

$$|X_M| < \frac{1}{\vartheta_{\frac{M}{n}}} \sum_M^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{m}{n}} \left| A_m \cos \frac{m}{n}\varphi + B_m \sin \frac{m}{n}\varphi \right| < \varepsilon.$$

Andrerseits ist die Summe der ersten M Glieder der Reihe (2) eine stetige Function von r, welche stetig in die Summe der ersten M Glieder der Fourier'schen Entwickelung von u übergeht, wenn $r = R$ wird. Mithin haben wir

$$\lim_{r=R} |u - u_1| < \varepsilon + \varepsilon \,.\, \vartheta_{\frac{M}{n}},$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

*) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 214.

Die Functionen u und u_1 stehen in folgender Beziehung:

1. für $r < R$ gelten die Gleichungen:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta u_1 + k^2 u_1 = 0,$$

2. für $r = R$ wird $u = u_1$.

Ist der Kreis mit dem Radius R kein „ausgezeichnetes Gebiet"*) unserer Differentialgleichung, d. h. kein solches Gebiet, für welches die Randwerthaufgabe unbestimmt wird, so schliessen wir unmittelbar, dass für $r \leqq R$ überhaupt gilt: $u = u_1$. In diesem Falle ist auch sicher nicht $J_{\frac{m}{n}}(kR) = 0$, so dass unsere obige Beschränkung in Fortfall kommt. Im entgegengesetzten Falle können wir doch einen beliebig wenig verkleinerten Kreis mit dem Radius R' bestimmen, für den dieses nicht zutrifft. Denn es giebt unter den concentrischen Kreisen mit dem Radius $r < R$ nur eine endliche Anzahl, welche ein ausgezeichnetes Gebiet für unsere Differentialgleichung darstellen. Setzen wir nun im Vorhergehenden statt R überall R', so gelten unsere sämmtlichen Behauptungen sicher für diesen Kreis und es ist $J_{\frac{m}{n}}(kR') \neq 0$. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Jede Lösung unserer Differentialgleichung lässt sich in der Umgebung einer Stelle $x = a$, $y = b$, für welche u stetig ist, in eine Reihe von der Form (1) *oder* (2) *entwickeln, je nachdem die Function u im Punkte $x = a$, $y = b$ unverzweigt ist oder einen $(n - 1)$-fachen Windungspunkt besitzt; diese Reihe convergirt absolut im Innern eines Kreises, welcher den Punkt $x = a$, $y = b$ zum Mittelpunkte hat und bis an den nächsten Unstetigkeits- oder Verzweigungspunkt heranreicht.*

4. Wir betrachten die Werthe von u bei beliebigem festen Azimuthe $\varphi = \varphi_0$ als Function von $r : u = f(r)$, wobei wir annehmen wollen, dass die Function im Punkte $r = 0$ unverzweigt sei. Die Reihe (1) liefert uns eine Darstellung von f durch Bessel'sche Functionen, welche so lauten möge:

$$f(r) = \sum_0^\infty a_m J_m(kr), \tag{4}$$

Wir vergleichen den Charakter dieser Darstellung mit dem Charakter der Taylor'schen Reihe für dieselbe Function. Die Taylor'sche Reihe ist dadurch charakterisirt, dass sie, mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochen, die Function f und ihre n ersten Differentialquotienten im Punkte $r = 0$ richtig wiedergiebt. Ganz dasselbe behaupten wir von unserer Reihe (4).

Reihen von der Form (4) sind zuerst von Herrn C. Neumann für complexe Werthe des Argumentes untersucht worden. Wir entnehmen

*) Vgl. F. Pockels: l. c. pag. 37 und pag. 222.

seiner Arbeit das Resultat*), welches sich übrigens auch leicht aus den pag. 8 aufgestellten Grenzwerthen der Bessel'schen Functionen herleiten lässt: Man bildet den m^{ten} Differentialquotienten einer solchen Reihe für Punkte des Convergenzgebietes, indem man dieselbe m-mal *gliedweise* differentiirt.

Setzen wir in Gleichung (4) $r = 0$, so ergiebt sich, da $J_n(0) = 0$ für $n > 0$ und $J_0(0) = 1$ ist:

$$f(0) = a_0.$$

Sodann erhalten wir mit Rücksicht auf die bekannten Recursionsformeln**) der Bessel'schen Functionen:

$$2\frac{dJ_n(x)}{dx} = J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \quad [n > 0]$$

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = \qquad - J_1(x)$$

durch gliedweise Differentiation von (4)

$$(5) \qquad f'(r) = \frac{k}{2}\{a_1 J_0(kr) + (a_2 - 2a_0) J_1(kr) + (a_3 - a_1) J_2(kr) + (a_4 - a_2) J_3(kr) + \cdots\}.$$

Daraus folgt für $r = 0$

$$f'(0) = \frac{k}{2} a_1.$$

Durch abermalige Differentiation ergiebt sich:

$$f''(0) = \left(\frac{k}{2}\right)^2 (a_2 - 2a_0).$$

Allgemein erkennt man: durch n-malige Differentiation erhält man für $f^{(n)}(0)$ einen Ausdruck, zu welchem nur die $n+1$ ersten Glieder der Reihe (4) einen Beitrag liefern.

Andrerseits betrachten wir die mit dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede abgebrochene Reihe, d. h. die „Annäherungsfunction n^{ter} Ordnung"

$$F_n(r) = \sum_0^n a_n J_n(kr).$$

Berechnen wir für diese $F_n(0)$, $F_n'(0)$, ... $F_n^{(n)}(0)$, so bekommen wir genau dieselben Ausdrücke in den a_0, a_1 ... a_n, wie für $f(0)$, $f'(0)$ ... $f^{(n)}(0)$. Wir schliessen: $F_n(0) = f(0)$, ... $F_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$, d. h. die gegebene Function und die Annäherungsfunction stimmen im Punkte $r = 0$ mitsammt ihren n ersten Differentialquotienten überein. Geometrisch mögen wir dieses so ausdrücken: Die Annäherungscurve $F_n(r)$ hat mit der gegebenen Curve $f(r)$ im Nullpunkte eine n-fache Berührung gerade so, wie es von den Annäherungscurven der

*) C. Neumann: Theorie der Bessel'schen Functionen, Leipzig 1867, § 13.

**) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen: 2. Aufl. § 61. Gl. 44c).

Taylor'schen Reihe her bekannt ist. Somit haben wir in der That gezeigt, dass *unsere Entwickelung nach Bessel'schen Functionen und die Taylor'sche Entwickelung nach Potenzen die Annäherung der gegebenen Function in analoger Weise bewerkstelligen, nämlich durch einen von Glied zu Glied inniger werdenden Contact.*

Wir werden später sehen, dass unsere Reihen geradezu aus entsprechenden Potenzreihen hergeleitet werden können.

5. Neben die Reihenentwickelungen, welche für *das Innere eines Kreises* gelten, stellen wir solche, welche dann convergiren, wenn sich der Punkt *ausserhalb eines gewissen Kreises* befindet.

Es sei u eine Lösung unserer Differentialgleichung, welche im Innern des Kreises mit dem Radius R beliebige Verzweigungen und Unendlichkeitsstellen besitzen kann, welche ausserhalb desselben im Endlichen zunächst überall stetig und unverzweigt sein und im Unendlichen einen $(n-1)$fachen Windungspunkt besitzen möge. Wir markiren uns den Kreis mit dem Radius R auf sämmtlichen Blättern der Fläche und betrachten nur Werthe $r > R$. Hier müssen wir „*Bessel'sche Functionen zweiter Art*" heranziehen. Darunter verstehen wir, allgemein zu reden, eine Lösung der Bessel'schen Differentialgleichung, welche im Nullpunkte ∞ wird. Im allgemeinen Falle, wenn der Index ν der Bessel'schen Function keine ganze Zahl ist, können wir als solche die Function $J_{-\nu}$ wählen. Im Falle eines ganzzahligen ν wird diese mit $J_{+\nu}$ (bis auf den Factor $(-1)^\nu$) identisch. Um beide Fälle zu umfassen, führen wir als „Bessel'sche Function zweiter Art" eine Function U_ν ein, welche im folgenden Paragraphen abgeleitet wird und welche durch ein complexes Integral folgendermassen definirt werden kann:

$$U_\nu(x) = \frac{1}{2i}\int e^{ix\cos\alpha}\, e^{i\nu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} d\alpha; \tag{6}$$

die Integrationsvariable α geht dabei etwa von $-\beta + i\infty$ bis $+\beta - i\infty$ $[o < \beta < \pi]$. Im Falle eines ganzzahligen ν drückt sich diese Function durch die von Heine benutzten Functionen J_ν und K_ν folgendermassen aus:

$$U_\nu(x) = K_\nu(x) - \frac{i\pi}{2} J_\nu(x). \tag{7}$$

Nun entwickeln wir die gegebene Function u auf dem Kreise R in eine Fourier'sche Reihe:

$$u = \sum A_m \cos\frac{m}{n}\varphi + B_m \sin\frac{m}{n}\varphi.$$

Eine der Differentialgleichung gliedweise genügende Reihe, welche für $r = R$ gliedweise in die vorstehende Reihe übergeht, leiten wir daraus ab durch den Ansatz:

$$
(8)\qquad \begin{gathered}\sum_{0}^{\infty}{}^{(m)}\, U_{\frac{m}{n}}(kr)\left\{\alpha_m \cos\frac{m}{n}\varphi + \beta_m \sin\frac{m}{n}\varphi\right\},\\ \alpha_m = \frac{A_m}{U_{\frac{m}{n}}(kR)},\qquad \beta_m = \frac{B_m}{U_{\frac{m}{n}}(kR)}.\end{gathered}
$$

Um die Convergenz derselben zu prüfen, haben wir vor Allem Ungleichungen nöthig, welche den Ungleichungen (3) für $J_\nu(x)$ entsprechen, und welche uns gestatten, das Verhalten von $U_\nu(x)$ bei wachsendem ν abzuschätzen.

Wir machen in (6) die Substitution $\frac{x}{2}e^{i\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)} = z$, wobei sich ergiebt:

z-Ebene.

Fig. 1.

$$
2\,U_\nu = \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \int e^{-z+\frac{x^2}{4z}} z^{\nu-1}\,dz.
$$

Der Integrationsweg geht in einen dem nebenstehenden aequivalenten über. Lassen wir ν wachsen, so verschwindet derjenige Theil des Integrales, welcher im Innern des Einheitskreises verläuft. Wir haben daher

$$
\lim_{\nu=\infty} 2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu U_\nu = \lim_{\nu=\infty} \int_1^\infty e^{-z} e^{\frac{x^2}{4z}} z^{\nu-1}\,dz,
$$

oder, da alle Bestandtheile des Integranden positiv sind:

$$
\int_1^\infty e^{-z} z^{\nu-1}\,dz < 2\left(\frac{x}{2}\right)^\nu U_\nu < e^{x^2}\int_1^\infty e^{-z} z^{\nu-1}\,dz \quad (\text{im Limes } \nu=\infty).
$$

Die Ungleichung wird nicht geändert, wenn wir die untere Grenze 1 durch 0 ersetzen. So bekommen wir schliesslich im Limes $\nu=\infty$:

$$
(9)\qquad U_\nu > \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu \Gamma(\nu),\quad U_\nu < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^\nu e^{x^2}\Gamma(\nu).
$$

Die genauere Betrachtung zeigt ferner, dass man auch eine *endliche* Zahl ν angeben kann, so dass für alle grösseren Werthe unsere Ungleichungen (9) richtig sind.

Nunmehr trennen wir von der Reihe (8) ein Restglied X_N ab, wobei wir den Stellenzeiger N so bestimmen, dass für alle Werthe $\nu \geqq \frac{N}{n}$ die Ungleichungen (9) statthaben. Dann wird:

$$
|X_N| < \sum_N^\infty \frac{\left|U_{\frac{m}{n}}(kr)\right|}{\left|U_{\frac{m}{n}}(kR)\right|}\left|A_m\cos\frac{m}{n}\varphi + B_m \sin\frac{m}{n}\varphi\right| < e^{(kr)^2} M \sum_N^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{m}{n}},
$$

wo M den grössten Werth von $\left|A_m \cos\frac{m}{n}\varphi + B_m \sin\frac{m}{n}\varphi\right|$ bedeutet, oder auch, unter der Annahme $\infty > r > R$,

$$|X_N| < M'\left(\frac{R}{r}\right)^{\frac{N}{n}}.$$

Hier bedeutet M' eine von N unabhängige Zahl. Es kann also der Rest der Reihe (8) durch Wahl von N beliebig klein gemacht werden für alle Werthe $\infty > r > R$.

Andrerseits ist die Summe der ersten N Glieder in (8) sicher eine endliche Zahl, falls nicht gerade eine der Grössen $U_{\frac{m}{n}}(kR)$ verschwindet. Dies können wir vermeiden, indem wir statt des Kreises R einen etwas grösseren R' beschreiben, für den $U_{\frac{m}{n}}(kR') \neq 0$ ist. Die Convergenz der Reihe (8) ist daher bewiesen für das ganze Gebiet $\infty > r > R$.

Hätten wir dieselbe Aufgabe für eine Lösung u der Potentialgleichung behandelt, so wären wir auf demselben Wege zu einer Reihe gekommen, welche nach negativen Potenzen von r fortschreitet und für alle Werthe $r > R$ convergirt. Wir sehen:

Die Reihe (8) *entspricht nicht nur formal, sondern auch hinsichtlich ihrer Convergenz einer Reihe, welche nach Potenzen von $\frac{1}{r}$ fortschreitet.*

Die Analogie ist trotzdem keine vollständige mehr. In der Potentialtheorie können wir nämlich sofort schliessen, dass jene Reihe die Function u wirklich darstellt, falls wir noch die Voraussetzung hinzunehmen, dass u auch im Unendlichen stetig ist. Bei unserer Differentialgleichung ist dieses unmöglich. Denn der unendlich ferne Punkt ist hier, wie erwähnt, stets ein singulärer Punkt. Die Aufgabe: eine Function u, welche nur auf dem Kreise R gegeben ist, für Werthe $r > R$ der Differentialgleichung gemäss fortzusetzen, ist hier überhaupt unbestimmt. Man erkennt dies schon aus Folgendem: Nehmen wir für den Augenblick das Unendliche als unverzweigt an, so hätten wir statt (8) auch eine Reihe anschreiben können, welche nach den Heine'schen Functionen K_m fortschreitet und welche auf dem Kreise R gliedweise in die Fourier'sche Entwickelung von u übergeht. Auch diese würde convergiren für $r > R$, da die Ungleichungen (9) auch für die Functionen K richtig sind. Sie würde aber ersichtlich von der Reihe (8) verschieden sein. *Es kann daher keine Rede davon sein, dass* (8) *die Function u nothwendiger Weise wirklich darstellt.*

6. Um sicher zu sein, eine Entwickelung der vorgegebenen Function u zu erhalten, muss man vielmehr das Unendliche durch einen

zweiten Kreis $R_1 > R$ ausschliessen und eine Entwickelung für den so entstehenden Kreisring aufstellen, welche sich aus einer nach den Functionen J und einer nach den Functionen U fortschreitenden Reihe zusammensetzt. Die Coefficienten dieser Reihen bestimmen sich theils aus den Werthen, welche u für $r = R$ besitzt, theils aus denjenigen für $r = R_1$. Man beweist dann: die Reihe mit Bessel'schen Functionen erster Art convergirt für alle Werthe $r < R_1$, diejenige mit Bessel'schen Functionen zweiter Art für alle Werthe $r > R$. Die Summe beider convergirt also im Innern des Kreisringes und stellt dort wirklich die Function u dar. So gelangt man zur *Uebertragung des Laurent'schen Satzes in das Gebiet der Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$.

§ 3.

Uebergang von $\Delta u = 0$ zu $\Delta u + k^2 u = 0$.

Während sich so die *Methode der Potenzreihen* aus der Functionentheorie bei unserer Differentialgleichung mit geeigneten Modificationen aufrecht erhalten lässt, versagt die *Methode der algebraischen Berechnung verzweigter Lösungen*, wie im § 1 auseinandergesetzt ist, zunächst vollkommen. Wir werden von dieser Methode indirekt dennoch Nutzen ziehen, indem wir jetzt ein *Verfahren* angeben, *durch welches man aus einer Lösung der Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ *mit gewissen Eigenschaften eine Lösung der Differentialgleichung* $\Delta u + k^2 u = 0$ *mit entsprechenden Eigenschaften herleiten kann*. Daraufhin können wir die verzweigten Lösungen unserer Differentialgleichung aus den eindeutigen dennoch durch algebraische Operationen erhalten. Wir nehmen diese Operationen nur nicht an der Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$ direct vor, sondern an der entsprechenden Function u in der Ebene von $\Delta u = 0$ und übertragen das so erhaltene verzweigte Potential nach unserem Verfahren in die $\Delta u + k^2 u = 0$-Ebene.

Wir schlagen einen Umweg über die Theorie der *Kugelfunctionen* ein. Wir gehen aus von einer beliebigen complexen Function $f(\mathsf{Z})$ und beziehen die Z-Ebene stereographisch auf eine Kugel vom Radius 1. Der Mittelpunkt der Kugel liege im Nullpunkte der Z-Ebene und sei gleichzeitig Nullpunkt eines räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystems ξ, η, ζ. Die ζ-Axe stehe senkrecht auf der Z-Ebene, die ξ- bez. η-Axe falle mit der reellen bez. imaginären Axe der Z-Ebene zusammen. Projectionscentrum sei der Südpol der Einheitskugel, also der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = -1$. Die Beziehung zwischen Z-Ebene und Einkeitskugel ist bei diesen Festsetzungen gegeben durch die Gleichung:

$$(1) \qquad \mathsf{Z} = \frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1},$$

wenn wir noch die Kugelgleichung $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ hinzunehmen.

Die Function

$$f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}\right)$$

ist in bekannter Weise ein *zweidimensionales Potential* auf der Einheitskugel. Wir erhalten aus ihr eine Function, welche im ganzen Raume definirt ist und überdies der Differentialgleichung des *räumlichen Potentials* genügt, wenn wir allen Punkten eines und desselben durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Halbstrahles denselben Functionswerth beilegen, wie er dem Durchstossungspunkte des Halbstrahles mit der Einheitskugel zukommt. So gelangen wir zu der Function

$$(2) \qquad f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \varrho}\right), \quad \varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Ein räumliches Potential, welches eine homogene Function rechtwinkliger Coordinaten ist, bezeichnet man als *räumliche Kugelfunction* (solid spherical harmonic); beschränkt man sich auf Punkte der Einheitskugel, so spricht man von einer *Kugelflächenfunction* (surface spherical harmonic). In (2) haben wir also eine räumliche Kugelfunction vor uns (vom Grade 0, weil sie homogen vom 0^{ten} Grade ist). Wir erhalten weiter eine homogene Function — 1^{ten} Grades, welche gleichfalls der Potentialgleichung Genüge leistet, wenn wir den Raum mittelst reciproker Radien an der Einheitskugel transformiren. Es entsteht

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \varrho}\right).$$

Wir erniedrigen ferner den Grad um $1, 2 \ldots$ Einheiten durch einmalige, zweimalige ... Differentiation nach einer der Coordinaten, oder allgemeiner durch Differentiation nach einer beliebigen „Richtung"*). So bilden wir sehr allgemeine Kugelfunctionen beliebig hoher Ordnung.

Dieser Gedanke rührt in specieller Form von Maxwell*) her, welcher von der complexen Function $f = 1$ ausgehend die gewöhnlichen rationalen Kugelfunctionen ableitete, indem er über die Differentiationsrichtungen passend verfügte. Die hier benutzte Verallgemeinerung auf beliebige Functionen f hat Herr F. Klein**) in einer Vorlesung über Lamé'sche Functionen 1889—90 vorgetragen.

Wir legen für die Folge die Differentiationsrichtung beständig in die durch ihre Lage zur Z-Ebene allein ausgezeichnete ζ-Axe, bilden also (unter Hinzufügung eines geeigneten Zahlenfactors)

$$(4) \qquad \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \zeta^m} \frac{1}{\varrho} f\left(\frac{\xi + i\eta}{\zeta + \varrho}\right).$$

*) Vgl. Maxwell in seinem Treatise Cap. IX.

**) Vgl. F. Pockels l. c. pag. 31.

Um den unübersichtlichen Differentiationsprocess bequemer zu gestalten, formen wir diesen Ausdruck nach dem *Cauchy'schen Satze* um. Wir erhalten

$$(5) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int f\left(\frac{\xi+i\eta}{z+\varrho}\right)\frac{1}{(\zeta-z)^{m+1}}\frac{dz}{\varrho},$$

wo jetzt $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + z^2$ einzutragen ist. Das Integral ist, dem Cauchy'schen Satze gemäss auf einem geschlossenen Wege um den Punkt $z = \zeta$ in der Ebene der complexen Variabeln z herumzuführen, auf welchem man diesen Punkt zur Linken hat.

Wir bemerken noch, dass wir statt dessen auch einen beliebigen anderen Weg, der geschlossen ist und sich nicht auf einen Punkt zusammenziehen lässt, wählen dürfen. Auch dann noch werden wir eine (allerdings mit (4) nicht nothwendig identische) Kugelfunction $-m-1$. Grades bekommen*). Ferner können wir unter m auch eine negative ganze oder irgend eine beliebige Zahl verstehen. Im letzteren Falle müssen wir nur auf die Verzweigung des Factors $(z-\zeta)^{-m-1}$ bei

---

*) Der Beweis beruht auf Folgendem: Bezeichnen wir den Ausdruck (3) mit u, so besteht die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2}=0.$$

Bezeichnen wir denselben Ausdruck, wenn wir darin z statt ζ substituirt haben, mit u_z, so gilt auch für einen ganz beliebigen Integrationsweg (a, b) die folgende Identität:

$$(\mathrm{a}) \qquad \int_a^b \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right)\frac{dz}{(\zeta-z)^{m+1}}=0.$$

Nun ist

$$\int_a^b \frac{\partial^2 u_z}{dz^2}\frac{dz}{(\zeta-z)^{m+1}} = \left[\frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{1}{(\zeta-z)^{m+1}}\right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{(m+1)\,dz}{(\zeta-z)^{m+2}}$$

und

$$-\int_a^b \frac{\partial u_z}{\partial z}\frac{(m+1)\,dz}{(\zeta-z)^{m+2}} = -\left[u_z\frac{m+1}{(\zeta-z)^{m+2}}\right]_a^b + \int_a^b u_z\frac{(m+1)(m+2)\,dz}{(\zeta-z)^{m+3}}.$$

Für das auf der rechten Seite der letzten Gleichung stehende Integral aber können wir schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\int u_z\frac{dz}{(\zeta-z)^{m+1}}.$$

Ist der Integrationsweg ein geschlossener $(a=b)$, so verschwinden die in [ ] stehenden Ausdrücke. Wir schliessen daher aus Gleichung (a) auf die folgende:

$$(\mathrm{b}) \qquad \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\right)\int u_z\frac{dz}{(\zeta-z)^{m+1}}=0.$$

Wir bemerken noch des Späteren wegen, dass diese Gleichung auch für einen nicht geschlossenen Weg richtig ist, falls nur die [ ] Ausdrücke für die Grenzen a und b des Integrales verschwinden. Dies findet z. B. statt für $a=\infty$.

$z = \zeta$ und $z = \infty$ Rücksicht nehmen und als Integrationsweg etwa eine Doppelschlinge wählen, welche die Punkte $z = \zeta$ und $z = \infty$ in entgegengesetztem Sinne umkreist. So können wir Kugelfunctionen von beliebigem Grade definiren, welche zu f in einer einfachen Beziehung stehen.

Ist die Ausgangsfunction f verzweigt, so wird es auch die Kugelfunction sein. Jedoch entspricht die Verzweigung des Integranden nicht genau derjenigen von f. Durch die stereographische Projection haben wir nämlich die Verzweigungspunkte $\varrho = 0$, d. i. $z = \pm i\sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ eingeführt, welche der Ausgangsfuntion nicht zukommen. Wir können diese nachträglich fortschaffen, indem wir zu dem Integrale (5) das folgende hinzufügen, in welchem ϱ mit $-\varrho$ vertauscht ist:

$$(6) \qquad -\frac{1}{2\pi i}\int f\left(\frac{\xi + i\eta}{z - \varrho}\right)\frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}}\,\frac{dz}{\varrho}.$$

Geometrisch bedeutet dieses, dass wir die Z-Ebene erstens an dem Nullpunkte spiegeln, (d. h. Z mit $Z' = -Z$ vertauschen), zweitens von dem Nordpole der Einheitskugel aus stereographisch auf diese projiciren (d. h. $Z' = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$ setzen) und im Uebrigen alle die vorher beschriebenen Processe an der Function f vornehmen. Bezeichnen wir denjenigen Punkt, welcher auf solche Weise in den Punkt ξ, η, ζ der Kugel übergeführt wird, mit Z_1, so haben wir die zu (1) analoge Gleichung:

$$(1') \qquad Z_1 = \frac{\xi + i\eta}{\zeta - 1}.$$

Nun bilden die Kugelfunctionen für unseren Zweck nur ein Durchgangsstadium. Wir gelangen aber von den Kugelflächenfunctionen zu Lösungen unserer Differentialgleichung durch einen eigenthümlichen *Grenzübergang*. Wir lassen nämlich m in's Unendliche wachsen und gleichzeitig den Punkt ξ, η, ζ auf einem Meridiane der Einheitskugel in den Nordpol hineinrücken. Genauer ausgedrückt machen wir folgendes: Wir setzen:

$$(7) \qquad \xi = \frac{kx}{m}, \quad \eta = \frac{ky}{m}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

und verstehen unter x und y endliche, unter m eine in's Unendliche wachsende Grösse. Dann geht die Differentialgleichung der Kugelflächenfunctionen in die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ über. Die Grössen x, y werden rechtwinklige Coordinaten in der Ebene dieser Differentialgleichung. Daneben führen wir Polarcoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$(8) \qquad r^2 = x^2 + y^2, \quad e^{i\varphi} = \frac{x + iy}{r}.$$

Wegen (7) ergiebt sich für ζ der Ausdruck:

$$\zeta = \left(1 - \frac{k^2(x^2+y^2)}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{k^2 r^2}{2m^2} + \cdots \tag{9}$$

Um den Grenzübergang bei unsern Integralen übersehen zu können, machen wir auch für z eine analoge Substitution. Es empfiehlt sich:

$$z = i\sqrt{\xi^2+\eta^2}\cos\alpha = \frac{ikr}{m}\cos\alpha. \tag{10}$$

Dann wird

$$\begin{gathered} \varrho = \frac{kr}{m}\sin\alpha,\quad z \pm \varrho = \frac{kr}{m} e^{\mp i\alpha + \frac{i\pi}{2}},\quad \frac{-dz}{\varrho} = i\,d\alpha, \\ \frac{\xi+i\eta}{z\pm\varrho} = e^{i\left(\varphi - \frac{\pi}{2} \pm \alpha\right)},\quad \lim_{m=\infty} \frac{1}{(\zeta - z)^{m+1}} = e^{ikr\cos\alpha}. \end{gathered} \tag{11}$$

Aus dem Integral (5) entsteht

$$-\frac{1}{2\pi}\int f\left(e^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right) e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha \tag{12}$$

und aus der Summe der Integrale (5) und (6)

$$\frac{1}{2\pi}\int \left\{ f\left(e^{i\left(\varphi-\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right) - f\left(e^{i\left(\varphi+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\right)\right\} e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha. \tag{13}$$

Der in der z-Ebene geschlossene Weg geht in der α-Ebene in einen Integrationsweg über, dessen Anfangs- und Endpunkt sich möglicher Weise um 2π unterscheiden. Wenn sich der Integrationsweg in's Unendliche erstreckt, so ist er dort so zu bestimmen, dass das Integral einen Sinn hat. Von den Ausdrücken (12) und (13) weist man nun leicht nach, dass sie in der That, bei solcher Bestimmung des Integrationsweges, der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ genüge leisten, wodurch unser Grenzübergang nachträglich gerechtfertigt ist.

2. Unser Verfahren liefert uns aber zunächst nur sehr *specielle Functionen*, nämlich solche, *welche Verzweigungen und Unstetigkeitsstellen im Endlichen nur an der Stelle $x = 0$, $y = 0$ besitzen.* Es liegt dieses daran, dass jeder Punkt, welcher auf der Einheitskugel eine endliche Entfernung von dem Nordpole hat, bei unserm Grenzübergang unfehlbar in's Unendliche geworfen wird. Sei z. B. für unsere Ausgangsfunction Z' eine singuläre Stelle in der complexen Ebene, wobei wir voraussetzen $Z' \neq 0$ und $Z' \neq \infty$. Bei der Projection vom Südpol besteht zwischen der Variabeln Z und demjenigen Punkte r, φ, in

welchen Z durch unsern Grenzübergang übergeführt wird, nach Gleichung (1), (7) und (9) die Beziehung

$$(14) \qquad |Z| = \frac{kr}{m}.$$

Einem festen und von Null verschiedenen Werthe Z (z. B. dem Werthe $Z = Z'$) entspricht daher ein Punkt, dessen Abstand vom Nullpunkte

$$r = \frac{m|Z|}{k}$$

beim Grenzübergange in's Unendliche wächst. Andrerseits gilt bei der Projection vom Nordpole für denjenigen Punkt Z_1 der complexen Ebene, welcher in den Punkt r, φ verwandelt wird, nach Gleichung (1'), (7), und (9) die Beziehung:

$$(15) \qquad |Z_1| = \frac{m}{2kr}.$$

Einem festen und von Unendlich verschiedenen Werthe Z_1 (z. B. dem Werthe $Z_1 = Z'$) entspricht daher auch bei dieser Projection ein Punkt, dessen Abstand vom Nullpunkte

$$r = \frac{m}{2k|Z_1|}$$

beim Grenzübergange in's Unendliche wächst. Aus der Betrachtung der geometrischen Verhältnisse folgt dieses übrigens unmittelbar.

Um den singulären Punkt dennoch im Endlichen festzuhalten, müssen wir offenbar sein Bild auf der Einheitskugel, welches die Coordinaten ξ', η', ζ' haben möge, in demselben Maasse in den Nordpol hineinrücken lassen, wie wir m wachsen lassen. Ferner werden wir auch den Grad der Kugelfunction in Bezug auf dies Variabelntripel ξ', η', ζ' successive erniedrigen, indem wir erst eine Inversion, dann fortgesetzt Differentiationen ausführen. Wir erhalten dann in der Grenze $m = \infty$ statt des *einfachen* Integrales (12) oder (13) ein *complexes Doppelintegral*, in welchem das eine Integralzeichen die fortgesetzte Graderniedrigung in dem einen, das andere in dem anderen Variabelntripel bewirkt. Das Genauere soll aber der Kürze halber nur in speciellen Fällen (vgl. § 6) auseinander gesetzt werden.

§ 4.

Die Bessel'schen Functionen als einfachste Beispiele.

Wir leiten zunächst die Bessel'schen Functionen durch unser Grenzverfahren her. Wir werden sehen, dass dabei die folgenden Functionen in einander übergeführt werden: die Potenzen in der Z-Ebene, die zonalen bez. tesseralen Kugelfunctionen auf der Einheits-

kugel, die Bessel'schen Functionen in der Ebene der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. Die Resultate dieses Paragraphen sind nur theilweise neu und dienen wesentlich als Vorbereitung für das Folgende.

1. Wir beginnen mit der 0^{ten} Potenz der Z-Variabeln und nehmen $f=1$. Aus (5) pag. 332 erhalten wir eine Kugelflächenfunction $(-m-1)^{ten}$ Grades in dem folgenden Ausdrucke:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{1}{(\zeta-z)^{m+1}}\frac{dz}{\varrho},\quad \varrho^2=\xi^2+\eta^2+z^2,\quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.$$

Ein geschlossener Weg in der z-Ebene, welcher den Punkt $z=\zeta$ umkreist, ist äquivalent einem gleichzeitigen Umlauf um die beiden Punkte $\varrho=0$ d. h. $z=\pm i\sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Die Substitution (10) pag. 334 führt den Ausdruck über in

$$\frac{1}{2\pi}\int\frac{d\alpha}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\cos\alpha)^{m+1}}.$$

Der entsprechende Integrationsweg in der α-Ebene kann längs der reellen Axe von 0 bis 2π geführt werden, wenn $\zeta \neq 0$, sonst etwa von C bis D (vgl. die Fig. 2). Wir kommen hier auf die *gewöhnlichen zonalen Kugelfunctionen* und zwar gerade in der Laplace'schen Integraldarstellung*). Der Grenzübergang $m=\infty$ liefert in bekannter Weise eine Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, nämlich die *einfachste Bessel'sche Function:*

$$J_0(kr)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha$$

(Integrationsweg etwa von $\alpha=0$ bis $\alpha=2\pi$).

2. Wir nehmen $f=Z^\nu$ und verstehen unter ν eine beliebige positive Zahl. Aus Gleichung (5) pag. 332 ergiebt sich die entsprechende Kugelflächenfunction $-m-1^{ten}$ Grades:

$$\frac{(\xi+i\eta)^\nu}{2\pi i}\int\frac{(z+\varrho)^{-\nu}}{(\zeta-z)^{m+1}}\frac{dz}{\varrho}.$$

Verzweigungsstellen des Integranden sind die Punkte $z=\pm i\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, für welche $\varrho=0$, und der Punkt (oder richtiger die Punkte) $z=\infty$, für welche $z+\varrho=\infty$, oder $z+\varrho=0$ ist, je nachdem ϱ mit positivem oder negativem Vorzeichen gerechnet wird. Der Integrationsweg, den wir uns ursprünglich als einen Umlauf um den Punkt $z=\zeta$ denken, darf im allgemeinen Falle (wenn ν keine ganze Zahl ist) nur bis an, nicht bis über den Punkt $z=\infty$ gezogen werden. Machen wir die Substitution (10) von pag. 334, so ergiebt sich

*) Vergl. Heine, l. c. § 9, Gl. 5a.

$$(1)\qquad \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\xi+i\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\right)^{\nu}\int\frac{e^{i\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\,d\alpha}{(\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\cos\alpha)^{m+1}}$$

und nach Ausführung des Grenzüberganges

$$(2)\qquad \frac{e^{i\nu\varphi}}{2\pi}\int e^{ikr\cos\alpha}\,e^{i\nu\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\,d\alpha.$$

Der vorher beschriebene Integrationsweg geht in der α-Ebene etwa in den Weg (A) über. Die in der Figur schraffirten Gebiete I, II, III werden von denjenigen Stellen gebildet, wo $i\cos\alpha$ einen negativen reellen Theil besitzt. Indem wir den Weg (A) so bestimmt haben, dass seine unendlich fernen Theile in den Gebieten I und II verlaufen, haben wir dafür gesorgt, dass Ausdruck (2) für jedes positive reelle kr einen endlichen Sinn hat.

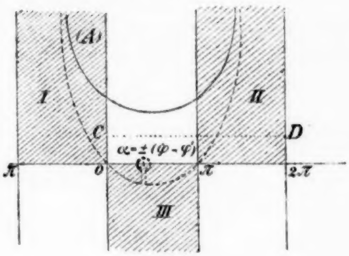


Fig. 2.

Der Ausdruck (1) ist eine *tesserale Kugelfunction*, der Ausdruck (2) wird direct gleich der Lösung

$$e^{i\nu\varphi}J_\nu(kr)$$

unserer Differentialgleichung. Die *Bessel'sche Function* J_ν erscheint hier in einer Integraldarstellung, welche für den speciellen Fall eines ganzzahligen ν, wo sich der Weg (A) auf die Durchlaufung der Strecke 0 bis 2π reduciren lässt, wohlbekannt*) ist.

Bemerken wir noch, dass, wenn wir vom Nordpole aus projiciren, wo wir wie oben Z durch Z_1 ersetzen wollen, aus $Z_1^{-\nu}$ (ν eine beliebige positive Zahl) in Folge von Gleichung (6) pag. 333 beim Grenzübergange entsteht:

$$-e^{-i\nu\varphi}\int e^{ikr\cos\alpha}\,e^{i\nu\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}\,d\alpha = -e^{-i\nu\varphi}.e^{i\nu\pi}J_\nu(kr).$$

3. $f=\lg Z$. Eine zugehörige Kugelfunction $(-m-1)^{\text{ten}}$ Grades lautet nach Gleichung (5)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\lg\left(\frac{\xi+i\eta}{z+\varrho}\right)\frac{1}{(\zeta-z)^{m+1}}\frac{dz}{\varrho}.$$

Die Verzweigungsstellen des Integranden sind dieselben, wie sub 2. Wir wollen die Punkte $z+\varrho=0$ und $z+\varrho=\infty$ durch einen Verzweigungsschnitt verbinden und als Integrationsweg eine Curve wählen, welche diesen Schnitt auf beiden Seiten dicht umschliesst. Der Loga-

*) Heine, l. c. Gl. (43, a).

rithmus unterscheidet sich auf den beiden parallelen Ufern um die additive Grösse $2\pi i$. Das Integral über den geschlossenen Weg reducirt sich daher auf $2\pi i$ multiplicirt in ein Integral, welches von $z+\varrho=\infty$ nach $z+\varrho=0$ einfach hinerstreckt ist, während der Logarithmus unter dem Integralzeichen in Fortfall kommt. Bei der Transformation (10) pag. 334 gehen die Grenzen $z+\varrho=\infty$ bez. 0 über in $\alpha=a+i\infty$ bez. $a'-i\infty$, wo a und a' unbestimmt sind.

Damit das Integral auch nach dem Grenzübergange einen Sinn behält, bestimmen wir die Grössen a und a' so, dass $a+i\infty$ im

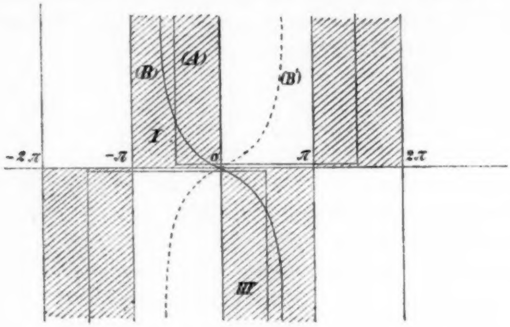


Fig. 3.

Gebiete I, $a'-i\infty$ im Gebiete III liegt. Wir wählen z. B. $a=-a'=-\beta$, $0<\beta<\pi$. Den so festgelegten Integrationsweg wollen wir als den Weg (B) bezeichnen, wobei wir noch stets dem Integrale über (B) den numerischen Factor $\frac{1}{2i}$ hinzufügen wollen. Unsere Kugelfunction $(-m-1)^{\text{ten}}$ Grades lautet dann:

$$\frac{1}{2i}\int\frac{d\alpha}{(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\cos\alpha)^{m+1}};$$

Der Grenzübergang liefert

$$U_0(kr)=\frac{1}{2i}\int d\alpha\, e^{ikr\cos\alpha}, \tag{3}$$

das Integral genommen über den Weg B.

4. $f=\lg Z\,.\,Z^n$. n bedeute eine ganze Zahl. Stellen wir die zugehörige Kugelfunction auf, so ergeben sich dieselben Verzweigungen in der z-Ebene, wie sub (3) im Falle $n=0$. Wir wählen daher denselben Integrationsweg wie dort und gelangen durch unsern Grenzübergang zu dem Producte

$$e^{in\varphi}\,U_n(kr),$$

wo

$$U_n(x)=\frac{1}{2i}\int e^{ix\cos\alpha}\,e^{in\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}\,d\alpha \quad \left(\text{Integrationsweg }(B)\right). \tag{4}$$

Wir bezeichnen die Ausdrücke (3) und (4) als *Bessel'sche Functionen zweiter Art.* Sie sind, wie aus der Integraldarstellung ersichtlich, bei reellem positivem x stets endlich und werden ∞ für $x = 0$. Um die Art des Unendlichwerdens zu finden, dient folgende Betrachtung:

Die Bessel'sche Function erster Art $J_\nu(x)$ und diejenige Bessel'sche Function, welche durch Vertauschung von ν mit $-\nu$ entsteht, drücken sich nach (2) folgendermassen aus:

$$\text{(5a)} \qquad 2\pi e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(x) = \int e^{ix\cos\alpha} e^{i\nu\alpha} d\alpha,$$

$$\text{(5b)} \qquad 2\pi e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(x) = \int e^{ix\cos\alpha} e^{-i\nu\alpha} d\alpha.$$

Der Integrationsweg ist der Weg (A). Wir können ihn insbesondere so gestalten, dass er aus den geradlinigen Verbindungsstücken der Punkte:

$$-\frac{\pi}{2} + i\infty, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} + i\infty$$

besteht. Vertauschen wir in der Gleichung (5b) $+\alpha$ mit $-\alpha$, so geht der vorher genannte Weg in den folgenden über:

$$-i\infty - \frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{\pi}{2} - i\infty.$$

Die Differenz der rechten Seiten von (5a) und (5b) ist (vgl. Fig. 3) identisch mit der Differenz der Integrale über die folgenden Wege:

$$+\frac{\pi}{2} - i\infty, \quad +\frac{\pi}{2}, \quad +\frac{3\pi}{2}, \quad +\frac{3\pi}{2} + i\infty$$

und

$$-\frac{3\pi}{2} - i\infty, \quad -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} + i\infty.$$

Daher haben wir

$$e^{\frac{i\nu\pi}{2}} J_\nu(x) - e^{-\frac{i\nu\pi}{2}} J_{-\nu}(x) = \frac{(e^{-i\nu\pi} - e^{+i\nu\pi})}{2\pi} \int e^{-ix\cos\alpha} e^{i\nu\alpha}\, d\alpha,$$

wo das Integral über den an der imaginären Axe gespiegelten Weg (B) (in der Fig. 3 der Weg B') zu nehmen ist.

Durch Vertauschung von $-i$ mit $+i$ ergiebt sich schliesslich das direct über B genommene Integral

$$\text{(6)} \qquad \frac{1}{2i} \int e^{ix\cos\alpha} e^{i\nu\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)} d\alpha = \pi \frac{J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi} J_\nu(x)}{2 \sin \nu\pi}.$$

Im Falle eines ganzzahligen $\nu = n$ ist die linke Seite direct gleich der oben definirten Function $U_n(x)$, während Zähler und Nenner der rechten Seite verschwindet. Fassen wir den Ausdruck links in diesem Falle als Grenzwerth desselben Ausdrucks für $\nu = n + \varepsilon$ bei ab-

nehmendem ε auf, so können wir seinen Werth durch Differentiation ableiten *). Man findet dann

$$U_n(x) = K_n(x) - \frac{i\pi}{2} J_n(x), \tag{7}$$

wo $K_n(x)$ die von Heine als Bessel'sche Function zweiter Art bezeichnete Grösse ist, für welche die Art des Unendlichwerdens in $x = 0$ untersucht ist. Insbesondere wird $U_0(x)$ unendlich wie $\log \frac{1}{x}$ für $x = 0$, oder in Zeichen

$$U_0(x) = \lg \frac{1}{x} + \cdots \quad \text{für } x = 0. \tag{8}$$

Man bemerke übrigens, dass diese Ableitung einer zweiten Lösung U_n der Bessel'schen Differentialgleichung aus den zwei zusammenfallenden Lösungen J_n und J_{-n} genau derjenigen Ableitung entspricht, welche in der Theorie der linearen Differentialgleichungen bei ganzzahliger Exponentendifferenz üblich ist.

Gehen wir, statt von $\mathsf{Z}^n \lg \mathsf{Z}$, von $\mathsf{Z}_1^{-n} \lg \mathsf{Z}_1$ aus, indem wir uns die complexe Ebene vom *Nordpole* aus projicirt denken, so erhalten wir durch das gleiche Verfahren die folgende Lösung unserer Differentialgleichung:

$$- e^{-in\varphi} e^{in\pi} U_n(kr).$$

5. Das Integral $U_\nu(x)$ wollen wir der Gleichmässigkeit wegen auch *im Falle eines beliebigen* ν als Bessel'sche Function zweiter Art einführen, wie es ja bereits in § 2 unter dieser Bezeichnung gebraucht wurde. Im Falle eines ganzzahligen ν sahen wir $e^{i\nu\varphi} U_\nu(kr)$ aus der complexen Function $\lg \mathsf{Z} \,.\, \mathsf{Z}^\nu$ entstehen durch Integration über einen geschlossenen Weg in der Ebene der z-Variabeln, welcher die Punkte $z + \varrho = 0$ und $z + \varrho = \infty$ umzog. Wir hätten einfacher sagen können: Jenes Product entsteht aus der Potenz Z^ν, wenn wir als Integrationsweg nicht jenen *geschlossenen* Weg, sondern eine vom Punkte $z + \varrho = \infty$ zum Punkte $z + \varrho = 0$ *einfach* verlaufende Curve benutzen. Diese Curve spielt nach der Anm. auf pag. 332 für uns die Rolle einer geschlossenen Curve, weil die dort aufgeführten [ ] Terme für $z + \varrho = 0$ und $z + \varrho = \infty$ verschwinden. In der α-Ebene geht sie in den Integrationsweg (B) über. Legen wir diesen Weg zu Grunde, so gilt unser obiges Resultat für ein beliebiges ν: Es entsteht nämlich immer aus der Potenz Z^ν auf dem Wege (B) die Lösung $e^{i\nu\varphi} U_\nu(kr)$ unserer Differentialgleichung.

6. Wir fassen die Ergebnisse dieses Paragraphen der leichteren Bezugnahme wegen folgendermassen zusammen:

---

*) Vergl. Hankel: Cylinderfunctionen erster und zweiter Art, § 1, Math. Ann. Bd. I.

In der Ebene der Variablen α haben wir 2 verschiedene Integrationswege benutzt, *einen Weg* (A), welcher im Unendlichen des Gebietes I beginnt und im Unendlichen des Gebietes II endigt, und *einen Weg* (B), welcher im Unendlichen von I beginnt und im Unendlichen von III endigt. Auf dem Wege (A) fügen wir dem Integral den Factor $\frac{1}{2\pi}$, auf dem Wege (B) den Factor $\frac{1}{2i}$ hinzu. *Es entsteht nun durch unser Verfahren:*

	auf dem Wege (A)	*auf dem Wege* (B)
aus Z^{ν}	$e^{i\nu\varphi} J_{\nu}(kr)$	$e^{i\nu\varphi} U_{\nu}(kr)$

bei der Projection vom Südpole; und es entsteht

aus $Z_1^{-\nu}$	$-e^{i\nu\pi} e^{-i\nu\varphi} J_{\nu}(kr)$	$-e^{i\nu\pi} e^{-i\nu\varphi} U_{\nu}(kr)$

bei der Projection vom Nordpole der Einheitskugel.

§ 5.

Ueberall endliche Lösungen.

Wir haben im vorigen Paragraphen Lösungen unserer Differentialgleichung aufgestellt, bei denen es uns wesentlich auf die Abhängigkeit von der *einen Variabeln* (r) ankam, während die Abhängigkeit von der anderen Variabeln (φ) die der trigonometrischen Functionen war. Diese Lösungen waren entweder *in der schlichten Ebene eindeutig* (ν eine ganze Zahl), oder *auf einer Riemann'schen Fläche, welche im Punkte* $r = 0$ *und im Unendlichen einen* $(n-1)$*-fachen Windungspunkt hat* (ν ein rationaler Bruch mit dem Nenner n), oder *auf einer Windungsfläche von unendlich hoher Ordnung* (ν irrational). Wir werden in diesem Paragraphen Lösungen ableiten, welche wesentlich von *zwei Variabeln* abhängen und welche entweder *in der schlichten Ebene*, oder *auf der genannten n-blättrigen Riemann'schen Fläche* oder *auf einer Windungsfläche von unendlich hoher Ordnung* eindeutig sind. Dabei soll es sich zunächst um *überall endliche Functionen* handeln.

1. Wir gehen von derjenigen einfachen linearen Function von Z aus, welche in einem Punkte Z' des Einheitskreises ∞ wird, welche im Nullpunkte 1 und im unendlich fernen Punkte 0 ist, d. h. von

$$f = \frac{1}{1 - \frac{Z}{Z'}}. \tag{1}$$

Wir erhalten hieraus nach dem im § 3 sub 1 angegebenen Verfahren eine überall endliche und in der schlichten Ebene eindeutige Lösung. Wir haben nur die vorstehende specielle Function in Gleichung (13) pag. 334 einzutragen. Die entstehende Function bezeichnen wir mit u_0:

(2) $$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int\left\{\frac{1}{1-e^{i(\varphi-\varphi'-\alpha)}} - \frac{1}{1-e^{i(\varphi-\varphi'+\alpha)}}\right\} e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int\frac{\sin\alpha\, e^{ikr\cos\alpha}\,d\alpha}{\cos\alpha - \cos(\varphi-\varphi')}.$$

Dabei haben wir gesetzt:

(3) $$Z' = e^{i\varphi' - \frac{i\pi}{2}} \quad (\varphi' \text{ reell}).$$

Das Integral ist in der α-Ebene auf dem Wege (A) zu führen.

Die reelle Axe, insbesondere also der Punkt $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$ soll dabei ausserhalb des durch (A) umschlossenen Gebietes liegen. Fassen wir jedoch $\cos\alpha$ als Integrationsvariable auf, so liegt der Punkt $\cos\alpha = \cos(\varphi - \varphi')$ innerhalb des entsprechenden Weges in der $\cos\alpha$-Ebene. Ueberdies steht dann unter dem Integralzeichen eine eindeutige Function von $\cos\alpha$. Der Integrationsweg kann daher auf den Punkt $\cos\alpha = \cos(\varphi - \varphi')$ zusammengezogen werden. Nach dem Cauchy'schen Satze erhalten wir:

(4) $$u_0 = e^{ikr\cos(\varphi-\varphi')}$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten x, y:

(4') $$u_0 = e^{ik(x\cos\varphi' + y\sin\varphi')}.$$

Die einfache Function, zu welcher wir so gelangen, ist diejenige Lösung unserer Differentialgleichung, mit welcher man in der gewöhnlichen Optik fast ausschliesslich operirt. Sie besitzt folgende Eigenschaften: *Sie ist in der schlichten Ebene eindeutig, sie ist für alle endlichen Werthe x, y endlich und stetig.* Statt des *ausgezeichneten Punktes* $Z = Z'$ in der complexen Ebene haben wir hier nur mehr eine *ausgezeichnete Richtung* $\varphi = \varphi'$ („Richtung der einfallenden Welle"). Die Function u_0 stellt die *ungestörte Vertheilung des parallelen Lichtes in der unendlichen Ebene* dar.

2. Wir suchen jetzt die zu u_0 analoge Lösung unserer Differentialgleichung auf der oben beschriebenen Riemann'schen Fläche mit $(n-1)$-fachem Windungspunkte. Zu dem Zwecke gehen wir nicht von der in der schlichten Ebene *eindeutigen* Function (1) aus, sondern von der zu (1) *analogen Function auf unserer Riemann'schen Fläche.* Diese ergiebt sich sehr leicht durch *conforme Abbildung.* Wir haben in (1) nur Z zu ersetzen durch $Z^{\frac{1}{n}}$. Der Bequemlichkeit wegen mögen wir auch $Z'^{\frac{1}{n}}$ statt Z' schreiben und den Factor $\frac{1}{n}$ hinzufügen. Wir benutzen also für das Folgende als Ausgangsfunction:

$$\text{(a)} \qquad f = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}}.$$

Nach Gleichung (13) pag. 334 erhalten wir als zugehörige Lösung unserer Differentialgleichung

$$\text{(5)} \qquad u = \frac{1}{2\pi n}\int\left\{\frac{1}{1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi - \varphi' - \alpha)}} - \frac{1}{1 - e^{\frac{i}{n}(\varphi - \varphi' + \alpha)}}\right\} e^{ikr\cos\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi i n}\int \frac{\sin\frac{\alpha}{n}\, e^{ikr\cos\alpha}\, d\alpha}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\left(\frac{\varphi - \varphi'}{n}\right)}.$$

Das Integral ist auf dem Wege (A) zu führen; die Punkte $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$ liegen ausserhalb des durch den Integrationsweg eingeschlossenen Gebietes. Man sieht dieser Function sofort die folgenden Eigenschaften an:

a) *Sie genügt unserer Differentialgleichung* (wie alle Functionen, welche aus Gleichung (13) durch Eintragen einer beliebigen complexen Function f entstehen).

b) *Sie ist auf der n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig.*

c) *Sie ist für alle endlichen reellen Werthe von r endlich und stetig.* Wir untersuchen

d) *ihr Verhalten im Unendlichen.* Wir wollen als *erstes Blatt* der Riemann'schen Fläche die Gesammtheit derjenigen Punkte bezeichnen, für welche $|\varphi - \varphi'| < \pi$, als 2^{tes}, 3^{tes}, ... n^{tes} *Blatt* die Gesammtheit aller übrigen Punkte. Wir behaupten dann:

Im Unendlichen des ersten Blattes wird $u = u_0$, im Unendlichen aller übrigen Blätter wird $u = 0$.

Zum Beweise betrachten wir die Figur 2. Ist $|\varphi - \varphi'| > \pi$, so liegt auf der Strecke 0 bis π der reellen Axe kein singulärer Punkt des Integrales. Wir können daher den Weg (A) über die reelle Axe hinüberziehen, indem wir ihn aus dem Gebiete I durch den Punkt 0 hindurch nach III und durch den Punkt π nach II führen. Er verläuft dann lediglich auf schraffirtem Gebiete, in welchem $e^{ikr\cos\alpha}$ mit wachsendem r verschwindet. In diesem Falle verschwindet auch $\lim\limits_{r=\infty} u$.

Ist aber $|\varphi - \varphi'| < \pi$, so werden wir den Integrationsweg in ähnlicher Weise deformiren, müssen aber dann um denjenigen der Punkte $\alpha = \pm(\varphi - \varphi')$, welcher zwischen 0 und π fällt, eine Schleife legen. Das Integral über diese Schleife giebt nach dem Cauchy'schen Satze geradezu u_0, das Integral über den übrigen Theil des Integrations-

weges verschwindet in der Grenze für $r = \infty$. In diesem Falle geht also die Function u mit wachsendem r in u_0 über. Unsere Behauptung ist also bewiesen.

Wir können diesem Resultat folgende *anschauliche Deutung* geben. Wir denken uns zunächst n übereinander liegende schlichte Ebenen. In der ersten Ebene stellen wir die Lösung u_0 unserer Differentialgleichung her, in allen übrigen Blättern die Lösung 0. Schneiden wir nun diese Ebenen längs eines vom Nullpunkte ausgehenden Halbstrahles auf und vereinigen sie wechselweise zu unserer Riemann'schen Fläche, so entsteht eine Störung, welche den ursprünglichen Zustand in allen endlichen Punkten abändert. Die Störung erstreckt sich aber nicht in's Unendliche. Hier haben wir fortgesetzt $u = u_0$ bez. $u = 0$.

Zwischen den Functionen u und u_0 besteht ferner folgende bemerkenswerthe Beziehung:

e) Die symmetrische Function $u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ der Werthe von u in den „über einander liegenden Punkten" des $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Blattes wird genau gleich u_0. Ueber einander liegende Punkte sind die folgenden: r, φ; $r, \varphi + 2\pi$; $\ldots$ $r, \varphi + 2(n-1)\pi$. Die symmetrische Function lautet daher:

$$(6)\qquad u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{1}{2\pi i}\int e^{ikr\cos\alpha} \sin\frac{\alpha}{n}\,\frac{d\alpha}{n}$$
$$\left\{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n}} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$

Nun besteht die Identität:

$$\cos\alpha - \cos(\varphi - \varphi') = 2^{n-1}\left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}\right)\left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n}\right),$$

aus welcher man durch logarithmische Differentiation die folgende ableitet:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos(\varphi - \varphi')} = \frac{1}{n}\sin\frac{\alpha}{n}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}} + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2\pi}{n}} + \cdots\right.$$
$$\left.\cdots + \frac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi' + 2(n-1)\pi}{n}}\right\}.$$

Daher geht die rechte Seite von Gleichung (6) direct über in den Ausdruck für u_0 in Gleichung (2) — in Uebereinstimmung mit einer allgemeinen Bemerkung auf pag. 320.

Die Function u, so können wir sagen, stellt die *Bewegung einer in der Richtung $\varphi = \varphi'$ auf unserer Riemann'schen Fläche einfallenden Lichtwelle dar*. Sie hat an die Stelle von u_0 bei allen denjenigen zweidimensionalen optischen Problemen zu treten, welche ihrer Natur nach nicht zu einer in der schlichten Ebene, sondern zu einer auf unserer n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutigen Function Anlass geben, nämlich bei dem Problem der Beugung an einem keilförmigen undurchsichtigen Körper von ebenen Grenzflächen.

3. Nach § 2 lässt sich jede Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, welche innerhalb eines Kreises vom Radius R endlich und stetig ist, in eine Reihe entwickeln, welche nach den Functionen $J_{\frac{m}{n}}(kr) \begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} \frac{m}{n}\varphi$ fortschreitet, falls der Nullpunkt ein $(n-1)$-facher Windungspunkt ist. Da unsere Functionen u_0 und u für alle Werthe $r < \infty$ jener Bedingung genügen, so müssen sie durch eine *in der ganzen Ebene* (mit Ausschluss des Unendlichfernen) *convergente Reihe* dargestellt werden können. Solche Reihen wiesen grosse Analogie mit den Potenzreihen der Potentialtheorie auf; *wir leiten sie jetzt direct aus der Potenzentwickelung unserer Ausgangsfunction ab.*

Wollen wir zu dem Zwecke die Resultate des § 4 verwerthen, so müssen wir zwischen der Projection vom Südpole und der vom Nordpole unterscheiden. In dem mittleren Gliede der Gleichung (5) entsteht der zweite Term bei der Projection vom Südpole aus:

$$f(\mathsf{Z}) = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{\mathsf{Z}}{\mathsf{Z}'}\right)^{\frac{1}{n}}},$$

wo Z denjenigen Punkt bedeutet, welcher in einen bestimmten Punkt r, φ übergeht, der erste Term bei der Projection vom Nordpole aus derselben Function

$$f(\mathsf{Z}_1) = \frac{\frac{1}{n}}{1 - \left(\frac{\mathsf{Z}_1}{\mathsf{Z}'}\right)^{\frac{1}{n}}},$$

wo Z_1 derjenige Punkt ist, welcher in denselben Punkt r, φ bei dieser Projection übergeführt wird. Nach den Gleichungen (14) und (15) von pag. 335 und nach Gleichung (3) haben wir:

$$|\mathsf{Z}| = \frac{kr}{m}, \quad |\mathsf{Z}_1| = \frac{m}{2kr}, \quad |\mathsf{Z}'| = 1.$$

Beim Grenzübergange wird also gewiss $|\mathsf{Z}| < |\mathsf{Z}'|$, $|\mathsf{Z}_1| > |\mathsf{Z}'|$. Daher

müssen wir in der complexen Ebene $f(Z)$ nach aufsteigenden, $f(Z_1)$ nach absteigenden Potenzen von $\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}$ bez. von $\left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln.

Es wird

$$(7)\quad f(Z)+f(Z_1)=\frac{1}{n}\left\{1+\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots\right.$$
$$\left.\cdots-\left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{1}{n}}+\cdots\right)\right\}.$$

Diese Gleichung wollen wir rechts und links auf dem Wege (A) integriren*). Dann entsteht links, wie in diesem Paragraphen gezeigt, die Function u. Führen wir die Integration rechts gliedweise aus, so können wir das Resultat der Zusammenstellung am Schlusse des § 4 entnehmen. Es wird aus:

$$\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{m}{n}}-\left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{m}{n}}\;\Bigg|\; e^{i\frac{m}{n}(\varphi-\varphi')}\cdot e^{\frac{im}{n}\frac{\pi}{2}}J_{\frac{m}{n}}(kr)+e^{i\frac{m}{n}(\varphi'-\varphi)}\cdot e^{\frac{im}{n}\frac{\pi}{2}}J_{\frac{m}{n}}(kr)$$
$$=2e^{\frac{im}{n}\frac{\pi}{2}}\cos\frac{m}{n}(\varphi-\varphi')J_{\frac{m}{n}}(kr),$$

während aus dem constanten Gliede 1 gerade $J_0(kr)$ wird. Wir finden daher für unsere Function u die beständig convergente Reihe

$$u=\sum_0^\infty \gamma_m e^{\frac{im}{n}\frac{\pi}{2}}\cos\frac{m}{n}(\varphi-\varphi')J_{\frac{m}{n}}(kr)\quad\left\{\begin{matrix}\gamma_m=\frac{2}{n}\text{ für } m>0\\ \gamma_m=\frac{1}{n}\text{ für } m=0\end{matrix}\right\}.$$

Für den sub 1 behandelten einfachsten Fall $n=1$ kommt diese Reihe bei Heine**) vor und dient hier geradezu zur Definition der Bessel'schen Functionen.

4. Es wird nun leicht sein, auch *für eine Windungsfläche von unendlich hoher Ordnungszahl* die entsprechende Function anzugeben. Wir bilden zunächst jene Windungsfläche conform auf die Z-Ebene ab, ersetzen also in der Function (1) Z durch $\lg Z$ und auch Z' durch $\lg Z'$. Demgemäss tragen wir jetzt die folgende Function

$$f=\frac{1}{1-\frac{\lg Z}{\lg Z'}}$$

*) Wir meinen mit dieser abgekürzten Ausdrucksweise, dass wir auf der rechten und linken Seite der Gleichung (7) alle die genannten Operationen unseres allgemeinen Verfahrens ausführen und dass wir als Integrationsweg für die so entstehende Function von α den Weg (A) wählen.

**) l. c. Gleichung (14b).

in Gleichung (13) pag. 334 ein. Es entsteht dann durch Integration auf dem Wege (A)

$$u' = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{2\alpha}{(\varphi - \varphi')^2 - \alpha^2} e^{ikr\cos\alpha}\, d\alpha,$$

ein Ausdruck, welcher auch aus (5) durch den Grenzübergang $n = \infty$ abgeleitet werden kann.

Von dieser Function weist man, ebenso wie sub 2, die Eigenschaften a), c) und d) nach. An die Stelle von b) aber tritt hier:

b') *Die Function ist eindeutig erst auf einer Windungsfläche von unendlich vielen Blättern.*

Wir können schliesslich aus dieser *in φ völlig unperiodischen* Function u' die obigen Functionen *von der Periode 2π bez. $2\pi n$* zusammensetzen und kommen so zu einer Uebertragung und Erweiterung der Eigenschaft e).

Bilden wir nämlich die Summe der Werthe von u' in sämmtlichen auf der Windungsfläche über einander liegenden Punkten, d. h. die Summe von $k = -\infty$ bis $k = +\infty$ der Werthe von u' in den Punkten $r, \varphi + 2kn\pi$, so entsteht die auf der n-blättrigen Fläche eindeutige Function u und insbesondere für $n = 1$ die Function u_0. In der That finden wir aus der Identität

$$\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n} = \frac{(\varphi - \varphi')^2 - \alpha^2}{2n^2} \prod{}' \frac{\alpha^2 - (\varphi - \varphi' + 2kn\pi)^2}{(2kn\pi)^2}$$

$$\begin{bmatrix} k = -\infty \cdots -1 \\ \quad +1 \cdots +\infty \end{bmatrix}$$

durch logarithmische Differentiation eine Beziehung zwischen

$$\frac{1}{n}\sin\frac{\alpha}{n} : \left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}\right)$$

und einer convergenten unendlichen Reihe, durch welche die genannte Summe direct in den Ausdruck 5) bez. 2) für u bez. u_0 übergeführt wird.

Die Function u' stellt sozusagen die *Bewegung einer in der Richtung $\varphi = \varphi'$ auf unserer unendlich-blättrigen Windungsfläche einfallenden Lichtwelle* dar. Wir können dementsprechend das vorstehende Resultat auch folgendermassen aussprechen:

Lassen wir auf unserer unendlich-vielblättrigen Windungsfläche unendlich viele Lichtstrahlen einfallen, deren Einfallsrichtungen sich je um $2n\pi$ unterscheiden, so wird die entstehende Lichtbewegung mit der Bewegung eines Lichtstrahls auf einer n-blättrigen Windungsfläche bez. (im Falle $n = 1$) mit der ungestörten Bewegung des Lichtstrahls in der schlichten Ebene identisch.

§ 6.

Lösungen mit Unendlichkeitsstelle.

Wir stellen in diesem Paragraphen Lösungen unserer Differentialgleichung auf, welche an einer vorgeschriebenen Stelle x', y' unendlich werden, wie $\lg \frac{1}{R}$ für $R=0$, wo R den Abstand des variabeln Punktes x, y von dem Punkte $x' y'$ bedeutet. Eine solche Unendlichkeitsstelle nennen wir einen *Pol* und zwar einen einfachen Pol. Wir leiten diese Lösungen nach der im § 3 sub 2 skizzirten Methode aus derselben Function f ab, aus welcher im vorigen Paragraphen die überall endlichen Lösungen flossen. Lösungen mit mehreren getrennten oder zusammenfallenden Polen können hinterher aus jenen einfachsten Lösungen durch Summation bez. Differentiation nach den Coordinaten des Poles erhalten werden.

1. Die in der schlichten Ebene eindeutige Lösung ergiebt sich aus der complexen Function

$$f = \frac{1}{1 - \frac{Z}{Z'}}. \tag{1}$$

Die complexe Ebene beziehen wir durch stereographische Projection vom Südpol auf die Einheitskugel. Sind ξ, η, ζ bez. ξ', η', ζ' die Coordinaten der Bildpunkte von Z bez. Z', so haben wir

$$Z = \frac{\xi + i\eta}{\zeta + 1}, \quad Z' = \frac{\xi' + i\eta'}{\zeta' + 1}. \tag{2}$$

Aus dem zweidimensionalen Potential auf der Kugeloberfläche entsteht eine räumliche Kugelfunction 0^{ten} Grades, indem wir in den Ausdrücken (2) ϱ und ϱ' an die Stelle von 1 treten lassen

$$[\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2, \quad \varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2].$$

Durch Inversion hinsichtlich beider Variabelntripel entsteht eine Kugelfunction $\frac{1}{\varrho\varrho'} f$, welche homogen vom -1^{ten} Grade *sowohl* in den ξ, η, ζ *wie* in den ξ', η', ζ' ist. Der Grad in den beiden Variabelntripeln wird nun weiter successive m-mal erniedrigt. Wir erreichen dieses durch Integration nach z und z', indem wir statt ζ und ζ' die Integrationsvariabeln z und z' substituiren und unter den Integralzeichen die Factoren $(\zeta - z)^{-m-1}$, $(\zeta' - z')^{-m-1}$ hinzufügen. Mit wachsendem m lassen wir die Punkte ξ, η, ζ und $\xi', \eta' \zeta'$ *gleichzeitig* in den Nordpol der Kugel hineinrücken; genauer gesagt: wir machen die Substitution

$$(3)\quad \begin{aligned} \xi &= \frac{kx}{m}, \quad \eta = \frac{ky}{m}, \quad \zeta = 1 - \frac{k^2(x^2+y^2)}{2m^2} + \cdots, \\ \xi' &= \frac{-kx'}{m}, \quad \eta' = \frac{-ky'}{m}, \quad \zeta' = 1 - \frac{k^2(x'^2+y'^2)}{2m^2} + \cdots \end{aligned}$$

und verstehen unter x, y, x', y' endliche, unter m eine in's Unendliche wachsende Zahl. Statt der rechtwinkligen Coordinaten $x, \ldots$ brauchen wir auch Polarcoordinaten $r, \ldots$, welche folgendermassen definirt sind:

$$(4)\quad \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2, \quad e^{i\varphi} = \frac{x+iy}{r}, \\ r'^2 &= x'^2 + y'^2, \quad e^{i\varphi'} = \frac{x'+iy'}{r'}. \end{aligned}$$

Zum Zwecke des Grenzüberganges schreiben wir statt der Variabeln z und z' bez. $\frac{ikr\cos\alpha}{m}$, $\frac{-ikr'\cos\alpha'}{m}$. Dann entsteht das zu (12) pag. 334 analoge Doppelintegral:

$$(5)\quad \frac{1}{2\pi}\int d\alpha\, e^{ikr\cos\alpha}\, \frac{1}{2i}\int d\alpha'\, e^{-ikr'\cos\alpha'}\, \frac{1}{1 - e^{i(\varphi-\varphi'+\alpha+\alpha')}}.$$

Das erste Integral soll über den Weg (A), das zweite über (B) geführt werden; (letzteres allerdings mit einer unten anzugebenden Modification, vgl. die Anm. auf pag. 350). Wir haben sogleich diejenigen numerischen Factoren hinzugefügt, mit welchen diese Integrale nach der Verabredung in § 4 versehen werden sollten.

Bei der stereographischen Projection vom Nordpole entsteht in derselben Weise das folgende Doppelintegral

$$(6)\quad -\frac{1}{2\pi}\int d\alpha\, e^{ikr\cos\alpha}\, \frac{1}{2i}\int d\alpha'\, e^{-ikr'\cos\alpha'}\, \frac{1}{1 - e^{i(\varphi-\varphi'-\alpha+\alpha')}}.$$

Die Summe beider schreiben wir in der Form

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int d\alpha\, e^{ikr\cos\alpha}\cdot \frac{1}{2i}\int d\alpha'\, e^{-ikr'\cos\alpha'}\, \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos(\varphi-\varphi'+\alpha')};$$

Hier können wir noch das Integral nach α ausführen, wenn wir den Integranden als Function von $\cos\alpha$ auffassen. Der Weg (A) lässt sich nämlich in der $\cos\alpha$-Ebene auf den einen Punkt $\cos\alpha = \cos(\varphi - \varphi' + \alpha')$ zusammenziehen, wie in § 5 sub 1 auseinandergesetzt ist. Wir erhalten daher nach dem Cauchy'schen Satz:

$$(7)\quad U = \frac{1}{2i}\int d\alpha'\, e^{ikr\cos(\varphi-\varphi'+\alpha') - ikr'\cos\alpha'}.$$

Diese Function hängt nur von der geradlinigen Entfernung

$$R = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$$

der Punkte x, y und x', y' ab; wir können sie nämlich in die Form bringen*)

$$(8) \qquad U = \frac{1}{2i}\int d\gamma\, e^{ikR\cos\gamma} = U_0(kR),$$

aus welcher wir sehen, dass unsere Function U direct gleich der Bessel'schen Function 2^{ter} Art mit dem Index 0 und dem Argumente kR wird.

Wir schliessen aus der Gleichung (8) sofort auf folgende Eigenschaften unserer Function.

a) *Sie genügt der Differentialgleichung* $\Delta U + k^2 U = 0$ *vermöge ihrer Herleitung aus der complexen Function* f.

b) *Sie ist in der schlichten Ebene eindeutig.*

c) *Sie ist für alle endlichen Werthe von* x *und* y *endlich und stetig, ausser in dem Pole* $x = x'$, $y = y'$, *wo sie logarithmisch unendlich wird* (vgl. Gleichung (8), pag. 24). Es ist uns also wirklich durch die im § 3, 2 angegebene Modification unseres allgemeinen Verfahrens gelungen, die Unendlichkeitsstelle im Endlichen zurückzuhalten.

d) *Sie verschwindet im Unendlichen.* Letzteres folgt aus den bekannten semiconvergenten Entwickelungen**) der Bessel'schen Functionen für grosse Werthe des Argumentes, oder hier noch einfacher daraus, dass der Weg (B) ganz auf schraffirtem Gebiete geführt werden kann, wo $\lim\limits_{R=\infty} e^{ikR\cos\gamma}$ verschwindet.

e) *Sie ändert sich nicht, wenn wir die Coordinaten des variabeln Punktes mit denen des Poles vertauschen.* Diese Eigenschaft entspricht dem Satze über die Vertauschung von Parameter und Argument aus der Theorie der Abel'schen Functionen***).

Unsere Function $U_0(kR)$ ist in der Optik immer dann anzuwenden, wenn es sich um die *exacte Beschreibung einer zweidimensionalen Lichtbewegung* handelt, *welche durch einen im Endlichen gelegenen leuchtenden*

---

*) Zum Beweise schreibe man erst β statt $\varphi' - \alpha'$, dann drücke man nach (4) die Polarcoordinaten durch rechtwinklige Coordinaten aus, ferner mache man $x - x' = R\cos\psi$, $y - y' = R\sin\psi$, so dass ψ den von der x-Axe aus gerechneten Gesichtswinkel bedeutet, unter dem der Punkt x, y von x', y' aus erscheint. Endlich schreibe man γ statt $\beta - \psi$. Dann entsteht (8) aus (7).

Die genauere Bestimmung des Integrationsweges soll nun dahin getroffen werden, dass der Weg in (8) direct der Weg (B) sei. Dadurch ist auch der Weg in (7) zufolge der Gleichung $-\alpha' = \gamma + \psi - \varphi'$ bestimmt. In (7) können wir also den Weg (B) direct nur dann benutzen, wenn der Punkt x, y auf dem Halbstrahle $\psi = \varphi'$ oder in seiner Umgebung liegt. Bei Variabilität des Punktes x, y ändert sich der Integrationsweg stetig mit der Lage des Punktes.

**) Vgl. H. Hankel: Cylinderfunctionen erster und zweiter Art. Math. Ann. Bd. I, § 6.

***) Vgl. F. Pockels: l. c. p. 283, wo die entsprechende Eigenschaft für „Green'sche Functionen" von beliebigen begrenzten Gebieten ausgesprochen ist.

Punkt (x', y') *hervorgerufen wird.* Allerdings benutzt man in der gewöhnlichen Optik bei diesem Probleme nicht die Function U_0 selbst, sondern begnügt sich unbewusst mit dem ersten Gliede ihrer semiconvergenten Entwickelung, welches an sich überhaupt keine Lösung unserer Differentialgleichung ist.

2. Indem wir nun dazu übergehen, die *analoge Function für unsere Riemann'sche Fläche mit* $(n-1)$*-fachem Windungspunkte* aufzustellen, werden wir nicht von der in der schlichten Z-Ebene eindeutigen Function (1) ausgehen, sondern, wie im § 5 sub 2 von der Function

$$f = \frac{\frac{1}{n}}{1-\left(\frac{\mathsf{Z}}{\mathsf{Z}'}\right)^{\frac{1}{n}}},$$

welche aus (1) dadurch entsteht, dass wir unsere Riemann'sche Fläche hinsichtlich der Variabeln Z und Z' conform auf die Z- bez. Z'-Ebene abbilden. Diese Function behandeln wir genau so, wie im Vorhergehenden die Function (1). Wir geben sogleich das Resultat in der definitiven Form an:

$$(9) \qquad U = \frac{1}{2i\pi n}\int \frac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi-\varphi'}{n}}\, U_0(kR')\, d\alpha$$

$$[R'^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\alpha],$$

wo wir das ursprünglich auftretende Doppelintegral durch Einführung der Bessel'schen Function U_0 in die Form eines einfachen Integrals gebracht haben. Der Integrationsweg ist der Weg (A).

Wir haben uns zunächst davon zu überzeugen, *dass dieses Integral im Allgemeinen einen endlichen Werth hat.* Da die Function U_0 hier mit complexem Argumente auftritt, ist es wichtig, ihr Verhalten in der complexen Ebene zu kennen. Diesbezüglich bemerken wir: 1) die Function $U_0(z)$ ist im Punkte $z = 0$ der complexen z-Ebene *verzweigt;* sie vermehrt sich nämlich um $2\pi i J_0(z)$ bei Umkreisung desselben. 2) Sie verhält sich im Unendlichen wie $-\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{i\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}$, *sie verschwindet also im Unendlichen der positiven Halbebene* (d. h. derjenigen Halbebene, wo z einen positiven imaginären Bestandtheil hat). Ersteres folgt aus Gleichung (6), pag. 339, letzteres aus den semiconvergenten Entwickelungen der Besselschen Functionen*).

*) H. Hankel: l. c.

Dem Verzweigungspunkte $R' = 0$ entspricht in der α-Ebene eine unendliche Anzahl von Punktepaaren

$$\alpha = \pm ia + 2k\pi \quad \left[k = -\infty \text{ bis } +\infty, \; a = \arc\cos \frac{r^2 + r'^2}{2rr'}\right],$$

von denen für uns hauptsächlich das auf der imaginären α-Axe gelegene Paar $\alpha = \pm ia$ in Betracht kommt. Desgleichen findet sich natürlich die reelle Axe der R'-Ebene in unendlich vielen Exemplaren der

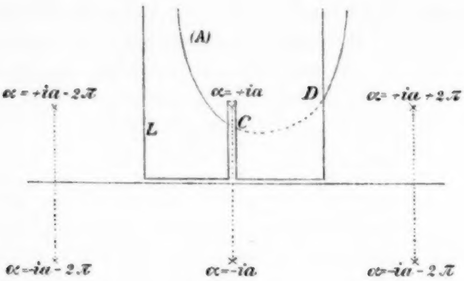


Fig. 4.

α-Ebene wieder. Eines derselben haben wir ausgezeichnet. Es ist der gebrochene Linienzug L $(-\pi + i\infty, \; -\pi, \; 0, \; ia, \; 0, \; \pi, \; \pi + i\infty)$. Der positiven R'-Halbebene entspricht das Innere des von L umschlossenen Gebietes. Beim Ueberschreiten von L kommt man jedesmal in einen der negativen R'-Halbebene entsprechenden Theil.

Wir wollen nun unsere obige Angabe über den Integrationsweg noch dahin präcisiren, dass derselbe den Punkt $\alpha = ia$ zur Linken, die auf der reellen Axe gelegenen singulären Punkte zur Rechten lässt. Im Uebrigen kann er natürlich beliebig deformirt werden, nur darf er über die Punkte $\alpha = \pm ia, \; \pm(\varphi - \varphi') + 2kn\pi$ nicht hinübergezogen werden.

Der in Fig. 4 punktirt gezeichnete Theil (CD) des Integrationsweges entspricht in der R'-Ebene Punkten der negativen Halbebene. Anfang und Ende des Integrationsweges sind voll ausgezeichnet, um anzudeuten, dass die zugehörigen Punkte der R'-Ebene in der positiven Halbebene liegen. In den unendlich fernen Theilen des Integrationsweges verschwindet also die Function $U_0(kR')$.

Wir ersehen daraus, dass das Integral (8) im Allgemeinen einen endlichen Werth besitzt; eine Ausnahme tritt nur ein in dem speciellen Falle $r = r'$, $\varphi = \varphi'$. Lassen wir nämlich $r = r'$ werden, so rücken die beiden Verzweigungspunkte $\alpha = \pm ia$ in den einen Punkt $\alpha = 0$ zusammen. Der Integrationsweg, welcher zwischen beiden Punkten sozusagen eingepflockt ist, zieht dann nothgedrungen durch den

Punkt $\alpha = 0$ hindurch. Deshalb braucht das Integral noch nicht unendlich zu werden. Lassen wir aber auch $\varphi = \varphi'$ werden, so wird der Factor $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}}$, in diesem Punkte unendlich. *Dann und nur dann wird das Integral unendlich.*

Um die Art des Unendlichwerdens zu untersuchen, bilden wir die symmetrische Function $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ der Werthe von U in den übereinander liegenden Punkten der Fläche. Dabei bezeichnen wir, wie früher, als erstes Blatt die Gesammtheit derjenigen Punkte, in welchen $|\varphi - \varphi'| < \pi$, als $2^{\text{tes}} \ldots n^{\text{tes}}$ Blatt alle übrigen Punkte. U_1 bezieht sich auf das erste, $U_2 \ldots U_n$ auf das $2 \ldots n^{\text{te}}$ Blatt. Nach der im § 5, pag. 344 angegebenen Rechnung wird nun

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos(\varphi - \varphi')}\, U_0(kR')\, d\alpha.$$

Fassen wir diesen Ausdruck als ein Integral in der complexen Ebene der Variabeln $\cos\alpha$ auf, so können wir es nach dem Cauchy'schen Satze ausführen. Der Integrand ist nämlich eine eindeutige Function von $\cos\alpha$; wir erhalten:

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n = U_0(kR) \quad [R^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\varphi - \varphi')].$$

Die Function $U_0(kR)$ wird für $R = 0$ nach Gleichung (8), pag. 340 logarithmisch unendlich. Nun haben aber nach dem Vorhergehenden die Grössen $U_2 \ldots U_n$ sicher endliche Werthe. Das Unendlichwerden ist also lediglich auf Rechnung von U_1 zu setzen. Mithin wird die Function U im ersten Blatte an der Stelle $r = r'$, $\varphi = \varphi'$ unendlich, wie $\lg\frac{1}{R}$.

Hiernach können wir von unserer Function U Folgendes aussagen:

a) *Sie erfüllt die Differentialgleichung* $\Delta U + k^2 U = 0$.

b) *Sie ist auf unserer n-blättrigen Windungsfläche eindeutig.*

c) *Sie ist für alle endlichen Werthe von x und y endlich und stetig ausser im Punkte $x = x'$, $y = y'$, wo sie einen einfachen Pol besitzt.*

d) *Sie verschwindet im Unendlichen.* Wenn nämlich $r = \infty$ wird, so rücken die Punkte $\alpha = \pm i\alpha$ auf der imaginären Axe gleichfalls unendlich weit auseinander. Dann dürfen wir den Integrationsweg in der Richtung der positiv imaginären Axe beliebig weit verschieben, wobei das Integral wegen des Factors $\dfrac{1}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{\varphi - \varphi'}{n}}$ beliebig klein wird.

e) *Die Function U bleibt ungeändert, wenn wir die Rolle des variabeln Punktes und des Poles vertauschen.*

f) *Die symmetrische Function* $U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ *der Werthe von* U *in übereinander liegenden Punkten der Fläche ist gleich der analogen eindeutigen Lösung* $U_0(kR)$.

Bemerken wir noch, dass eine vollkommene Uebereinstimmung in der Bildungsweise der Functionen u, u_0 des vorigen und der Functionen U, U_0 dieses Paragraphen besteht. Die Function u, so können wir sagen, entstand aus der eindeutigen Lösung u_0, wenn wir in dieser die reelle Grösse $\cos(\varphi - \varphi')$ durch die complexe $\cos\alpha$ ersetzten, den Factor $\dfrac{\frac{1}{n}\sin\frac{\alpha}{n}}{\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{(\varphi-\varphi')}{n}}$ hinzufügten und nach α auf dem Wege (A) integrirten. Genau auf dieselbe Weise entsteht die Function U aus der eindeutigen Lösung U_0.

Die Function U stellt *eine Lichtbewegung auf unserer Riemann'schen Fläche* dar, *welche ein im Punkte* r', φ' *befindlicher leuchtender Punkt hervorruft.* Sie hat an die Stelle der Function U_0 in solchen optischen Problemen zu treten, welche ihrer Natur nach zu Functionen Anlass geben, welche mit ihren analytischen Fortsetzungen erst auf unserer n-blättrigen Riemann'schen Fläche eindeutig sind, nämlich in dem Problem der Beugung an einem keilförmigen undurchsichtigen Körper bei Vorhandensein eines im Endlichen gelegenen leuchtenden Punktes.

3. Nach § 3 lassen sich alle Lösungen unserer Differentialgleichung, welche sich im Innern eines Kreises bez. Kreisringes regulär verhalten, in eine nach Bessel'schen Functionen 1ter bez. 2ter Art fortschreitende Reihe entwickeln. Wir wollen jetzt diese Entwickelungen für unsere Function U wirklich aufstellen. (Die Function U_0 brauchen wir nicht ausdrücklich zu behandeln, da sie nur einen speciellen Fall von U darstellt). Und zwar *werden wir sie direct aus der Potenzentwickelung der complexen Ausgangsfunction ableiten.* Wir kommen dabei allerdings nicht zu einer einheitlichen Entwickelung, wie bei der Function u des vorigen Paragraphen, sondern wir müssen *zwei Gebiete* unterscheiden, in denen verschiedene Entwickelungen gelten, nämlich *das Innere und das Aeussere des Kreises* $r = r'$.

Die Function U berechnet sich als Summe zweier Integrale, von denen das eine bei der Projection der Function f vom Südpole, das andere bei der Projection vom Nordpole erhalten wird (in derselben Weise, wie es für die Function U_0 oben explicite ausgeführt ist vgl. (5) und (6), pag. 349). Dementsprechend betrachten wir mit Benutzung der Bezeichnungsweise aus § 5, 3

$$(10) \qquad f(Z) + f(Z_1) = \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{1-\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{1-\left(\frac{Z_1}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}}\right\}.$$

Hier bestehen zwischen dem Radiusvector r eines Punktes der x, y-Ebene und den Radienvectoren $|Z|$, $|Z_1|$ derjenigen Punkte der complexen Ebene, welche in den Punkt x, y bei der einen oder anderen Projection übergehen, wie auf pag. 345 die Beziehungen:

$$(11\text{a}) \qquad |Z| = \frac{kr}{m}, \quad |Z_1| = \frac{m}{2kr}.$$

Die entsprechende Gleichung besteht zwischen r' und $|Z'|$, nämlich:

$$(11\text{b}) \qquad |Z'| = \frac{kr'}{m},$$

1) $r < r'$. Aus den Gleichungen (11a) und (11b) folgt:

$$|Z| < |Z'| \quad \text{und} \quad |Z_1| > |Z'|.$$

In diesem Falle haben wir für die Function (10) die folgende convergente Potenzentwickelung anzusetzen:

$$f(Z)+f(Z_1) = \frac{1}{n}\left\{1+\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{2}{n}}+\cdots-\left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{1}{n}}\left(1+\left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{1}{n}}+\cdots\right)\right\}.$$

Diese Gleichung integriren*) wir links und rechts auf dem Wege (A) und (B) nach α bez. α'. Dann entsteht links unsere Function U. Rechts führen wir die Integration gliedweise aus. Der Zusammenstellung am Schlusse des § 4 entnehmen wir: es wird

$$\begin{array}{l|l}
\text{aus } \left(\frac{Z}{Z'}\right)^{\frac{m}{n}} & e^{\frac{im}{n}(\varphi-\varphi')} \, J_{\frac{m}{n}}(kr)\, U_{\frac{m}{n}}(kr'), \\[2ex]
\text{aus } \left(\frac{Z'}{Z_1}\right)^{\frac{m}{n}} & -e^{-\frac{im}{n}(\varphi-\varphi')} \, J_{\frac{m}{n}}(kr)\, U_{\frac{m}{n}}(kr'), \\[2ex]
\text{aus } 1 & J_0(kr)\, U_0(kr').
\end{array}$$

Wir erhalten somit:

$$(12) \qquad U = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m J_{\frac{m}{n}}(kr)\, U_{\frac{m}{n}}(kr') \cos\frac{m}{n}(\varphi-\varphi')$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_m = \frac{2}{n} \text{ für } m > 0 \\ \gamma_m = \frac{1}{n} \;\;,, \;\; m = 0 \end{bmatrix}.$$

Wir kommen so zu *einer für das Innere des Kreises $r = r'$ geltenden Entwickelung, welche nach Bessel'schen Functionen erster Art fortschreitet,* in Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Satze aus § 2, pag. 325.

*) Ueber die Bedeutung dieser abgekürzten Ausdrucksweise vgl. die Anm. auf pag. 346.

Die Reihe erscheint dort nur in etwas anderer Form, indem $J_{\frac{m}{n}}(kr)$ dort nicht mit $U_{\frac{m}{n}}(kr')$ sondern mit $1 : J_{\frac{m}{n}}(kr')$ multiplicirt ist. Vergleicht man aber die für die Bessel'schen Functionen erster und zweiter Art angegebenen Grenzwerthe von pag. 323 und 328 bei unendlich wachsendem Index, so sieht man, dass $\lim\limits_{\nu=\infty} U_\nu : \frac{1}{J_\nu}$ kleiner ist als $\frac{1}{\nu}$ multiplicirt in eine von ν unabhängige Zahl. Unsere Reihe (12) convergirt daher immer dann, wenn die Reihe (2) aus § 2 convergirt, d. h. im Innern des Kreises vom Radius r' und stellt hier wirklich die Function U dar.

2. $r > r'$. Sehen wir für den Augenblick nicht r, φ sondern r', φ' als den variablen Punkt an, so liefert uns die Reihe (12) gleichzeitig eine Darstellung von $U(r', \varphi')$ durch Bessel'sche Functionen zweiter Art, welche der Ableitung zufolge gültig ist, sofern $r' > r$. Nun bleibt die Function U auf Grund ihrer Reciprocitätseigenschaft e) ungeändert, wenn wir r', φ' mit r, φ vertauschen. Wir kommen dann zu der *folgenden Reihe*

$$U(r, \varphi) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \gamma_m J_{\frac{m}{n}}(kr')\, U_{\frac{m}{n}}(kr) \cos\frac{m}{n}(\varphi - \varphi') \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_m = \frac{2}{n} & \text{für } m > 0 \\ \gamma_m = \frac{1}{n} & \text{,, } m = 0 \end{bmatrix}$$

welche für alle endlichen Punkte ausserhalb des Kreises $r = r'$ gilt. Es ist dieses eine Reihe von der im § 2 sub 5 betrachteten Form, nur ist hier im allgemeinen Gliede $J_{\frac{m}{n}}(kr')$ an die Stelle von $1 : U_{\frac{m}{n}}(kr')$ getreten. Nach unserer obigen Bemerkung über den Grenzwerth von $J_\nu U_\nu$ bei unendlich wachsendem ν wird dadurch die Convergenz der Reihe nur verbessert. Die Reihe (43) convergirt daher für alle Werthe $\infty > r > r'$. Dass eine solche Reihe die vorgelegte Lösung in demselben Gebiete wirklich darstellt, konnte im Allgemeinen nicht behauptet werden. Es folgt hier aber, wegen der besonderen Reciprocitätseigenschaft von U daraus, dass die Reihe (12) die Function U in dem Gebiete $r < r'$ wirklich darstellt.

Spalten wir die Reihen (12) und (13) nach Gleichung (7), pag. 340 in ihren reellen und imaginären Bestandtheil, so ergeben sich im einfachsten Falle $n = 1$, d. h. im Falle der eindeutigen Lösung $U_0(kR)$ die sogenannten *Additionstheoreme der Bessel'schen Functionen $J_0(kR)$ und $K_0(kR)$*, wie sie von Heine, jedoch ohne Angabe ihres Gültigkeitsbereiches, aufgestellt sind. Wir bemerken noch, dass auch

die entsprechenden *Additionstheoreme der Kugelfunctionen* auf demselben Wege entspringen, wenn wir unser Verfahren vor Ausführung des Grenzüberganges abbrechen.

4. Es braucht kaum erwähnt zu werden, dass unser Ansatz auch die *auf einer unendlich-viel-blättrigen Windungsfläche* eindeutige Function mit einfachem Pole liefert, in der Form

$$U = \frac{1}{2\pi}\int \frac{2\alpha\, d\alpha}{(\varphi-\varphi')^2-\alpha^2}\, U_0(kR').$$

Für diese gelten mutatis mutandis gleichfalls die Eigenschaften a)—f) von pag. 353, 354 und die bisher betrachteten Lösungen U können aus ihr rückwärts aufgebaut werden.

§ 7.

Graphische Behandlung der einfachsten mehrdeutigen Lösung.

Dieser Paragraph verfolgt den doppelten Zweck, ein möglichst klares Bild von dem Verlauf unserer mehrdeutigen Lösungen in einem speciellen Falle zu geben und die Formeln zur numerischen Rechnung bereit zu stellen.

Zur numerischen Rechnung eignen sich weder die Darstellungen durch ein complexes Integral, noch die Reihen nach Bessel'schen Functionen. Letztere convergiren allerdings im Falle der überall endlichen Lösungen, wie wir gesehen haben, für alle endlichen Punkte der x, y-Ebene. Die Convergenz verschlechtert sich jedoch mit wachsenden Werthen des Argumentes kr. Nun bedeutet physikalisch $\frac{k}{2\pi}$, wie pag. 318 bemerkt, die reciproke Wellenlänge der betreffenden Schwingung. Die Convergenz wird also immer dann schlecht sein, wenn der Abstand r vom Windungspunkte der Riemann'schen Fläche eine grössere Anzahl von Wellenlängen beträgt.

Für die optischen Anwendungen, wo die Wellenlänge so ausserordentlich klein ist, sind unsere *convergenten* Reihen sicher nicht brauchbar. Für akustische oder Hertz'sche Schwingungen mögen sie immerhin nützlich sein. Jedoch werden wir sogleich *divergente* Reihen angeben, welche für optische Zwecke sehr praktisch sind. Dabei beschränken wir uns auf den einfachsten und zugleich wichtigsten Fall derjenigen Lösung u, welche auf einer zweiblättrigen Windungsfläche eindeutig und überall endlich ist.

Zunächst verwandeln wir das complexe Integral (5), durch welches diese Lösung pag. 343 erklärt wurde, in ein Integral auf reellem Wege. Dabei wollen wir zur Abkürzung $\varphi - \varphi' = \psi$ setzen, oder mit anderen

Worten, wir wollen die „Einfallsrichtung der Welle" als x-Axe wählen, so dass jetzt r und ψ gewöhnliche Polarcoordinaten bedeuten. Die Punkte, für welche $|\psi| < \pi$ bez. $|\psi| > \pi$ ist, bezeichnen wir wie früher als erstes bez. zweites Blatt. Nach e) pag. 344 haben wir

$$(1) \qquad u_1 + u_2 = u_0 = e^{ikr\cos\psi}.$$

Ferner berechnet man aus (5) pag. 343

$$(2) \qquad u_1 - u_2 = \frac{\cos\frac{\psi}{2}}{\pi i}\int \frac{e^{ikr\cos\alpha}\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha}{\cos\alpha - \cos\psi},$$

wobei $|\psi| < \pi$ angenommen ist. Setzen wir vorübergehend

$$X = \frac{u_1 - u_2}{u_0},$$

so wird

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \frac{k}{\pi}\cos\frac{\psi}{2}\int e^{ikr(\cos\alpha - \cos\psi)}\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha$$

$$= \frac{k}{\pi}\cos\frac{\psi}{2}\,e^{-2ikr\cos^2\frac{\psi}{2}}\int e^{2ikr\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha.$$

Wenn wir in dem zuletzt hingeschriebenen Integrale $\cos\frac{\alpha}{2}$ als Integrationsvariable ansehen und den Integrationsweg, wie er sich für diese Variable aus dem Wege (A) der α-Ebene ergiebt, in die imaginäre Axe der $\cos\frac{\alpha}{2}$-Ebene deformiren, so können wir es ausführen; es wird

$$\int e^{2ikr\cos^2\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2}\,d\alpha = \sqrt{\frac{2\pi}{kr}}\,e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

Mithin ist

$$\frac{\partial X}{\partial r} = \sqrt{\frac{2k}{-i\pi r}}\cos\frac{\psi}{2}\,e^{-2ikr\cos^2\frac{\psi}{2}} = \frac{\partial}{\partial r}\frac{2}{\sqrt{-i\pi}}\int_0^{\sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2}} e^{-i\tau^2}d\tau.$$

Integriren wir zwischen 0 und r, so kommt, da $X = 0$ für $r = 0$:

$$X = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}}\int_0^T e^{-i\tau^2}d\tau.$$

und

$$(3) \qquad u_1 - u_2 = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}}\,e^{ikr\cos\psi}\int_0^T e^{-i\tau^2}d\tau, \quad T = \sqrt{2kr}\cos\frac{\psi}{2},$$

wo das Integral jetzt auf reellem Wege genommen ist. Gleichung (1) können wir auch so schreiben:

$$(4) \qquad u_1 + u_2 = \frac{2}{\sqrt{-i\pi}}\,e^{ikr\cos\psi}\int_{-\infty}^0 e^{-i\tau^2}d\tau.$$

Aus Gleichung (3) und (4) folgen Ausdrücke für u_1 und u_2, welche zunächst für $|\psi| < \pi$ gelten, welche aber in einander übergehen, wenn wir ψ mit $\psi + 2\pi$ vertauschen. Wir erhalten daher einen einheitlichen Ausdruck für u, welcher sowohl im ersten wie im zweiten Blatte gilt, wenn wir die Beschränkung $|\psi| < \pi$ aufheben, nämlich den folgenden:

$$(5) \qquad u = e^{ikr\cos\psi} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{T} e^{-i\tau^2} d\tau, \quad T = \sqrt{2kr} \cos\frac{\psi}{2}.$$

Die Grösse T ist positiv im ersten, negativ im zweiten Blatte.

Auf Grund dieser Formel gelingt es nun, sich ein anschauliches Bild von dem Verlaufe der Function u zu verschaffen und eine Zeichnung zu entwerfen. Da Anschauung sowohl wie Zeichnung die Functionsverhältnisse nur ungenau erfassen können, so werden wir uns hier mit Annäherungswerthen begnügen dürfen, so jedoch, dass wir den begangenen Fehler genau abschätzen können. *Dementsprechend soll für den ganzen Rest dieser Arbeit eine bestimmte Genauigkeit ε massgebend sein.* Die Grösse von ε kann beliebig vorgeschrieben sein. Alle folgenden Angaben machen nur den Anspruch richtig zu sein bis auf einen Fehler, welcher absolut genommen kleiner als ε ist. Dabei wird eine abgekürzte Ausdrucksweise gestattet sein. Wir werden sagen: u ist gleich einem gewissen Werthe, wo wir genauer sagen müssten: Die Differenz zwischen dem angegebenen und dem wahren Werthe von u ist absolut genommen kleiner als ε.

Angenäherte Berechnung von u im zweiten Blatte. Es handelt sich zunächst darum, Näherungswerthe für das in (5) vorkommende Integral aufzufinden. Wir entwickeln dieses durch n-malige partielle Integration in die folgende Reihe, wobei wir, da T im zweiten Blatte negativ ist, $T = -|T|$ setzen wollen:

$$(6) \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-|T|} e^{-i\tau^2} d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|T|}^{\infty} e^{-i\tau^2} d\tau$$

$$= \frac{e^{-iT^2}}{\sqrt{\pi}} \Big\{ \frac{1}{2i} \frac{1}{|T|} - \frac{1}{(2i)^2} \frac{1}{|T|^3} + \frac{1.3}{(2i)^3} \cdot \frac{1}{|T|^5} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{1.3\ldots 2n-3}{(2i)^n} \frac{1}{|T|^{2n-1}} + (-1)^n \frac{1.3\ldots 2n-1}{(2i)^n} \int_{|T|}^{\infty} e^{-i\tau^2} \frac{d\tau}{\tau^{2n}} \Big\}.$$

Lässt man n in's Unendliche wachsen, so wird die Reihe *divergent.* Man darf daher nur bis zu einem endlichen n gehen und muss das zuletzt hingeschriebene Restglied berücksichtigen. Dieses ist stets kleiner als das vorhergehende Glied, wie eine leichte Betrachtung zeigt, so dass die Reihe (6) als *semiconvergent* bezeichnet werden kann.

Wir werden zur angenäherten Berechnung lediglich das *erste* Glied benutzen. Es ist dieses gestattet, wenn das zweite Glied bereits absolut genommen kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist, d. h. wenn

$$\left| e^{-iT^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}(2i)^2 |T|^3} \right| = \frac{1}{4\sqrt{\pi}|T|^3} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{|T|^3} < 2\sqrt{\pi}\,\varepsilon.$$

Denn dann ist auch der ganze Rest kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ und der begangene Fehler kleiner als ε. Es ist bequem, diese Bedingung durch eine noch etwas schärfere zu ersetzen, nämlich durch

$$\frac{1}{4T^2} < \varepsilon. \tag{7}$$

Das untere Blatt zerlegt sich für unsere fernere Betrachtung in *zwei Gebiete, je nachdem diese Ungleichung erfüllt ist oder nicht.* Dasjenige Gebiet, in dem sie nicht erfüllt ist, nennen wir den „*Uebergangsstreifen*“. Die Begrenzung des Uebergangsstreifens wird durch die Gleichung gegeben:

$$\frac{1}{8kr\cos^2\frac{\psi}{2}} = \varepsilon \quad \text{oder} \quad r(\cos\psi + 1) = \frac{\lambda}{8\pi\varepsilon},$$

wo $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ die Wellenlänge bedeutet. Die Grenzcurve ist eine *Parabel.* In rechtwinkligen Coordinaten $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$ lautet die Gleichung nämlich

$$y^2 + 4e(x - e) = 0, \quad e = \frac{\lambda}{16\pi\varepsilon}, \tag{8}$$

wo e die Entfernung des Brennpunktes vom Scheitel bedeutet. Der Scheitel liegt im Punkte $x = e$, $y = 0$, der Brennpunkt $x = 0$, $y = 0$ fällt mit dem Windungspunkte zusammen. Die Parabel umschliesst den negativen Theil der x-Axe. Um bestimmte Verhältnisse vor Augen zu haben, wollen wir vorübergehend für λ den ungefähren Werth der D-Linie 5.10^{-4} *mm*, für 16π die Zahl 50 nehmen und die Genauigkeit so bestimmen, dass $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ist. Dann wird $e = \frac{1}{10}$ *mm*. Die Parabel ist also äusserst schmal*).

In allen Punkten ausserhalb der Parabel ist die Ungleichung (7) erfüllt. Daher genügt es, unter den in der Optik vorliegenden Ver-

---

*) Wenn die Wellenlänge oder die vorgeschriebene Genauigkeit grösser (d. h. wenn λ grösser oder ε kleiner) wird, nimmt die Parabel etwas grössere Dimensionen an. Daher rührt es, dass in den Figuren der Tafel das Uebergangsgebiet ziemlich gross erscheint. Die Wellenlänge musste hier mindestens gleich 10 *mm* genommen werden, wenn die Zeichnung deutlich sein sollte. Als Genauigkeit wurde gewählt $\varepsilon = 2 . 10^{-2}$, so dass sich $e = 10$ *mm* bestimmte.

hältnissen für den weitaus grössten Theil des zweiten Blattes, die Reihe (6) durch ihr erstes Glied zu ersetzen.

Für u selbst ergiebt sich dementsprechend aus (5) der folgende Näherungswerth:

$$u = \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda} + \frac{\pi i}{4}}}{4\pi i \left|\cos\frac{\psi}{2}\right|}$$

oder

$$u = -\sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}}}{4\pi \cos\frac{\psi}{2}}. \tag{9}$$

Diese Gleichung gilt mit der Genauigkeit ε in allen Punkten des zweiten Blattes, welche nicht dem Uebergangsstreifen angehören.

Angenäherte Berechnung von u im ersten Blatte. Im ersten Blatte, wo $T > 0$ ist, können wir die Reihe (6) nicht direct verwenden. Wir haben aber nach Gleichung (1) pag. 358

$$u_1 = u_0 - u_2.$$

Wir grenzen uns auch im ersten Blatte ein *Uebergangsgebiet* ab, indem wir unsere Parabel an die entsprechenden Stellen des ersten Blattes übertragen. In allen Punkten des Parabeläusseren können wir dann u_2 durch den Näherungswerth aus Gleichung (9) ersetzen. Mithin erhalten wir für u die folgende angenäherte Darstellung:

$$u = e^{\frac{2\pi i r}{\lambda}\cos\psi} - \sqrt{\frac{\lambda}{r}} \frac{e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda} - \frac{i\pi}{4}}}{4\pi \cos\frac{\psi}{2}}, \tag{10}$$

welche in allen Punkten des ersten Blattes, die nicht dem Uebergangsgebiete angehören, gültig ist.

In den Uebergangsgebieten des ersten und zweiten Blattes dagegen müssen wir die exacte Formel (5) heranziehen.

Wir wollen uns im Folgenden die Terminologie der Optik zu Nutze machen. Nun hat die Function u an sich noch keine physikalische Bedeutung; sie entspricht den im § 1 eingeführten Hülfsfunctionen Ξ, H, Z. Wir erhalten aber eine Grösse, die wir als Lichtschwingung bezeichnen können und die den Grössen X, Y, Z in § 1 entspricht, wenn wir bilden

$$\Re\mathfrak{e}\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}} u\right), \tag{11}$$

wo t die Zeit, τ die Schwingungsdauer bedeutet. Von dem so entstehenden Schwingungszustande werden wir ein Bild bekommen, wenn wir seine *Niveaucurven* in verschiedenen Zeitpunkten construiren. Am einfachsten gelingt dieses für die *Knotenlinien*, d. h. für diejenigen

Curven, in denen die Schwingung 0 ist. *Wir fragen daher nach dem Verlauf dieser Nulllinien im zweiten und ersten Blatte und zwar zunächst für die Zeit* $t = 0$. Dieselben sind dargestellt durch die Gleichung $\Re e(u) = 0$.

Im *zweiten Blatte* ausserhalb des Uebergangsgebietes haben sie eine sehr einfache Gestalt. Ihre Gleichung lautet hier nach (9):

$$(12)\qquad \sqrt{\frac{\lambda}{r}}\,\frac{1}{4\pi\cos\frac{\psi}{2}}\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right)=0 \quad \text{d. h.} \quad \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\text{oder}\quad r=\lambda\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{8}\right)\quad [m=1,2,3\ldots].$$

Sie bilden ein System concentrischer Kreise um den Windungspunkt, in welchem sich die Radien aufeinander folgender Kreise um eine halbe Wellenlänge unterscheiden. Wir zeichnen diese Kreise (vgl. Fig. 1 d. Taf.), wobei wir jedoch jeden Kreis nur bis an das Uebergangsgebiet ausziehen dürfen. Denn über den Verlauf der Nullcurven im Uebergangsgebiet können wir auf Grund von (9) nichts aussagen. (Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass in Wahrheit die Nullcurven keine exakten Kreise, sondern transcendente Curven sind. Genau genommen können wir nur sagen: Längs aller jener Kreise ist der Werth von $|u|$ kleiner als ε.)

Die Nullcurven im *ersten Blatte* ausserhalb des Uebergangsgebietes berechnen sich aus Gleichung (10). Ihre Gleichung lautet, wenn wir im ersten Terme $r\cos\psi = x$ setzen, für $t = 0$.

$$(13)\qquad \cos\frac{2\pi x}{\lambda}-\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\,\frac{1}{4\pi\cos\frac{\psi}{2}}\cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda}+\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

Der erste Term (u_0), für sich gleich Null gesetzt, liefert ein *System paralleler Geraden G*, welche senkrecht zur x-Axe stehen und im Abstande $\frac{\lambda}{2}$ auf einander folgen. Es sind dieses einfach die Knotenlinien einer Schwingung, wie sie stattfinden würde, wenn der Windungspunkt garnicht vorhanden wäre. Diese Geraden verzeichnen wir in Fig. 2 d. Taf. Der zweite Term (u_2) für sich gleich Null gesetzt, liefert das beschriebene System concentrischer Kreise. Wir haben uns nun klar zu machen, welche Nullcurven dem zusammengesetzten Ausdrucke $u_0 - u_2 = 0$ entsprechen. Wir denken uns zu dem Zwecke die Fig. 1 auf das System der Geraden G in Fig. 2 heraufgelegt und betrachten zunächst einen derjenigen Punkte P, in denen sich ein Kreis und eine Gerade schneiden. Durch diesen muss nach Gleichung (13) auch die neu entstehende Nullcurve hindurchgehen.

Ferner kann zwischen zwei aufeinanderfolgenden Punkten P in grosser Entfernung vom Windungspunkte die Nullcurve nur wenig von

der Geraden G abweichen, da u_2 wegen des Factors $r^{-\frac{1}{2}}$ klein ist im Verhältniss zu u_0. Die neue Nulllinie wird daher nur wenig nach derjenigen Seite hinübergezogen, wo u_0 und u_2 dasselbe Vorzeichen haben und wird sich im Uebrigen um die Gerade G herumschlängeln, indem sie alle Punkte P, welche auf derselben Geraden G liegen, der Reihe nach durchläuft.

Es wäre aber möglich, dass die Nulllinien in grösserer Nähe an dem Windungspunkte von den betr. Geraden G soweit abgelenkt würden, dass sie zwei Punkte P verbinden, die ursprünglich auf verschiedenen Geraden G gelegen sind. Thatsächlich ist dieses nicht der Fall. Betrachten wir nämlich eine derjenigen Geraden G', welche in der Mitte zwischen zwei aufeinanderfolgenden Geraden G verläuft. Auf diesen hat u_0 den Werth $+1$ oder -1. Dagegen hat $|u_2|$ den Werth $\frac{\vartheta}{T}$, wo $\vartheta = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \cos\left(\frac{2\pi r}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right)$ ein echter Bruch und $1:T$ nach (7) kleiner als $2\sqrt{\varepsilon}$, also jedenfalls auch ein echter Bruch ist, sofern wir überhaupt nur eine vernünftige Genauigkeit vorschreiben. Mithin ist $|u_2| < 1$ und $u_0 - u_2$ kann längs der Geraden G' nirgends verschwinden. Die entstehenden Nullcurven können also auch in geringerem Abstande vom Windungspunkte die Geraden G' nirgends kreuzen. *Sie schliessen sich im Wesentlichen an den Verlauf der Geraden G an indem sie alle Punkte P der Reihe nach durchlaufen und führen von hier Elongationen aus, die kleiner sind als $\frac{\lambda}{4}$ und die sich überdies um so mehr abflachen, je weiter sich die Nullcurve vom Windungspunkte entfernt.* Wir überdecken demnach in Fig. 2 das obere Blatt mit einem solchen Systeme geschlängelter Curven, wobei wir jedoch jede Nullcurve nur bis an den Uebergangsstreifen heran ausziehen dürfen.

Was nun die *Uebergangsgebiete* betrifft, so müssen wir auf die exacte Formel (5) recurriren. Hier können wir zunächst die *Schnittpunkte der Nullinien mit der Axe unserer Parabel* leicht auffinden. Auf der Parabelaxe ist nämlich $\psi = \pm\pi$, also $T = 0$. Die Schnittpunkte sind daher gegeben durch die Gleichung

$$\Re e(u) = \cos\frac{2\pi r}{\lambda} = 0 \text{ oder } r = \frac{\lambda}{4} + \frac{m\lambda}{2} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Diese Nullpunkte (Q_m) folgen einander in dem constanten Abstande $\frac{\lambda}{2}$ und zwar findet man im ersten und zweiten Blatte dieselben Punkte Q_m. In jedem dieser Punkte hat die bez. Nullcurve eine *Ecke.* Es ist nicht schwer, die Grösse dieser Ecke aus Gleichung (5) zu ermitteln. Für die Tangente des halben Winkels derselben ergiebt sich die Formel $\pi\sqrt{\frac{2m+1}{2}}$ im ersten, $-\pi\sqrt{\frac{2m+1}{2}}$ im zweiten Blatte. Die Ecken

sind also im ersten und zweiten Blatte nach der entgegengesetzten Seite geöffnet; ihr Winkel nähert sich mit wachsender Entfernung vom Windungspunkte mehr und mehr einem Flachen.

Nun müssen doch die in Q_m zusammenstossenden Aeste der Nullcurve in irgend eine der ausserhalb des Uebergangsgebietes bereits eruirten Nullcurven übergehen. Wir stellen eine solche Verbindung zwischen den Ecken Q_m und den vorher gezeichneten aufeinanderfolgenden Nullcurvenstücken in Fig. 1 und 2 in willkürlicher Weise her, ohne uns um die Gestalt der Verbindungslinien im Einzelnen zu kümmern. Dadurch ist die Zeichnung des Niveaucurvensystems vollständig geworden.

Beim Vergleich der Fig. 1 und 2 sieht man noch, dass sich die Nullcurven des einen Blattes stetig und mit stetiger Tangente in die des anderen Blattes fortsetzen. Die vorher genannten Ecken sind also nur scheinbare und nur dadurch entstanden, dass die Geraden $\psi = \pi$ und $\psi = -\pi$, welche auf der Riemann'schen Fläche verschieden sind, in den Figuren zusammenfallen.

Beschreiben wir nunmehr den *Gesammtverlauf einer Nullcurve im ersten und zweiten Blatte*, wobei wir eine solche herausgreifen mögen, welche die Parabelaxen schneidet. Wir beginnen im Unendlichen des ersten Blattes oberhalb der Parabelaxe. Die Nullcurve schmiegt sich zunächst der Geraden G unendlich nahe an, oscillirt dann um diese herum und zwar mit um so stärkeren Elongationen, je näher sie dem Windungspunkte kommt. Beim Eintritt in den Uebergangsstreifen wird sie nach dem Windungspunkte hingezogen. Nachdem sie die Parabelaxe in einem der Punkte Q_m geschnitten hat, tritt sie in das zweite Blatt ein und umläuft den Windungspunkt auf einem Kreise. Bei ihrem zweiten Eintritt in das Uebergangsgebiet entfernt sie sich etwas vom Windungspunkte und gelangt im Punkte Q_m wieder in das erste Blatt zurück, wo sie mit abnehmenden Oscillationen im Grossen und Ganzen der Richtung der Geraden G folgt und unterhalb der Parabelaxe sich in's Unendliche verläuft. Diejenigen Nullcurven, welche die Parabelaxe nicht schneiden, zeigen einen einfacheren Verlauf, indem sie den Windungspunkt nicht umkreisen.

Dies der Schwingungszustand zur Zeit $t = 0$. Wollen wir uns nun auch die *Abhängigkeit desselben von* t veranschaulichen, wie sie durch die Formel (11) gegeben wird, so brauchen wir die Rechnung nicht von neuem durchzuführen. Wir haben uns vielmehr nur das soeben gezeichnete Nullcurvensystem in der Richtung der abnehmenden x wandern zu denken und können die Veränderungen, welche mit einer einzelnen Nullcurve bei wachsendem t vor sich gehen, direct folgendermassen beschreiben: Zu Beginn der Zeit schneidet unsere

Nullcurve die Einfallsrichtung $\psi=0$ im Unendlichen des ersten Blattes; sie erscheint hier als eine gerade Linie G. Bei der Annäherung an den Windungspunkt zeigt sie periodisch sich wiederholende Verzerrungen, welche in den dem Windungspunkt zunächst gelegenen Theilen am stärksten sind. In dem Momente, wo sie den Windungspunkt passirt, artet die Verzerrung in eine Spitze aus, die sich dann weiterhin in eine Schleife auflöst. Der im zweiten Blatt gelegene Theil der Schleife hat die Gestalt eines Kreises, während die beiden in's erste Blatt hinüberreichenden Enden der Schleife sich einer G-Geraden mehr oder minder anschmiegen. Beim Fortschreiten wandert der Doppelpunkt auf der Parabelaxe von dem Windungspunkte fort, während die Enden mehr und mehr die Gestalt einer zur Parabelaxe senkrechten Geraden annehmen und die Rundung der Schleife grösser und grösser wird.

Alles, was hier über die Gestalt der Nullcurven gesagt ist, gilt natürlich nur *bei Beschränkung auf die einmal festgesetzte Genauigkeit.* Die Verhältnisse liegen hier aber insofern besonders günstig, als wir das Gesagte, auch wenn man eine grössere Genauigkeit von uns verlangt, im Wesentlichen aufrecht erhalten können. Wir müssen dann nur unser Uebergangsgebiet entsprechend vergrössern und unsere numerischen Aussagen auf einen entsprechend kleineren Theil der Riemann'schen Fläche beschränken. Wird allerdings eine absolute Genauigkeit vorgeschrieben, so gelten sie für keinen im Endlichen gelegenen Theil der Fläche mehr.

Bemerken wir noch zum Schluss ausdrücklich, dass der Schwingungszustand im ersten und zweiten Blatte einen wesentlich verschiedenen Charakter hat; während wir die Lichtbewegung im ersten Blatte annähernd mit einer *ebenen* Welle vergleichen können, hat die Lichtbewegung des zweiten Blattes viel eher mit einer *Kugelwelle* Aehnlichkeit, welche von dem Windungspunkte auszugehen scheint. Es ist beinahe so, als ob von der Schwingungsenergie des ersten Blattes ein wenig durch den Windungspunkt hindurch in das zweite sickert und dort, ähnlich wie ein Stein auf einer Wasserfläche, ein System kreisförmiger Wellenringe erregt.

Alle diese Dinge werden im nächsten Paragraphen reale Bedeutung gewinnen.

§ 8.

Anwendung auf die Diffraction.

Wir behandeln in diesem Paragraphen das folgende einfachste Beugungsproblem: Es sei im Raume ein unendlich dünner, vollkommen undurchsichtiger, geradlinig begrenzter, ebener Schirm S vorhanden, dessen Kante die z-Axe bildet. Man lässt in einer zur Schirmkante

senkrechten Ebene paralleles Licht*) auffallen. Es soll in jedem Punkte des Raumes der Schwingungszustand ermittelt werden.

Wir zerlegen mit Herrn Poincaré**) den Zustand in zwei einfachere, aus denen sich jener umgekehrt zusammensetzen lässt und charakterisiren diese in der Terminologie der electromagnetischen Lichttheorie folgendermassen: In dem einen Falle (a) ist die *electrische*, in dem anderen (b) die *magnetische Schwingung* überall der z-Axe parallel gerichtet. Da die Maxwell'schen Gleichungen für ein nichtleitendes Medium (in unserem Falle die Luft) vollkommen symmetrisch gebaut sind, so können wir die ersten Gleichungen des § 1 eben sowohl als Differentialgleichungen für den elektrischen wie für den magnetischen Vector ansehen. In beiden Fällen ergiebt sich vermöge $X = 0$, $Y = 0$: $\frac{\partial Z}{\partial z} = 0$. Der Zustand ist also von einer Coordinate (z) unabhängig und wird von selbst zweidimensional. Die Differentialgleichungen für X, Y, Z reduciren sich, wenn wir von der Z-Componente zu der von t unabhängigen Function Z übergehen, auf

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \mathsf{Z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathsf{Z}}{\partial y^2} + k^2 \mathsf{Z} = 0.$$

Die *Grenzbedingungen* längs S aber lauten in beiden Fällen verschieden. Wenn wir den Schirm mit Herrn Poincaré als vollkommenen Leiter voraussetzen, erhalten wir längs S

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathsf{Z} &= 0 \quad \text{im Falle (a)}, \\ \frac{\partial \mathsf{Z}}{\partial n} &= 0 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad \text{(b)}. \end{aligned}$$

Wir fügen in beiden Fällen die Bedingung hinzu, dass Z überall endlich sein soll.

Den vorstehenden Bedingungen kann man nun mit Hülfe unserer mehrdeutigen Lösungen sehr leicht genügen. Wir denken uns die xy-Ebene längs S aufgeschnitten und eine zweite Ebene wechselweise daran befestigt. Für die so entstehende zweiblättrige Riemann'sche Fläche bildet S einen „natürlichen Verzweigungsschnitt"; Verzweigungspunkt ist der Durchstossungspunkt der Schirmkante mit der xy-Ebene.

---

*) Diese Ausdrucksweise bedarf der Erläuterung. Wenn wir, wie üblich, das Wort „paralleles Licht" durch die Function u_0 von pag. 342 erklären, so müssen wir genau genommen sagen: *Paralleles Licht ist bei Vorhandensein eines Schirmes unmöglich*. Denn in dem parallelen Verlauf der Niveaulinien tritt eine durch S hervorgerufene Störung ein. Wir werden aber aus physikalischen Gründen voraussetzen dürfen, dass die gestörte Function ebenso wie u_0 überall endlich ist und sich im Unendlichen ähnlich wie u_0 verhält. Mehr soll mit dem obigen Ausdruck „paralleles Licht" nicht ausgesagt werden.

**) Poincaré: Sur la polarisation par diffraction, Acta Math. B. 16, § 1.

Die beiden Blätter mögen wir als physicalisches Blatt und als Hülfsblatt unterscheiden. Das Azimuth φ werde von S aus gezählt, so dass im physikalischen Blatte $0 < \varphi < 2\pi$, im Hülfsblatte $-2\pi < \varphi < 0$ sei. Wir ziehen nun die zweiwerthige überall endliche Lösung u aus § 5 heran, welche wir, um die Abhängigkeit von der Einfallsrichtung $\varphi - \varphi'$ hervortreten zu lassen, $u(\varphi')$ schreiben mögen und bilden:

$$(3) \qquad \begin{aligned} Z &= u(\varphi') - u(-\varphi') \quad \text{im Falle (a)}, \\ Z &= u(\varphi') + u(-\varphi') \quad \text{,, \quad ,, \quad (b)}. \end{aligned}$$

Dann wird, wie aus Symmetriebetrachtungen hervorgeht, für $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ im Falle (a) $Z = 0$, im Falle (b) $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0$. Ferner genügt Z der Differentialgleichung (1) und der Bedingung überall endlich zu sein. Wir haben also in den Gleichungen (3) die Lösung unseres physicalischen Problems vor uns. Die von dem Schirme S hervorgerufenen *Beugungserscheinungen*, so können wir sagen, sind weiter nichts als *„Interferenzerscheinungen" zwischen den Wellenbewegungen $u(\varphi')$ und $u(-\varphi')$*, von denen die eine in der Richtung $\varphi = \varphi'$ des physicalischen, die andere in der Richtung $\varphi = -\varphi'$ des Hülfsblattes einfällt.

Während wir im vorigen Paragraphen eine einzelne derartige Welle untersuchten, haben wir uns jetzt denjenigen Zustand klar zu machen, der aus der Superposition von zwei solchen Wellen entsteht. Wir markiren zu dem Zwecke zunächst die Verlängerung der beiden Einfallsrichtungen, d. h. die Halbstrahlen $\varphi = \varphi' + \pi$ und $\varphi = -\varphi' + \pi$. Man bezeichnet den ersteren in der Optik als *Grenzlinie des geometrischen Schattens;* wir wollen sagen: des geometrischen Schattens *erster Art*. Den letzteren nennen wir entsprechend Grenzlinie des geometrischen Schattens *zweiter Art*.

Diese Bezeichnungen haben jedoch eine directe Bedeutung nur in dem extremen Falle der geometrischen Optik, wo die Wellenlänge geradezu gleich Null, unsere Constante k also unendlich wird. In diesem Falle wird unsere Function u, wie man aus Gleichung (5), pag. 359 unmittelbar abliest, auf der einen Seite der Schattengrenze gleich Null, auf der anderen Seite gleich der eindeutigen Lösung u_0. Nur dieser Grenzfall entspricht der landläufigen Ansicht von der Natur des Lichtes, nach welcher es hinter einem undurchsichtigen Körper dunkel ist und seitlich die Lichtbewegung so vor sich geht, als ob der Körper nicht vorhanden wäre. Für uns, die wir die Wellenlänge als endliche, wenn auch kleine Grösse voraussetzen müssen, wird der Begriff *„Schatten"* überhaupt illusorisch und das Wort *„Schattengrenze"* bedeutet für uns nur eine Linie, längs welcher eine Näherungsformel ihre Gültigkeit verliert und durch eine andere ersetzt werden muss.

Wir sondern ferner zwei Uebergangsstreifen S_1 und S_2 je durch eine Parabel ab, welche bez. die Schattengrenze erster und zweiter Art zur Axe hat und welche durch die Gleichung (8), pag. 360 gegeben ist. Dabei bedeutet ε die bei der Berechnung der Beugungserscheinungen vorgeschriebene Genauigkeit, wie sie sich etwa aus der Genauigkeit der Beobachtungen ergiebt.*)

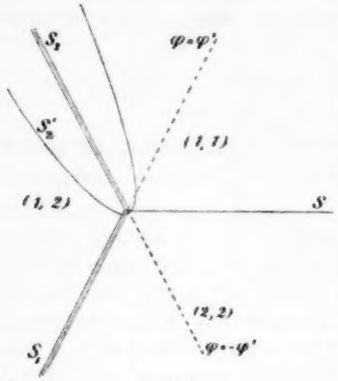


Fig. 5.

Das physikalische Blatt zerlegt sich so in 5 *Gebiete*, die wir der Reihe nach mit (1, 1), (S_2), (1, 2), (S_1), (2, 2) bezeichnen. Die Bezeichnungen (1, 1), (1, 2) ... sind so gewählt, dass sie an die Benennungen 1tes und 2tes Blatt des vorigen Paragraphen anknüpfen und angeben, ob wir das betr. Gebiet zum 1ten oder 2ten Blatte der Function $u(\varphi')$ bez. $u(-\varphi')$ zu rechnen haben, wobei sich z. B. in (1, 2) die erste Zahl auf $u(\varphi')$, die zweite auf $u(-\varphi')$ bezieht. Daraus folgt unmittelbar, welche Annäherungsformeln wir in den verschiedenen Gebieten anzuwenden haben. Wir haben nämlich für $u(\varphi')$ in den Gebieten (1, 1) und (1, 2) die Formel (10), in dem Gebiete (2, 2) die Formel (9), für $u(-\varphi')$ dagegen in (1, 1) die Formel (10), in (1, 2) und (2, 2) die Formel (9) von pag. 361 zu benutzen. Gehen wir noch von der Hülfsfunction Z zu der Schwingungscomponente $Z = \Re e\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}}\mathsf{Z}\right)$ über, so erhalten wir für Z die folgenden Näherungsformeln:

$$\text{in } (2, 2) \quad \frac{1}{4\pi}\cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\left\{\frac{\pm 1}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}\right\},$$

$$\text{in } (1, 2) \quad \cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}\cos(\varphi-\varphi')+\frac{t}{\tau}\right)+\frac{1}{4\pi}\cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\frac{\lambda}{r}}$$
$$\left\{\frac{\pm 1}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}\right\},$$

---

*) Der Fig. 5 liegen folgende Verhältnisse zu Grunde: $\lambda = 5 \,.\, 10^{-4\,\mathrm{mm}}$ (D-Linie), $\varepsilon = 3 \,.\, 10^{-3}$. Die Begrenzungsparabeln von S_1 und S_2 werden so schmal, dass sie nur noch angedeutet werden konnten. Der Abstand ihrer Scheitel vom Windungspunkte ist ungefähr $e = \frac{1}{300}{}^{\mathrm{mm}}$. Für das Gebiet S_2' (vgl. pag. 372) ergiebt sich $e' = 1^{\mathrm{mm}}$.

in (1, 1) $$\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}\cos(\varphi-\varphi')+\frac{t}{\tau}\right)\mp\cos 2\pi\left(\frac{r}{\lambda}\cos(\varphi+\varphi')+\frac{t}{\tau}\right)$$
$$+\frac{1}{4\pi}\cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)+\frac{\pi}{4}\right]\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\left\{\frac{\pm 1}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}\right\}.$$

Dabei gelten die oberen Zeichen im Falle a), die unteren im Falle b).

An diese Formeln knüpfen sich einige interessante Bemerkungen an.

Betrachten wir zunächst das *Gebiet* (2, 2) (das Gebiet *des geometrischen Schattens*, wie man gewöhnlich sagt). Die Lichtbewegung trägt hier durchaus den Charakter derjenigen, welche im vorigen Paragraphen als Wellenbewegung des zweiten Blattes beschrieben wurde.

In der Sprache der geometrischen Optik*) würde man die Formel (2, 2) folgendermassen deuten: *Von dem Windungspunkte $r = 0$ aus pflanzen sich nach allen Seiten innerhalb des Gebietes* (2, 2) *Strahlen in der Richtung des Radiusvector fort, gerade so als ob der Windungspunkt ein leuchtender Punkt wäre.*

Der Schwingungszustand im einzelnen Strahle ist, wie bei einer gewöhnlichen ebenen Welle gegeben durch $\cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right)+\delta\right]$, wo der Term $\delta = \frac{\pi}{4}$ die Phase des Lichtes bestimmt. Die Amplitude des Lichtes nimmt mit wachsendem r ab wie $\sqrt{\frac{1}{r}}$, also in demselben Verhältniss wie nach der Auffassung der geometrischen Optik das Licht eines leuchtenden Punktes in einem ebenen Problem. Die Amplitude ist im Allgemeinen sehr gering wegen des Factors $\sqrt{\lambda}$, sie wechselt überdies mit der Richtung des Strahles nach dem Gesetz

$$\left\{\frac{\pm 1}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}-\frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}\right\}.$$

So würde die geometrische Optik sagen und ebenso fasst unser Auge die Sache auf, wie denn überhaupt unsere Sehnerven genau auf die Begriffe der geometrischen Optik eingespielt zu sein scheinen. *Unser Auge schreibt die Strahlen wirklich einer Lichtquelle zu, welche in dem Windungspunkte supponirt wird*, d. h. *der Schirmrand erscheint, vom Gebiete des geometrischen Schattens aus gesehen, als feine leuchtende Linie.* Das ist natürlich eine optische Täuschung. In Wahrheit giebt es im Windungspunkte keine Unendlichkeitsstelle. Der Fehler rührt daher, dass das Auge die analytische Fortsetzung der Näherungsformel

---

*) Ich wende dieses Wort in etwas erweitertem Sinne auf jene ganze Betrachtungsweise an, welche den optischen Zustand in einzelne sich unabhängig fortpflanzende Strahlen zerlegt.

(2, 2) über die Uebergangsparabel hinaus bildet, was nicht erlaubt ist. *Das Auge sollte die analytische Fortsetzung nicht von der Näherungsformel, sondern von der exacten Formel bilden.*

Vom Standpunkte der geometrischen Optik ist die merkwürdige Lichtvertheilung im Gebiete (2, 2) ein Ausnahmezustand, dessen Auftreten man als Beugung bezeichnet. Wir können, wenn wir wollen, diesen Namen annehmen und sagen: Im geometrischen Schatten befindet sich *gebeugtes* Licht.

Gehen wir nun zum *Gebiete* (1, 2) über. Hier zerlegt sich unsere Näherungsformel in 2 Terme. Der erste hat genau die Gestalt einer ebenen Welle; er kann auch so geschrieben werden:

$$\cos 2\pi\left(\frac{x\cos\varphi' + y\sin\varphi'}{\lambda} + \frac{t}{\tau}\right).$$

Dieser Term stellt dasjenige Licht dar, welches wir erzeugen wollten, wenn wir sogenanntes paralleles Licht auf den Schirm auffallen liessen, welches wir aber nicht erzeugen konnten wegen der Anwesenheit des Schirmes. Der zweite Term hat dieselbe Gestalt, wie Formel (2, 2).

Die geometrische Optik würde in diesem Gebiete von zwei Lichtarten sprechen, von einfallendem und von gebeugtem Licht. Das erstere würde sie in Strahlen zerlegen, welche alle *parallel* laufen, das zweite in solche, welche im *Windungspunkte convergiren. Ebenso sieht auch unser Auge die Sache an.* Wenn es sich auf *Unendlich* accomodirt, erkennt es nur das Licht des *ersten* Terms; wenn es sich auf den *Windungspunkt* accomodirt, sieht es nur den *zweiten Term* und meint den Schirmrand leuchten zu sehen. Da sich in unserer Theorie die beiden Terme so glatt von einander absondern, können wir sie auch mit besonderen Namen belegen und den ersten *einfallendes*, den zweiten *gebeugtes* Licht nennen.

Im *Gebiete* (1, 1) endlich sondert sich unsere Näherungsformel in drei verschiedene Terme. Die beiden ersten haben die Gestalt von gewöhnlichem parallelen Lichte. Das parallele Licht des ersten Termes hat die Einfallsrichtung $\varphi = \varphi'$, das des zweiten die Richtung $\varphi = -\varphi'$. Die geometrische Optik würde den ersten Term als *einfallendes*, den zweiten als *reflectirtes*, den dritten als *gebeugtes* Licht bezeichnen. *Bei dem Sehvorgange sondern sich diese Terme ebenso von einander ab, wie in unseren Formeln.*

Im Grunde ist unsere Auffassung selbstverständlich die, dass unsere Function ebenso wie der physikalische Zustand, den sie darstellt, etwas *Einheitliches* ist, welches durch die im Probleme liegenden Randbedingungen bestimmt wird. Wenn wir einzelne Bestandtheile desselben herausgreifen und mit besonderen Namen belegen, so geschieht dieses nur der Bequemlichkeit wegen und dient kaum dem Verständniss des Ganzen.

Die Formeln von p. 368, 369 sind im Wesentlichen genau diejenigen des Herrn **Poincaré***). Das Merkwürdige dabei ist, dass bei Herrn Poincaré die ursprüngliche Problemstellung eine ganz andere ist, wie bei uns. Er denkt sich nämlich das Licht durch eine Linse auf den Schirmrand concentrirt, anstatt wie wir eine im Unendlichen ebene Welle auffallen zu lassen. Ferner rechnet Herr Poincaré von Anfang an mit Näherungsformeln, indem er höhere Potenzen von λ vernachlässigt. Dadurch geht aber das Criterium für den Gültigkeitsbereich der Näherungsformeln verloren und es entsteht die Schwierigkeit**), dass sich $\left(\text{wegen der Factoren } \frac{1}{\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}}, \text{ bez. } \frac{1}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}}\right)$ in der Schattengrenze erster bez. zweiter Art *Unendlichkeitsstellen* ergeben, welche physikalisch unmöglich sind. *Diese Schwierigkeit findet durch unsere Theorie ihre vollständige Erledigung.* Denn wir wissen, dass die Gültigkeit der Poincaré'schen Formeln nur bis an die *Parabeln*, nicht bis an die *Parabelaxen* heranreicht.

Wir wenden uns schliesslich zu den Uebergangsstreifen, insbesondere zu dem Gebiete S_1. Hier müssen wir auf die exacte Formel (5) von pag. 359 recurriren. Um Anschluss an Kirchhoff's Optik zu gewinnen, wollen wir die Functionen einführen:

$$M(x) = \int_x^\infty \cos(x^2 - \tau^2)\, d\tau = \mathfrak{Re}\left(e^{ix^2}\int_x^\infty e^{-i\tau^2}\, d\tau\right),$$

$$N(x) = \int_x^\infty \sin(x^2 - \tau^2)\, d\tau = \mathfrak{Im}\left(e^{ix^2}\int_x^\infty e^{-i\tau^2}\, d\tau\right).$$

Die Gleichung (5), pag. 359 können wir auch so schreiben

$$u = e^{-\frac{2\pi i r}{\lambda} + \frac{i\pi}{4}}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-T}^{+\infty} e^{-i(\tau^2 - T^2)}\, d\tau. \tag{4}$$

Bilden wir nun im Falle a) und b) die Function Z aus Gleichung (3) und weiterhin die Schwingungscomponente $Z = \mathfrak{Re}\left(e^{\frac{2\pi i t}{\tau}}\mathsf{Z}\right)$, so erhalten wir:

$$Z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) - \frac{\pi}{4}\right]\left(M(-T_1) \mp M(-T_2)\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left[2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) - \frac{\pi}{4}\right]\left(N(-T_1) \mp N(-T_2)\right),$$

$$T_1 = \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \cos\frac{\varphi - \varphi'}{2}, \quad T_2 = \sqrt{\frac{4\pi r}{\lambda}} \cos\frac{\varphi + \varphi'}{2}.$$

*) Poincaré: l. c. p. 318.

**) l. c. pag. 314.

Diese Gleichungen geben den exacten Ausdruck für den Schwingungszustand *zu einer beliebigen Zeit* und zwar natürlich nicht nur in den Uebergangsstreifen, sondern in allen Punkten der Riemann'schen Fläche. Wir berechnen daraus den *Mittelwerth der Schwingungsenergie während der Dauer einer Schwingung*, die sog. „*Intensität des Lichtes*", d. h.

$$J = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau Z^2\, d\tau.$$

Es ergiebt sich einfach

(5) $\frac{1}{2\pi}(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2)$, $\mathfrak{M} = M(-T_1) \mp M(-T_2)$, $\mathfrak{N} = N(-T_1) \mp N(-T_2)$.

Wir können diesen Ausdruck für den grössten Theil des Uebergangsstreifens S_1 durch einen einfacheren ersetzen, ohne die vorgeschriebene Genauigkeit zu beeinträchtigen. Zunächst sondern wir von S_1 denjenigen Theil ab, der gleichzeitig zu S_2 gehört. In dem übrig bleibenden Theile $(S_1 - S_2)$ können wir $M(-T_2)$ und $N(-T_2)$ durch Näherungsformeln ersetzen. Entwickeln wir nämlich das in (4) fungirende Integral nach Gleichung (6), pag. 359, so dürfen wir die Entwickelung mit dem ersten Gliede abbrechen und erhalten:

$$M(-T_2) = 0, \quad N(-T_2) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{|T_2|}\,.$$

Ferner beschreiben wir ausser der Parabel, welche das Gebiet S_2 begrenzt und welche der Genauigkeit ε entspricht, eine zweite Parabel, welche der Genauigkeit ε^2 entspricht und ein Gebiet S_2' begrenzt. Ihre Dimensionen sind nach Gleichung (8), pag. 360 bestimmt durch die Grösse $e' = \frac{\lambda}{|16\pi\varepsilon^2|}$. In allen Punkten, welche ausserhalb dieser Parabel liegen, gilt die zu (7) pag. 360 analoge Ungleichung: $\frac{1}{4T_2^2} < \varepsilon^2$ oder $\frac{1}{2|T_2|} < \varepsilon$. Sondern wir von S_1 auch dieses Gebiet S_2' ab, so wird in dem übrig bleibenden Theile $S_1 - S_2'$ auch $N(-T_2)$ für unsere Zwecke merklich gleich Null. Daher reducirt sich der Ausdruck für die Intensität auf den folgenden;

(6) $$2\pi J = M^2(-T_1) + N^2(-T_1),$$

welcher in dem Gebiete $S_1 - S_2'$ den wahren Werth bis auf einen erlaubten Fehler richtig darstellt.

Hiermit vergleichen wir den von Kirchhoff*) gegebenen Ausdruck:

(7) $$CJ' = M^2(u) + N^2(u).$$

In diesem bedeutet C eine unbestimmt bleibende Constante, welche in die Maasseinheit der Intensität aufgenommen wird und von der wir

*) Kirchhoff: Math. Optik, 7te Vorlesung § 3.

absehen können. Die Grösse u ist durch die Gleichung (11 a) bei Kirchhoff definirt. Setzen wir darin, um auf die Bedingungen und Bezeichnungen unseres Problemes zu kommen:

$$z_1 = \infty,\ x_0 = r\cos(\varphi - \varphi' + \pi),\ z_1 = r\sin(\varphi - \varphi' + \pi),$$

so ergiebt sich

$$u^2 = \frac{r\pi}{\lambda}\,\frac{\sin^2(\varphi - \varphi' + \pi)}{\cos(\varphi - \varphi' + \pi)},$$

während bei uns ist:

$$T_1{}^2 = \frac{4r\pi}{\lambda}\cos^2\frac{\varphi - \varphi'}{2}.$$

Diese beiden Grössen werden für die Grenze des geometrischen Schattens erster Art identisch. In der That, entwickeln wir sie nach aufsteigenden Potenzen der Grösse $\vartheta = \varphi - \varphi' + \pi$, welche man als *Beugungswinkel* bezeichnet, so erhalten wir die Reihen:

$$u^2 = \frac{r\pi}{\lambda}\left(\vartheta^2 + \frac{\vartheta^4}{6} + \cdots\right),$$

$$T_1{}^2 = \frac{r\pi}{\lambda}\left(\vartheta^2 - \frac{\vartheta^4}{12} + \cdots\right),$$

welche bis auf Glieder 4ter Ordnung exclusive übereinstimmen. Wir schliessen daraus, dass wir in der Umgebung der Schattengrenze ein von Null verschiedenes endliches Gebiet abgrenzen können, in welchem sich die Grössen T_1 und u um weniger als eine beliebige endliche Grösse unterscheiden. Da die Ausdrücke (6) und (7) stetige Functionen von T_1 bez. von u sind, so dürfen wir ferner sagen: Wir können in der Nähe der Schattengrenze ein von Null verschiedenes Gebiet abgrenzen, in welchem der Unterschied zwischen der Kirchhoff'schen Formel und unserer Formel unterhalb der erlaubten Fehlergrenze liegt. Da endlich unsere Formel (6) von der exacten Formel in genügender Entfernung vom Windungspunkte (d. h. in solchen Punkten, die ausserhalb S_2' liegen) sich um weniger als ε unterscheidet, so fahren wir fort: *Die Kirchhoff'sche Formel giebt den wahren Werth der Intensität in allen denjenigen Punkten mit genügender Genauigkeit wieder, welche* 1) *genügend nahe an der Schattengrenze liegen und* 2) *genügend weit von dem Windungspunkte entfernt sind.*

Wir kommen somit zu dem merkwürdigen Resultat, dass wir die Ergebnisse der älteren Beugungstheorie in gewissem Umfange bestätigen können, während wir die Methode, durch welche sie abgeleitet werden, als ganz unzulässig erklären müssen. Dabei finden sich auch die Bedingungen, welche soeben für die Gültigkeit der Kirchhoff'schen Formel angegeben wurden, in der älteren Beugungstheorie vor, nur dass sie dort nicht wie hier numerisch präcisirt werden können. In der That

macht die ältere Beugungstheorie nur den Anspruch, die Beugungserscheinungen in unmittelbarer Nähe der Schattengrenze und in sehr grosser Entfernung vom Schirmrande richtig darzustelllen.

Das Gültigkeitsgebiet der Kirchhoff'schen Formeln ist hiernach nur ein sehr kleines; ausserhalb desselben werden sie merklich falsch. Hier treten vielmehr die *Poincaré'schen Formeln* in ihr Recht. Indem unsere Theorie die einen und die anderen als jeweils geeignete Approximationen der exacten Formeln erscheinen lässt, bildet sie die Brücke zwischen jenen beiden Theorieen und weist beiden ihren beschränkten Gültigkeitsbereich zu.

Die Frage nach der *experimentellen Bestätigung* unserer Theorie können wir hiernach mit einem Worte erledigen. Einerseits haben sich die Kirchhoff'schen Formeln bei Beobachtungen unter kleinem Beugungswinkel vielfach bewährt; andererseits vergleicht Herr Poincaré seine Formeln mit den unter grossen Beugungswinkeln angestellten Beobachtungen von Gouy und findet im Wesentlichen eine Bestätigung derselben. *In demselben Umfange, d. h. sowohl für kleine als für grosse Beugungswinkel wird also auch unsere Theorie durch die Erfahrung bestätigt.*

Ganz besonders eignen sich zu einem Vergleich mit unserer Theorie die Beobachtungen des Herrn Maey, welche sich durch Einfachheit des Beobachtungsarrangements und durch Genauigkeit der auch quantitativ durchgeführten Messungen auszeichnen*). Hierauf, sowie auf weitere physikalische Consequenzen gedenke ich an anderer Stelle einzugehen. Ferner hoffe ich demnächst auch solche Lösungen der Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ mittheilen zu können, welche auf einer Riemann'schen Fläche mit zwei im Endlichen gelegenen bez. mit unendlich vielen Verzweigungspunkten eindeutig sind. Diese würden dann eine exacte Behandlung solcher Beugungserscheinungen gestatten, wie sie durch einen Spalt bez. durch ein Gitter hervorgerufen werden.

Göttingen, im Sommer 1895.

---

*) Vgl. Wiedemann's Annalen 49, 1893.

Die Configuration $(12_6, 16_3)$ und die zugehörige Gruppe von 2304 Collineationen und Correlationen.

Von

JULIUS FEDER in Strassburg.

A. Erzeugung und allgemeine Eigenschaften der Configurationen $(12_6, 16_3)$ und $(24_9, 18_4)$.

(1.) Bekanntlich liegen die 12 Aehnlichkeitspunkte von 4 Kugeln zu je dreien auf 16 Geraden und zu je sechsen in 12 Ebenen, den 8 Aehnlichkeitsebenen und 4 Centralebenen der Kugeln; diese 12 Ebenen aber gehen zu je dreien durch die 16 Geraden und zu je sechsen durch die 12 Aehnlichkeitspunkte*). Die genannten 12 Punkte, 12 Ebenen und 16 Geraden bilden somit nach der Reye'schen Bezeichnung eine Configuration $(12_6, 16_3)$.

Jede Ebene, welche irgend einen Punkt dieser Configuration mit einer Cf.-geraden verbindet, ist eine Ebene der Configuration, und ebenso ist der Schnittpunkt irgend einer Cf.-geraden mit einer beliebigen Cf.-ebene ein Punkt der Configuration. Jede Cf.-ebene enthält 4 Cf.-geraden, welche sich in den 6 Cf.-punkten der Ebene schneiden. Sie wird in ihren 4 Cf.-geraden von je zwei, insgesammt also von 8 Cf.-ebenen geschnitten; die drei übrigen Cf.-ebenen schneidet sie in den Diagonalen des von ihren 4 Cf.-geraden gebildeten Vierseits und bildet mit ihnen ein Tetraeder Δ, dessen Kanten je 2 Cf.-punkte, und dessen Flächen je 4 und zusammen alle 16 Cf.-geraden enthalten. Da in einem Vierseit die 3 Diagonalen sich gegenseitig harmonisch theilen, so sind die 2 mit irgend einer Kante des Tetraeders Δ incidenten Cf.-punkte durch die auf dieser Kante gelegenen Eckpunkte von Δ harmonisch getrennt. Also:

> „Die 12 Cf.-ebenen der Cf. $(12_6, 16_3)$ lassen sich in 3 Quadrupel theilen, von welchen jedes die Ebenen eines Tetraeders Δ bildet; die Cf.-punkte liegen zu je zweien auf den Kanten jedes der 3 Tetraeder Δ und trennen deren

---

*) Vgl. Poncelet. Traité des propriétés proj. des figures, 1822, p. 409.

Eckpunkte harmonisch von einander. — Je zwei der Tetraeder Δ liegen auf vierfache Weise bez. der Ebenen des dritten perspectiv, und die 3Δ bilden ein sog. ‚desmisches‘ System.“*)

Die 18 Kanten der Tetraeder Δ wollen wir mit Herrn Reye**) die „Diagonalen“ der Cf. $(12_6, 16_3)$ nennen.

Analog zu den vorstehenden Sätzen ergiebt sich:

„Die Cf.-punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ lassen sich in 3 Quadrupel theilen, von welchen jedes die Eckpunkte eines Tetraeders Δ_1 bildet; die Cf.-ebenen gehen zu je zweien durch die Kanten jedes der 3 Tetraeder Δ_1 und trennen deren Ebenen harmonisch. Je zwei der Tetraeder Δ_1 liegen auf vierfache Weise bez. der Eckpunkte des dritten perspectiv, und die 3 Δ_1 bilden gleichfalls ein ‚desmisches‘ System.“

Die Tetraeder Δ_1 haben auch die 18 Diagonalen der Cf. zu Kanten. Jede dieser Diagonalen ist incident mit zwei Eckpunkten und zwei Ebenen eines Δ sowohl wie eines Δ_1; die 24 Ebenen, 24 Eckpunkte und 18 Kanten der 6 Tetraeder Δ und Δ_1 sind Elemente einer Cf. $(24_9, 18_4)$, der „harmonischen“ Configuration. Die 18 Geraden dieser Cf. sind mit je 4 harmonischen Cf.-punkten und Cf.-ebenen incident.

Für das folgende (2) ist die Bemerkung nicht unwichtig, dass zwei Gegenkanten eines Tetraeders Δ auch Gegenkanten eines Δ_1 sind, oder mit anderen Worten, dass die 4 auf zwei Gegenkanten eines Δ liegenden Punkte der Cf. $(12_6, 16_3)$ die Eckpunkte eines Δ_1 bilden. Wäre nämlich die Verbindungsgerade von zwei auf irgend welchen Gegenkanten eines Δ liegenden Punkten der Cf. $(12_6, 16_3)$ eine Cf.-gerade, so wäre die Verbindungsebene derselben mit einer der betr. Gegenkanten, d. h. mit dem zweiten auf dieser gelegenen Cf.-punkte, nach obigem eine Cf.-ebene; durch diese Kante ginge demnach ausser den zwei Cf.-ebenen, welche zum Tetraeder Δ gehören, noch eine dritte Ebene der Cf. $(12_6, 16_3)$, was aber nach einem früheren Satze nicht der Fall ist. Wir wollen solche Diagonalen der Cf. $(12_6, 16_3)$, welche Gegenkanten in je einem Tetraeder Δ und Δ_1 sind, „Gegendiagonalen“ nennen.

(2.) Verstehen wir überhaupt unter dem „Gegenelement“ eines Cf.-elementes das diesem in einem Δ oder Δ_1 gegenüberliegende Element, so schneiden sich die Gegendiagonalen der 3 in einer Ebene ε eines Tetraeders Δ oder Δ_1 gelegenen Diagonalen der Cf. im Gegen-

*) Vgl. Reye, Acta Math. I, p. 99. — Cyparissos Stephanos, Bulletin des sciences math. et astr., 2e série t. III, p. 424. 1879.

**) a. a. O. p. 98.

punkte von ε. Da nun die 6 in irgend einer Cf.-ebene ε der Cf. $(12_6, 16_3)$ gelegenen Cf.-punkte P paarweise auf den 3 mit ε incidenten Diagonalen liegen, so gehen die Gegenebenen der 6 Punkte P paarweise durch die Gegendiagonalen der 3 Diagonalen, sie gehen sonach sämmtlich durch den Gegenpunkt von ε.

Diese Bemerkung setzt uns in die Lage, die Existenz einer polaren Correlation nachzuweisen, welche die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 zu Poltetraedern hat. Eine polare Correlation σ, welche ein Tetraeder Δ zum Poltetraeder besitzt, ist festgelegt, wenn wir irgend einem Eckpunkte eines zweiten Δ seine Gegenebene ε als entsprechende Ebene zuweisen. Die Schnittpunkte der Ebene ε mit den Kanten des Poltetraeders Δ sind die 6 Cf.-punkte von ε; diesen 6 Punkten entsprechen in σ 6 Ebenen, welche durch die resp. gegenüberliegenden Kanten des Poltetraeders Δ und durch den Gegenpunkt von ε gehen; den 6 Cf.-punkten von ε entsprechen somit in der Correlation σ ihre Gegenebenen. Dass auch die übrigen 6 Cf.-punkte durch σ in ihre Gegenebenen übergeführt werden, folgt leicht aus den in (1) angeführten Sätzen. Die Correlation σ besitzt also wirklich die 3 Tetraeder Δ_1 zu Poltetraedern, ebenso aber die 3Δ, weil deren Gegenkanten aus reciproken Polaren bestehen. Da die 12 Ebenen der 3Δ und die 12 Eckpunkte der $3\Delta_1$ einer Cf. $(12_6, 16_3)$ angehören, so gehören die 12 Eckpunkte der Δ und die 12 Ebenen der Δ_1 gleichfalls einer Cf. $(12_6, 16_3)$ an. Die beiden Cff. $(12_6, 16_3)$ gehen durch die polare Correlation σ in einander über und bilden zusammen die schon oben erwähnte harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$. Diese beiden Cff. $(12_6, 16_3)$, welche ihre Diagonalen gemeinsam haben, wollen wir „associirte" Configurationen nennen.

(3.) Aus dem vorhergehenden ergeben sich ohne weiteres die folgenden zwei Erzeugungsarten von Cff. $(12_6, 16_3)$:*)

a. Man durchschneidet die 6 Kanten eines Tetraeders Δ durch eine Ebene ε; die 6 Schnittpunkte bilden mit denjenigen 6 Kantenpunkten, die von ihnen durch je 2 Eckpunkte des Tetraeders harmonisch getrennt sind, die Punkte der Cf. Zu den 12 Ebenen der Cf. gehören ausser den 4 Tetraederebenen und der Ebene ε die sieben Ebenen, welche von ε durch je zwei Gegenelemente des Tetraeders harmonisch getrennt sind.

b. Analog bilden die 6 Ebenen, durch welche die 6 Kanten eines Tetraeders Δ_1 aus einem Punkte P projicirt werden, mit denjenigen 6 Ebenen, die von ihnen durch je zwei Tetraederflächen harmonisch getrennt sind, die 12 Ebenen einer Cf. $(12_6, 16_3)$; ihre 12 Cf.-Punkte bestehen aus den 4 Eckpunkten von Δ_1, dem Punkte P und den

*) Reye, a. a. O. p. 97, 98.

sieben Punkten, welche von P durch je zwei Gegenelemente des Tetraeders harmonisch getrennt sind.

Jede auf eine der vorstehenden Arten erzeugte Cf. $(12_6, 16_3)$ kann durch Collineationen und ebenso durch Correlationen in sich selbst transformirt werden.*) Die Collineationen führen die zu der Cf. $(12_6, 16_3)$ gehörigen 3 Tetraeder Δ in einander über. Man kann nun zur Festlegung einer solchen Collineation den Ebenen eines Δ die Ebenen irgend eines Δ (und zwar auf 24 verschiedene Weisen) und ferner einer fünften Cf.-ebene eine beliebige fünfte als entsprechende Elemente zuweisen und erhält demnach $576 = 3 \cdot 24 \cdot 8$ Collineationen, welche unsere Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen. Entsprechend giebt es 576 Correlationen, welche die Cf. in sich transformiren; diese führen die 3Δ in die $3\Delta_1$ über und umgekehrt die Δ_1 in die Δ.

(4.) Es lässt sich nachweisen**), dass auf die oben angegebenen Arten (3a, b) jede Cf. $(12_6, 16_3)$ erzeugt werden kann. Dieser Nachweis zeigt erstens, dass bei jeder Cf. $(12_6, 16_3)$ die Verhältnisse so liegen, wie sie bis jetzt angegeben wurden, insbesondere dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ in je 576 collinearen und 576 correlaren Räumen sich selbst zugeordnet ist. Dann aber folgt aus jenem Nachweise sofort, dass jede Cf. $(12_6, 16_3)$ durch 576 Collineationen und 576 Correlationen in jede andere übergeführt werden kann. Wir sind somit berechtigt, die projectiven Eigenschaften einer „metrischen" Cf. $(12_6, 16_3)$, in welcher die Tetraeder Δ_1 eine ausgezeichnete Gestalt besitzen, auf jede Cf. $(12_6, 16_3)$ auszudehnen.

Von diesen metrischen Configurationen sind zwei besonders einfach, nämlich die Configurationen der regulären Hexaeder und Octaeder***). Die Würfelconfiguration enthält ausser den 8 Eckpunkten eines Würfels, seinen 12 Kanten und 6 Flächen noch den Mittelpunkt, die durch ihn gehenden 4 Diagonalen und 6 Diagonalebenen und die 3 unendlich fernen Kantenpunkte. Die reguläre Octaedercf. besteht aus den 8 Flächen, 12 Kanten, 6 Eckpunkten, den 3 Diagonalebenen, den unendlich fernen 6 Punkten und 4 Geraden der Kanten und Flächen eines regulären Octaeders, ausserdem gehört der Cf. noch die unendlich ferne Ebene an. Uebrigens nennt Herr Reye jede Cf. $(12_6, 16_3)$ eine Hexaeder- oder Octaedercf. Je eine Würfel- und eine reguläre Octaederconfiguration sind einander associirt.

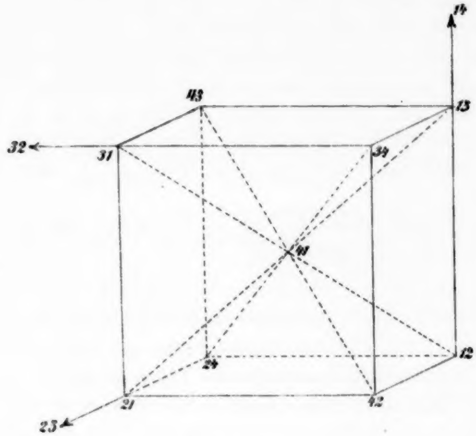
(5.) Folgende Bezeichnung der Cf.-elemente rührt von Herrn Reye her:

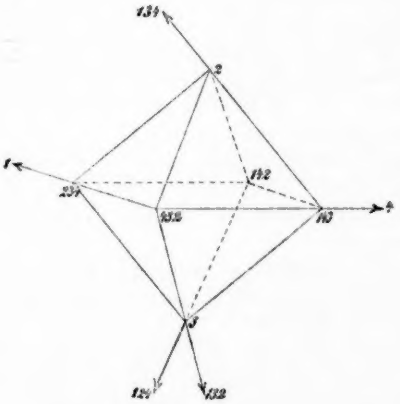
Sei i, k, l, m irgend eine Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4. Wir

*) Reye, a. a. O. p. 100.
**) Ebenda p. 98.
***) Ebenda p. 100.

bezeichnen dann die Punkte der Cf., die Eckpunkte der Tetraeder Δ_1, durch die Ziffernpaare ik (s. Fig.); unterscheiden wir die Δ_1, ebenso wie die Δ durch oben angefügte Indices 1, 2, 3, so nennen wir die Eckpunkte von:

	Δ_1^1	Δ_1^2	Δ_1^3
bez.	12 21 34 43	13 31 24 42	14 41 23 32.





Von den 12 Cf.-ebenen bezeichnen wir vier, die einem Δ angehören, durch die Ziffern $i = 1, 2, 3, 4$; die übrigen acht durch die Ternen ikl oder deren cyklische Permutationen. Es mögen die Ebenen der Tetraeder

bez. durch

$$\begin{array}{ccc} \Delta^1 & \Delta^2 & \Delta^3 \\ \mathbf{1\,2\,3\,4} & 234\ 143\ 124\ 132 & 432\ 134\ 142\ 123 \end{array}$$

bezeichnet werden.

Die Bezeichnung der Punkte und Ebenen der Cf. lässt sich so einrichten, dass die 6 Punkte ik, il, im, ki, li, mi in der Ebene i, die Punkte ik, il, im, lm, mk, kl in der Ebene $klm = lmk = mkl$ liegen, und dass ferner die Punkte ik, il, im, ebenso aber die Punkte ik, li, mi mit einer Cf.-geraden incident sind. Dass diese Bezeichnungsweise, welche wir acceptiren, möglich ist, kann man aus den Figuren ersehen*), und ergiebt sich auch aus der Erzeugungsart (3a), wenn wir die Ebenen des dort genannten Δ durch i, k, l, m und die Schnittpunkte seiner Kanten mit der Ebene ε bez. durch ik, il, im, kl, lm, mk bezeichnen u. s. w. Die Ebene ε ist dann mit klm zu bezeichnen.

(6.) Die 8 Eckpunkte von je 2 Tetraedern Δ_1 sind associirte Punkte, z. B. die 8 Eckpunkte der Tetraeder Δ_1^1 und Δ_1^2,

$$12\ 21\ 34\ 43, \qquad 13\ 31\ 24\ 42.$$

Durch sie hindurch gehen nämlich die 3 Flächen II. O.:

1) das Paar der Ebenen 234 und 143,
2) das Paar der Ebenen 142 und 432,
3) das Paar der Ebenen **2** und **3**.

Ueberhaupt gehen durch die genannten 8 Punkte diejenigen 6 Ebenenpaare, welche aus den mit irgend einer Kante des dritten Tetraeders Δ_1^3 incidenten Cf.-ebenen gebildet werden. Wir erhalten demnach 3 Gruppen von associirten Punkten, von welchen jede die 8 Eckpunkte zweier Δ_1 umfasst. Die 8 Punkte jeder dieser Gruppen sind die Basispunkte eines Bündels von Flächen II. O., und es ist leicht zu beweisen, dass jede beliebige Fläche eines der so erhaltenen 3 Bündel das Tetraeder Δ_1, dessen Eckpunkte nicht zu den Basispunkten des Bündels gehören, als Poltetraeder besitzt. Von diesen 3 Flächenbündeln behaupten wir:

„Die Punkte einer beliebigen Fläche irgend eines der Bündel sind paarweise conjugirt bez. des zweiten und ebenso des dritten Bündels.“

Zunächst beweisen wir, dass jeder Kegel II. O., welcher eine Ecke irgend eines Δ_1, etwa den Punkt 12 von Δ_1^1, zum Mittelpunkt hat und die 4 durch ihn gehenden Cf.-geraden enthält, sich selbst con-

*) Die Figuren sind der öfters erwähnten Arbeit des Herrn Reye entnommen; in der zweiten Figur sind die Eckpunkte der Δ durch die Ziffern bezeichnet, welche eigentlich den ihnen gegenüberliegenden Tetraederebenen zukommen.

jugirt ist in Bezug auf die beiden Flächenbündel, welche ausser den Eckpunkten desselben Tetraeders Δ_1^1 noch die Eckpunkte je eines zweiten Δ_1 zu Basispunkten besitzen. Einer der letzteren Bündel hat die Basispunkte

$$12\ 21\ 34\ 43,\quad 13\ 31\ 24\ 42.$$

In Bezug auf ihn sind den Punkten einer Geraden g des genannten Kegels 12 die Punkte einer cubischen Raumcurve c^3 conjugirt, welche die Polaren von g bez. der Flächen des Bündels zu Sehnen hat.*) Da die Gerade g auf einer Fläche dieses Bündels liegt, und folglich mit einer ihrer Polaren zusammenfällt, so ist g selbst Sehne von c^3. Diese cubische Raumcurve geht durch den sich selbst conjugirten Punkt 12 und durch die 4 Punkte 14, 41, 23, 32; denn letztere bestimmen ja ein Poltetraeder der Flächen des Bündels, und jeder von ihnen ist dem Schnittpunkt von g mit der gegenüberliegenden Tetraederebene conjugirt. Die Raumcurve c^3 wird daher aus 12 durch einen Kegel II. O. projicirt, welcher ausser g die 4 Cf.-geraden von 12 enthält; dieser Kegel ist demnach mit dem obigen Kegel 12 identisch, d. h. die cubische Raumcurve c^3 liegt auf dem Kegel 12, und dieser ist sich selbst conjugirt bez. des erwähnten Bündels. Ebenso beweist man, dass die Kegel mit den Mittelpunkten 21, 34, 43, welche die durch diese Punkte gehenden Cf.-geraden enthalten, sich selbst conjugirt sind in Bezug auf jeden der Bündel, welche ausser 12, 21, 34, 43 noch die Eckpunkte von Δ_1^2 resp. Δ_1^3 zu Knotenpunkten besitzen. Dasselbe gilt dann aber auch für die biquadratischen Schnittcurven jener Kegel, d. h. für sämmtliche durch die 8 Eckpunkte von Δ_1^2 und Δ_1^3 gehenden biquadratischen Raumcurven, folglich auch für die Flächen des Bündels, welcher diese 8 Eckpunkte als Knotenpunkte besitzt. Diese Sätze sind der Erweiterung fähig. So folgt z. B. ohne weiteres:

> „Zwei projective Büschel von Flächen II. O., welche zweien der obigen Bündel angehören, erzeugen eine Fläche IV. O., deren Punkte paarweise conjugirt sind bez. des dritten Bündels."

(7.) Da zwei associirte Cff. (12_6, 16_3), welche zusammen eine harmonische Cf. (24_9, 18_4) bilden, durch 576 Collineationen und 576 Correlationen in sich selbst, durch ebensoviele projective Verwandtschaften aber in einander übergehen, so wird die harmonische Cf. durch 1152 Collineationen und 1152 Correlationen in sich selbst übergeführt. Diese 2304 Collineationen und Correlationen sind die einzigen, welche die harmonische Cf. ungeändert lassen. Das leuchtet sofort ein, sobald wir beweisen, dass die harmonische Cf. nur durch solche

*) Reye, Geometrie der Lage, 3. Aufl. III, p. 136.

Collineationen oder Correlationen in sich selbst übergeht, welche die beiden sie zusammensetzenden associirten Cff. (12_6, 16_3) in sich selbst oder in einander transformiren. Nehmen wir nun an, es ginge durch irgend eine Collineation, welche die harmonische Cf. in sich überführt, irgend eine Ebene der einen Cf. (12_6, 16_3) in eine Ebene derselben Cf. über. In jeder dieser beiden Ebenen liegen 3 Diagonalen der Cf. (12_6, 16_3), und von den zweiten durch diese Diagonalen gehenden Ebenen dieser Cf. geht auch das eine Tripel in das andere über; es ergiebt sich dies daraus, dass die durch eine Diagonale gehenden Cf.-ebenenpaare zweier associirter Cff. (12_6, 16_3) einander harmonisch trennen und dahe rauch in ebensolche Ebenenpaare transformirt werden. Und so finden wir, dass ein Δ der einen Cf. (12_6, 16_3) in ein Δ derselben Cf. übergeführt wird. Die 12 Ebenen der associirten Cf. aber werden durch die vorausgesetzte Collineation in einander transformirt, weil sie paarweise durch die Kanten der beiden eben erwähnten Δ gehen und durch deren Flächen paarweise harmonisch getrennt werden. Also geht durch unsere Collineation die zweite Cf. und damit auch die associirte in sich selbst über. Also:

> „Jede Collineation, die eine harmonische Cf. in sich selbst transformirt, führt die beiden die harmonische Cf. bildenden associirten Cff. (12_6, 16_3) entweder in sich selbst oder in einander über.“

Die harmonische Cf. ist daher nur auf 1152 Arten zu sich selbst collinear.

Für die Correlationen kann man auf ähnliche Weise das analoge Resultat ableiten; man kann aber auch den Satz benutzen:

> „Giebt es n und nur n Collineationen, und eine Correlation, welche ein Gebilde in sich transformiren, so giebt es auch n und nur n Correlationen, welche das betr. Gebilde in sich überführen.“

Diese n Correlationen resultiren aus jener einen und den n Collineationen.

B. Eintheilung und Beschreibung der 576 Collineationen, welche eine Cf. (12_6, 16_3) in sich selbst transformiren.

(8.) Die 576 Collineationen, welche eine Cf. (12_6, 16_3) in sich selbst überführen, bilden eine Gruppe; denn das Product irgend welcher von ihnen ist offenbar eine Collineation mit derselben Eigenschaft und gehört somit zu jenen 576 Collineationen. Es liegt nun im Wesen einer solchen Gruppe, dass sie sich durch eine Anzahl ihrer Individuen, welche kleiner ist als ihr Grad, erzeugen lässt. Ehe wir jedoch hierauf eingehen, ist es unbedingt nothwendig, eine Beschreibung und Eintheilung der 576 Collineationen zu geben. Von den Gesichtspunkten,

von denen aus man eine solche Eintheilung treffen kann, wählen wir wohl einen der natürlichsten, wenn wir die 576 Collineationen nach der Ueberführung der Δ in einander eintheilen. Diese Eintheilung bietet sich von selbst dar, da man ja bei der Herstellung einer collinearen Verwandtschaft einem Tetraeder und einer zu ihm in allgemeiner Lage befindlichen Ebene ein anderes Tetraeder und eine entsprechende Ebene zuweist. Bei der Darstellung der Collineationen bedienen wir uns der Cykeln homologer Punkte und Ebenen; zugleich stellen wir den Uebergang der Δ und ebenso der Δ_1 in einander cyklisch dar. Die 576 Collineationen lassen sich in beigegebener Tabelle (Seite 10 und 11) unterbringen, in welcher p, q, r die Ziffern 1, 2, 3 in irgend einer Permutation bedeuten.

Es liegt nicht in unserer Absicht, genau anzugeben, wie wir diese Tabelle aufgestellt haben, wir wollen sie nur rechtfertigen, und das nur insoweit, als wir sie später benutzen werden. Wir wollen Aufschluss darüber geben, warum wir uns erlaubt haben, gewisse Collineationen in eine Abtheilung zu bringen, und für sie alle nur ein Beispiel als Typus derselben anzugeben.

Nehmen wir z. B. die Abtheilung (IIγ); das Beispiel derselben geht, wenn man die Zahlen **1**, **2**, **3**, **4** durch die Buchstaben $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{m}$ ersetzt, über in:

$$\alpha = \boldsymbol{i}.\, \boldsymbol{klm}.\ klm\ mlk.\ iml\ ikl\ ilk\ imk\ ikm\ ilm$$
$$= ik\ il\ im.\ ki\ li\ mi.\ lm\ km\ kl\ ml\ mk\ lk.$$

Jede der Collineationen von (IIγ) erhält man nun wie folgt:

Irgend eine Cf.-ebene, die wir $\boldsymbol{i}$ nennen, geht durch die Collineation in sich selbst über; die 3 Cf.-ebenen, welche mit $\boldsymbol{i}$ zusammen ein Δ bilden, gehen ternär cyklisch in einander über; diese Ebenen sollen mit $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{l}, \boldsymbol{m}$ bezeichnet werden, und der betr. Cykel sei $(\boldsymbol{klm})$. Schliesslich führt die Collineation noch 2 Cf.-ebenen, klm und mlk, welche sich mit $\boldsymbol{i}$ in einer Cf.-geraden schneiden, in einander über. Durch die vorstehende Beschreibung ist eine Collineation festgelegt und durch Abzählung ergiebt sich, dass wir durch verschiedene Annahme der in der Beschreibung vorkommenden Ebenen im ganzen

$$12 \cdot 2 \cdot 4 = 96$$

Collineationen erhalten, welche die Darstellung haben

$$\alpha = \boldsymbol{i}.\, \boldsymbol{k\,l\,m}.\ klm\ mlk.$$

Bezeichnen wir noch die Schnittpunkte der Ebene klm mit den Kanten $\overline{\boldsymbol{ik}}$, $\overline{\boldsymbol{il}}$, $\overline{\boldsymbol{im}}$, $\overline{\boldsymbol{mk}}$, $\overline{\boldsymbol{kl}}$, $\overline{\boldsymbol{lm}}$ jenes Tetraeders Δ bez. durch ik, il, im, mk, kl, lm und die zweiten auf diesen Kanten liegenden Cf.-punkte bez. durch ki, li, mi, km, lk, ml (vergleiche (5)), so gehen die 3 Ebenen $\boldsymbol{i}$, klm, mlk durch die Cf.-gerade $\overline{ik\ il\ im}$; die letztere Ebene geht

Eintheilung der 576 Collineationen, welche

Unter den 576 Collineationen giebt es:				darunter:	nämlich:	
I.			96 Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3 .$			
	α			$16\,\Delta_1^1 .\ \Delta_1^2 .\ \Delta_1^3 .$		
		1.			1.	die Identität
		2.			2.	9 hyperbolisch involutorische
		3.			3.	6 elliptisch involutorische
	β			$48\,\Delta_1^p .\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		
		1.			1.	12 centrisch involutorische
		2.			2.	36 windschief hyperbolisch quaternäre
	γ			$32\,\Delta_1^p\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		32 planar ternäre
II.			288 Collineationen $\Delta^p . \Delta^q\ \Delta^r .$			
	α			$48\,\Delta_1^1 .\ \Delta_1^2 .\ \Delta_1^3 .$		
		1.			1.	12 centrisch involutorische
		2.			2.	36 windschief hyperbolisch quaternäre
	β			$96\,\Delta_1^p .\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		
		1.			1.	36 hyperbolisch involutorische
		2.			2.	36 planar quaternäre
		3.			3.	72 windschief elliptisch quaternäre
	γ			$96\,\Delta_1^p\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		96 halbplanar senäre
III.			192 Collineationen $\Delta^p\ \Delta^q\ \Delta^r .$			
	α			$32\,\Delta_1^1 .\ \Delta_1^2 .\ \Delta_1^3 .$		32 planar ternäre
	β			$96\,\Delta_1^p .\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		96 halbplanar senäre
	γ			$64\,\Delta_1^p\ \Delta_1^q\ \Delta_1^r .$		
		1.			1.	16 geschaart ternäre
		2.			2.	48 halbgeschaart senäre

eine Cf. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen.

zum Beispiel	
1.2.3.4. 234. 143. 124. 132. 432. 134. 142. 123.	12. 21. 34. 43. 13. 31. 24. 42. 14. 41. 23. 32.
1 2.3 4. 234. 143. 124. 132. 432 123. 134 142.	12. 21. 34. 43. 13 42. 31 24. 14 23. 41 32.
1 2.3 4. 234 143. 124 132. 432 134. 142 123.	12 21. 34 43. 13 24. 31 42. 14 23. 41 32.
1.2.3 4. 234. 143 132. 124. 432. 134 142. 123.	12. 21. 34. 43. 13 14. 31 41. 24 32. 42 23.
1 2 3 4. 234. 143 124. 132. 432 123 134 142.	12 23 34 14. 21 32 43 41. 13 42. 31 24.
1.2 3 4. 234. 143 124 132. 432. 134 142 123.	12 13 14. 21 31 41. 34 42 23. 43 24 32.
1.2.3.4. 234 142. 143 432. 124 134. 132 123.	12 21. 34. 43. 13 31. 24. 42. 14. 41. 23 32.
1 2.3 4. 234 432 124 123. 143 142 132 134.	12. 21. 34 43. 13 24 31 42. 14 32 41 23.
1.2.3 4. 234 432. 143 134. 124 123. 132 142.	12. 21. 34 43. 13 14. 31 41. 24 23. 42 32.
1 2.3.4. 234 432 124 123. 143 134 132 142.	12. 21. 34 43. 13 32 31 23. 14 24 41 42.
1 2 3 4. 234 432 124 142. 143 123 132 134.	12 32 34 14. 21 23 43 41. 13 24 31 42.
1.2 3 4. 234 432. 143 123 132 142 124 134.	12 13 14. 21 31 41. 34 24 23 43 42 32.
1. 234 432. 2 124 123. 3 132 134. 4 143 142.	12. 21 34 43. 13. 31 42 24. 14. 41 23 32.
1 234 432. 2 143 123 4 124 142. 3 132 134.	12 14. 21 23 43 41 34 32. 13. 31 42 24.
1 234 432. 2 143 134. 3 124 142. 4 132 123.	12 14 13. 21 23 24. 34 32 31. 43 41 42.
1 143 123 2 124 134. 3 234 432 4 132 142.	12 24 41 21 31 23. 34 13 14 43 42 32.

ausserdem durch die Cf.-punkte ml, lk, km. Es ist offenbar möglich, die noch unbenannten Cf.-ebenen entsprechend der in (5) angenommenen Bezeichnungsweise zu bezeichnen. Dann haben die erwähnten 96 Collineationen die gemeinsame Bezeichnung:

$$\begin{aligned} a &= \boldsymbol{i.\,k\,l\,m.}\ klm\ mlk.\ iml\ ikl\ ilk\ imk\ ikm\ ilm. \\ &= ik\ il\ im.\ ki\ li\ mi.\ lm\ km\ kl\ ml\ mk\ lk. \end{aligned}$$

Allgemein ergiebt sich als erste Anmerkung zur Tabelle:

> „Die in irgend einer Abtheilung der Tabelle enthaltenen Collineationen lassen sich durch eine und dieselbe Bezeichnung darstellen, welche mit der Bezeichnungsweise in (5) übereinstimmt.“

Damit ist keineswegs gesagt, dass die Collineationen einer Abtheilung aus einer von ihnen durch blosse Permutation der Ziffern 1, 2, 3, 4 oder der Buchstaben i, k, l, m abgeleitet werden können; das würde auch, wie das Beispiel ($\mathrm{I}\alpha_2$) schon lehrt, nicht richtig sein. Wegen der in obiger Anmerkung angegebenen Eigenschaft sagen wir, die Collineationen einer jeden Abtheilung sind von demselben „Typus“ und unterscheiden demnach unter den 576 Collineationen sechzehn Typen.

> „Wird die Bezeichnung der Cf. (12_6, 16_3) unter Beachtung der in (5.) angegebenen Vorschrift geändert, so stellt die alte Bezeichnung irgend einer jener 576 Collineationen nach der Aenderung eine Collineation desselben Typus dar.“

Nämlich jede mit den Angaben von (5.) übereinstimmende Bezeichnung ist vollständig bestimmt, wenn wir die Ebenen eines Δ mit $\boldsymbol{i, k, l, m}$ und eine beliebige fünfte Cf.-ebene mit klm bezeichnen. In irgend einem Beispiele der Tabelle schreiben wir statt 1, 2, 3, 4 bez. i, k, l, m und weisen zur Herstellung einer Collineation den 5 Ebenen $\boldsymbol{i, k, l, m}, klm$ diejenigen Ebenen zu, welche in dem Beispiele auf sie folgen. Die erhaltene Collineation gehört sicher zu den 576 Collineationen; ergänzen wir ihre Bezeichnung, so stimmt diese genau mit der des Beispiels überein. Wollten wir das vollständig durchführen, so müssten wir uns genau derselben Arbeit noch einmal unterwerfen, die wir bei der Herstellung der Tabelle durchgeführt haben.

(9.) In der Tabelle haben wir die Darstellung der Collineationen nur in Ebenen der Δ und in Punkten der Δ_1, also in Elementen der Cf. (12_6, 16_3) gegeben. Bedenkt man aber, dass die Eckpunkte der Δ und die Ebenen der Δ_1 sich genau ebenso transformiren wie die ihnen gegenüberliegenden Elemente der Tetraeder und bezeichnet man ein- für allemal das Gegenelement einer Ebene oder eines Eckpunktes a eines der Tetraeder durch $\bar{a}$, so erhält man offenbar die Darstellung einer Collineation in Eckpunkten der Δ und in Ebenen der Δ_1, d. h.

in Elementen der associirten Cf. $(12_6, 16_3)$, indem man jedes Element der Darstellung der betr. Collineation in Ebenen der Δ und in Punkten der Δ_1 oben mit einem Querstriche versieht. Man erkennt hieraus leicht, dass zu jeder Anzahl von Collineationen, die für eine Cf. $(12_6, 16_3)$ von demselben Typus sind, eine gleiche Anzahl von Collineationen gehört, welche in den Elementen der associirten Cf. von demselben Typus sind.

Solche zusammengehörige Collineationen sind z. B. die 12 unter $(\mathrm{I}\beta_1)$ und die 12 unter $(\mathrm{II}\alpha_1)$ angegebenen Involutionen, ferner die 36 quaternären Collineationen von $(\mathrm{I}\beta_2)$ und die 36 von $(\mathrm{II}\alpha_2)$, die 32 ternären unter $(\mathrm{I}\gamma)$ und die 32 ternären unter $(\mathrm{III}\alpha)$, endlich die 96 senären Collineationen unter $(\mathrm{II}\gamma)$ und die 96 senären unter $(\mathrm{III}\beta)$. Die übrigen der 576 Collineationen sind in sich selbst reciprok, d. h. von demselben Typus in den Elementen der beiden Cff. Mit der Beschreibung der Collineationen irgend eines Typus sind auch die zugehörigen Collineationen hinreichend erklärt.

Die 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen unter $(\mathrm{I}\alpha_2)$ haben je zwei Gegenkanten der 3 Δ (und Δ_1) zu Involutionsaxen. In jeder der 6 elliptisch geschaarten Involutionen entsprechen 2 Gegenkanten jedes der 3 Δ sich selbst, die anderen Gegenkanten entsprechen einander. Die sich selbst entsprechenden Diagonalen der Cf. sind natürlich windschief und die auf jeder derselben liegenden Cf.-punkte sind einander zugewiesen. Von den 12 centrischen Involutionen unter $(\mathrm{I}\beta_1)$ hat jede einen Eckpunkt der 3 Δ_1 zum Involutionscentrum und die ihm gegenüberliegende Tetraederebene zur Involutionsebene. In den 36 quaternär cyklischen, windschief hyperbolischen Collineationen unter $(\mathrm{I}\beta_2)$ entsprechen je zwei durch eine Diagonale der Cf. gehende Cf.-ebenen sich selbst; die in jeder dieser beiden Ebenen ausserhalb der betr. Diagonale gelegenen 4 Cf.-punkte gehen quaternär cyklisch in einander über in der Weise, dass zugleich die beiden Δ_1, welche jene Diagonale nicht zur Kante haben, in einander übergeführt werden. Die Endpunkte jener Diagonale sowie die ihrer Gegendiagonale entsprechen einander involutorisch.

Die unter $(\mathrm{I}\gamma)$ gehörenden 32 ternären Collineationen sind planar; die Doppelebenen einer jeden von ihnen gehen durch eine Cf.-gerade, deren Punkte einander ternär cyklisch entsprechen. Je 3 Cf.-punkte und Cf.-geraden, welche mit dieser Cf.-geraden in einer Cf.-ebene liegen, gehen ternär cyklisch in einander über. Die Doppelpunkte einer Collineation dieser Art liegen auf einer Cf.-geraden der associirten Cf.

Die Axen einer der 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen $(\mathrm{II}\beta_1)$ erhält man, indem man die auf irgend einer Diagonale liegenden Cf.-punkte mit je einem der auf der Gegendiagonale gelegenen Cf.-punkte der associirten Cf. verbindet. Jede der 36 planar quaternären Collinea-

tionen ($\mathrm{II}\beta_2$) hat ihre Doppelpunkte auf einer Cf.-Diagonale, ihre Doppelebenen aber gehen durch deren Gegendiagonale.

In den 72 elliptisch quaternären Collineationen ($\mathrm{II}\beta_3$) entsprechen je ein Δ und ein Δ_1 sich selbst; ihre Quadrate sind identisch mit den 6 elliptisch geschaarten Involutionen. Die 96 senären Collineationen ($\mathrm{II}\gamma$) nennen wir halbplanar senär, weil ihre Quadrate planar ternär cyklisch sind. Bei jeder von ihnen entspricht eine Cf.-gerade sich selbst, und deren Punkte gehen ternär cyklisch in einander über. Die Ebenen dieser Cf.-geraden sind durch die betr. Collineation involutorisch gepaart; zu den Doppelebenen dieser Involution gehört eine Cf.-ebene, wärend die beiden anderen Cf.-ebenen der Geraden in einander übergehen. Die dritte Potenz einer solchen senären Collineation ist eine centrische Involution; irgend 6 Punkte, welche in einer dieser Collineationen einen Cykel bilden, liegen demnach zu je vieren in 3 Ebenen. In den 16 geschaart ternären Collineationen ($\mathrm{III}\gamma_1$) entsprechen 4 windschiefe Cf.-gerade sich selbst, und die auf diesen liegenden Cf.-punkte gehen, wie auch ihre übrigen Punkte, ternär cyklisch in einander über. Die Quadrate der 48 halbgeschaart senären Collineationen ($\mathrm{III}\gamma_2$) endlich sind geschaart ternär; ihre Cuben aber sind identisch mit den 6 elliptisch geschaarten Involutionen ($\mathrm{I}\alpha_3$).

(10.) Aus der Tabelle entnehmen wir eine Eintheilung der 576 Collineationen nach ihrer Art; wir definiren zunächst:

Eine beliebige der 576 Collineationen heisst gerade oder ungerade bez. der Cf.-punkte (Ebenen), je nachdem durch sie eine gerade oder ungerade Permutation dieser Punkte (Ebenen) bewirkt wird. Die 576 Collineationen umfassen dann:

1. die Identität.
2. 75 involutorische Collineationen, darunter
   a) 24 centrisch involutorische, von denen die eine Hälfte gerade in der Darstellung in Cf.-punkten, ungerade für Cf.-ebenen ist, während es sich mit der anderen Hälfte umgekehrt verhält.
   b) 36 hyperbolisch geschaarte, die in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen ungerade sind.
   c) 9 hyperbolisch geschaarte, die gerade in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen sind.
   d) 6 elliptisch geschaarte, welche gerade für die Cf.-punkte und die Cf.-ebenen sind.
3. 80 ternäre Collineationen, worunter
   a) 64 planare.
   b) 16 geschaarte.

Alle 80 sind gerade in der Darstellung in den Cf.-punkten und den Cf.-ebenen.

4. 180 quaternäre Collineationen, darunter
   a) 72 windschief hyperbolische, die zur Hälfte gerade für die Cf.-punkte, ungerade für die Cf.-ebenen sind; die andere Hälfte verhält sich umgekehrt.
   b) 36 planare, die in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen ungerade sind.
   c) 72 windschief elliptische, für deren Darstellung dasselbe gilt wie für die planar quaternären.
5. 240 senäre Collineationen.
   a) 192 halbplanare, die zur einen Hälfte in Cf.-punkten ungerade, in Cf.-ebenen gerade, zur anderen ungerade in Cf.-ebenen und gerade in Cf.-punkten sind.
   b) 48 halbgeschaarte, welche gerade in Cf.-punkten und in Cf.-ebenen sind.

Man sieht, dass es unter den 576 Collineationen solche giebt, welche in Bezug auf die Cf.-punkte gerade — unter diesen wieder kommen gerade und ungerade Collineationen hinsichtlich der Darstellung in Cf.-ebenen vor — und solche, die in den Cf.-punkten ungerade sind; auch diese enthalten hinsichtlich der Darstellung in Cf.-ebenen gerade und ungerade Collineationen. Betreffend den geraden oder ungeraden Charakter zerfallen also die 576 Collineationen in 4 Unterabtheilungen, und einfache substitutionentheoretische Betrachtungen ergeben, dass jede dieser Unterabtheilungen gleich viele, d. h. $\frac{576}{4} = 144$ Collineationen umfasst. Von den 576 Collineationen sind also:

I. 144 doppelt gerade, d. h. gerade in Cf.-punkten und Cf.-ebenen.
II. 144 gerade in Cf.-punkten, ungerade in Cf.-ebenen.
III. 144 ungerade in Cf.-punkten, gerade in Cf.-ebenen.
IV. 144 doppeltungerade.

Die erste Unterabtheilung bildet für sich allein, und mit jeder der folgenden Unterabtheilungen eine ausgezeichnete Untergruppe der Gruppe G_{576} der 576 Collineationen.

Wir können die 576 Collineationen auch nach ihrem geraden oder ungeraden Charakter hinsichtlich der Transformation der Δ und Δ_1 eintheilen. Nun ist eine ternäre Collineation gerade in jeder Darstellung, also in den Cf.-punkten, Cf.-ebenen, den Δ und Δ_1. Die 80 ternären Collineationen gehören daher zur Abtheilung I der doppeltgeraden Collineationen. Die kleinste Untergruppe von G_{576}, welche die 80 ternären Collineationen enthält, ist die Gruppe der 144 doppeltgeraden Collineationen. Daraus folgt sofort, dass die doppeltgeraden Collineationen auch doppeltgerade für die Δ und Δ_1 sind. Eine centrische Involution des Typus $(1\beta_1)$ ist gerade in Cf.-punkten, ungerade in Cf.-ebenen, gerade für die Δ und ungerade für die Δ_1. Multipliciren

wir also die 144 doppeltgeraden Collineationen mit einer centrischen Involution des Typus $(I\beta_1)$, so erhalten wir die 144 Collineationen, welche gerade in Cf.-punkten und ungerade in Cf.-ebenen sind, und wir finden, dass dieselben gerade in den Δ, ungerade in den Δ_1 sind u. s. w. Also:

> „Die Collineationen der Gruppe G_{576}, welche gerade resp. ungerade in Cf.-punkten sind, sind auch gerade resp. ungerade in den Δ, und die Collineationen, welche gerade resp. ungerade in Cf.-ebenen sind, sind auch gerade resp. ungerade in den Δ_1."

C. Die Gruppe G_{576} der 576 Collineationen; ihre Zerlegung und Zusammensetzung.

(11.) Die Gruppe G_{576} der 576 Collineationen ist einfach transitiv, weil es in ihr Collineationen giebt, die eine beliebige Cf.-ebene resp. einen beliebigen Cf.-punkt in eine beliebig angenommene Cf.-ebene resp. einen beliebigen Cf.-punkt überführen; die Gruppe ist imprimitiv *), da sich die Cf.-ebenen und die Cf.-punkte in je 3 Quadrupel theilen lassen, welche bei den 576 Collineationen theils ihre 4 Elemente unter sich permutiren, theils in einander übergehen. Wir wollen nun die Gruppe G_{576} als Erzeugniss möglichst weniger ihrer Individuen darstellen; zu dem Ende suchen wir zunächst Untergruppen von G_{576} auf, und zwar ist es am zweckmässigsten, Reihen der Zusammensetzung**) von G_{576} zu bilden, da man dann aus jeder zu irgend einer Reihe gehörenden Gruppe durch Hinzufügung einer oder einiger Collineationen die vorhergehende, umfassendere Gruppe erzeugen kann.

Eine Reihe der Zusammensetzung von G_{576} ist z. B. die folgende:

1) G_{576}, die Gruppe aller 576 Collineationen.
2) G_{288}, die Gruppe der in den Cf.-punkten geraden Collineationen.
3) G_{144}, die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen.
4) G_{48}, die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen $\Delta^1.\Delta^2.\Delta^3$.
5) G_{16}, die Gruppe $(I\alpha)$ der Collineationen $\Delta^1.\Delta^2.\Delta^3.\Delta_1^2.\Delta_1^2.\Delta_1^3$.
6) G_8 enthält die Involutionen von G_{16}, welche zwei Gegenkanten eines Δ in sich transformiren und ausserdem die Identität.
7) G_4 resultirt aus zwei beliebigen Involutionen von G_8.
8) G_2 enthält eine Involution von G_4 und die Identität.
9) G_1 ist die Identität.

Die Factoren der Zusammensetzung haben also die Reihenfolge:

$$2, 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2;$$

andere zu G_{576} gehörige Reihen, welche dieselbe Folge der Factoren

---

*) Vgl. Netto, Substitutionentheorie p. 77.

**) Ebenda p. 87.

haben, erhält man leicht. So kann man z. B. statt der obigen Gruppe G_{288} die Gruppe der in den Cf.-ebenen geraden Collineationen nehmen; G_{48} kann ersetzt werden durch die Gruppe der doppeltgeraden Collineationen, welche jedes Δ_1 in sich selbst transformiren.

Eine andere Folge der Factoren hat nachstehende Reihe:

1) G_{576}.

2) G_{288} ist dieselbe Gruppe wie oben.

3) G_{96}, die Gruppe der 96 Collineationen $\Delta^1 . \Delta^2 . \Delta^3$.

4) G_{48} wie oben u. s. w.

Die Factoren haben diesmal die Reihenfolge,

$$2, 3, 2, 3, 2, 2, 2, 2.$$

Dass die Factoren aller Reihen bis auf die Aufeinanderfolge übereinstimmen, ist aus der Substitutionentheorie bekannt*). Wir behaupten nun:

> „Reihen der Zusammensetzung von G_{576}, welche andere Folgen der Factoren haben als die beiden angeführten, giebt es nicht."

Beim Beweise werden wir den Begriff der „Hauptreihe" einer Gruppe**) benutzen, welche man aus einer Reihe ableitet, indem man von dieser nur diejenigen Gruppen zurückbehält, welche ausgezeichnete Untergruppen jener Gruppe sind; so leitet man aus der ersten der oben angegebenen Reihe die Hauptreihe ab:

$$G_{576},\ G_{288},\ G_{144},\ G_{48},\ G_{16},\ G_1 .$$

Ferner bemerken wir noch, dass eine zu einer beliebigen Hauptreihe gehörende Gruppe, welche eine Collineation irgend eines Typus enthält, alle Collineationen desselben Typus enthält, ein Resultat, das aus dem an späterer Stelle bewiesenen Satze folgt:

> „Zu jeder Collineation der Gruppe G_{576} giebt es eine Reihe von Collineationen σ der Gruppe, welche α in eine beliebige andere Collineation α' desselben Typus (durch den Process $\sigma^{-1}\alpha\sigma = \alpha'$) überführen."

In allen Reihen der Zusammensetzung von G_{576} sind die zu den letzten 4 Gruppen gehörigen Factoren sämmtlich gleich 2. Denn wäre das in einer Reihe nicht der Fall, so würde das Product der 4 letzten Factoren entweder $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ oder $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ sein; in der Reihe ginge also den 4 letzten Gruppen eine Gruppe G_{24} von 24 Collineationen oder eine Gruppe G_{36} von 36 Collineationen voran. Aus der eben gemachten Bemerkung ergiebt sich bei einiger Ueberlegung, dass ausser G_1 keine ausgezeichnete Untergruppe von G_{576}

*) Netto, a. a. O. p. 90.

**) Ebenda, p. 92.

existirt, deren Grad ein Theiler von 24 oder 36 wäre; in der der betr. Reihe entsprechenden Hauptreihe würde demnach der Gruppe G_1 eine Gruppe H vorangehen, deren Grad grösser als 24 resp. als 36 wäre, und zwischen dieser Gruppe H und G_1 würden in der Reihe Gruppen stehen — zu welchen G_1 mitzuzählen ist —, welche theils die Factoren 2, theils die Factoren 3 besitzen, während diese Factoren nach der allgemeinen Theorie einander gleich sein müssten*). Somit sind in jeder Reihe die fünf letzten Gruppen hinsichtlich ihrer Grade so zu bezeichnen:

$$G_1, G_2, G_4, G_8, G_{16}.$$

G_{16} stellt in allen Reihen dieselbe Gruppe dar, sie umfasst die Identität, die 6 elliptisch geschaarten Involutionen $(\mathrm{I}\alpha_3)$ und die 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen $(\mathrm{I}\alpha_2)$; wir werden noch auf sie zurückkommen. Wir beweisen nunmehr, dass es keine Reihe von G_{576} giebt, in welcher der erste Factor der Zusammensetzung den Werth 3 hat. Wir nehmen die Möglichkeit einer solchen Reihe an; sie sei:

$$G_{576}, G_{192}, H, J, \ldots.$$

Oben hatten wir eine Reihe

$$G_{576}, G_{288}, G_{96}, \ldots.$$

Es gilt nun der Satz:**)

„Folgt in einer zur Gruppe G_{576} gehörenden Reihe eine Gruppe G_{288} auf G_{576}, in einer zweiten Reihe eine Gruppe G_{192} auf G_{576}, so giebt es auch Reihen:

$$G_{576}, G_{288}, H_{96}, \ldots,$$
$$G_{576}, G_{192}, H_{96}, \ldots,$$

in welchen auf G_{288} resp. G_{192} dieselbe Maximaluntergruppe H_{96} folgt, welche in Bezug auf G_{192} resp. G_{288} denselben Factor besitzt, wie G_{288} resp. G_{192} hinsichtlich G_{576}, und daher 96 Collineationen enthält.“

Die Gruppe H_{96} besteht aus allen G_{288} und G_{192} gemeinsamen Collineationen; da sie sowohl mit G_{192} als auch mit G_{288} vertauschbar ist, so ist sie mit der ganzen Gruppe G_{576} vertauschbar, und enthält daher alle Collineationen, von deren Typus sie eine enthält. Sie ist Untergruppe von G_{288}; die mit G_{288} bezeichnete Gruppe der in Cf.-punkten geraden Collineationen umfasst:

Die Identität, 9 hyperbolisch und 6 elliptisch geschaarte, 12 centrische Involutionen, 36 hyperbolisch quaternäre, 64 planar und

---

*) Netto, a. a. O. p. 94.

**) Ebenda, p. 89.

16 geschaart ternäre, 48 halbgeschaart und 96 halbplanar senäre Collineationen. Hiervon kommen die 96 halbplanar senären nicht in Betracht, da sie allein keine Gruppe bilden. Besässe nun H_{96} gerade und ungerade Collineationen in Cf.-ebenen, so enthielte diese Gruppe von jeder Art gleich viele, also 48. Die 48 halbgeschaart senären Collineationen gehören nicht zu dieser Gruppe, da sie mit der Identität zusammen schon 49 doppeltgerade Collineationen darstellen. Ebensowenig können unter den doppeltgeraden Collineationen von H_{96} die 16 geschaart ternären Collineationen enthalten sein; denn um diese 16 Collineationen und die Identität zu 48 Collineationen zu ergänzen, bedürfte man ihrer noch 31; diese Zahl 31 aber lässt sich nicht aus den Anzahlen der übrigen in Betracht kommenden Collineationen

$$9,\ 6,\ 32,\ 32$$

durch Summirung erzeugen. Wohl aber bilden die Identität, die 9 hyperbolisch und 6 elliptisch geschaarten, die 12 centrischen Involutionen und die 36 hyperbolisch quaternären Collineationen der obigen Gruppe G_{288} mit denjenigen 32 planar ternären Collineationen, welche die 3Δ in sich selbst überführen, eine ausgezeichnete Untergruppe H_{96} von G_{576}. Die Collineationen dieser Gruppe führen die 3Δ in sich selbst über. Wir finden:

„Es giebt zwei und nur zwei ausgezeichnete Untergruppen H_{96} von G_{576}, welchen doppeltgerade und einfach gerade Collineationen angehören."

Die eine umfasst alle Collineationen, die die 3Δ in sich selbst überführen, die Collineationen der anderen transformiren die Δ_1 in sich selbst. Eine Gruppe H_{96}, welche nur doppeltgerade Collineationen enthält, giebt es überhaupt nicht, da ihr Grad 96 nicht ein Theiler des Grades 144 aller doppeltgeraden Collineationen ist. (Nebenbei sei bemerkt, dass es auch keine ausgezeichnete Untergruppe L_{96} giebt, welche 48 doppeltgerade und 48 doppeltungerade Collineationen enthält). In der Reihe

$$G_{576},\ G_{192},\ H_{96},\ \ldots,$$

in welcher also H_{96} nur die Gruppe der 96 Collineationen sein kann, welche die 3Δ in sich selbst überführen, soll der Voraussetzung nach G_{192} mit G_{576} permutabel sein. Eine Gruppe G_{192}, welche H_{96} als Untergruppe enthält, können wir aber nur erzeugen durch H_{96} und eine Collineation, welche 2Δ in einander transformirt. Durch Transformation einer so erzeugten Gruppe G_{192} durch die Collineationen von G_{576} würde man jedoch auch Collineationen erhalten, welche zwei andere Δ in einander überführen; daher kann G_{192} unmöglich ausgezeichnete Untergruppe von G_{576} sein.

Wir haben bewiesen:

„Es giebt keine Reihe der Zusammensetzung von G_{576}, deren erster Factor 3 ist."

Den Beweis, dass es keine Reihen von G_{576} giebt, deren Factoren die Folge 2, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2 haben, unterdrücken wir der Kürze halber.

(12.) Wir steigen nun in einer Reihe der Zusammensetzung von G_{576} aufwärts, und werden so dazu gelangen, die Gruppe G_{576} aus wenigen Collineationen zu erzeugen. Wir wählen die an erster Stelle gegebene Reihe (10):

$$G_1,\ (G_2,\ G_4,\ G_8),\ G_{16},\ G_{48},\ G_{144},\ G_{288},\ G_{576}.$$

Die Gruppe G_{16} besteht aus der Identität, 6 elliptisch und 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen, enthält also nur involutorische Collineationen; da aber zwei Involutionen, deren Product wieder eine Involution ist, mit einander vertauschbar sind, so sind alle Collineationen von G_{16} mit einander vertauschbar, und diese Gruppe lässt sich aus 4 ihrer Involutionen, von welchen keine aus den anderen resultirt, erzeugen.

G_{48} ist das Erzeugniss von G_{16} mit irgend einer planar ternären Collineation, welche die 3Δ in sich selbst überführt. Eine geschaart ternäre Collineation erzeugt mit G_{48} die Gruppe G_{144} der doppelt-geraden Collineationen von G_{576}. Ferner resultirt G_{288} aus der Verbindung von G_{144} mit einer in Cf.-punkten geraden, in Cf.-ebenen ungeraden Collineation, etwa einer centrischen Involution des Typus $(\mathrm{I}\beta_1)$. G_{576} endlich wird durch G_{288} und eine beliebige in Cf.-punkten ungerade Collineation, z. B. eine centrische Involution des Typus $(\mathrm{II}\alpha_1)$ erzeugt. Wir haben damit die ganze Gruppe G_{576} aus acht ihrer Collineationen erzeugt.

Wir beschränken uns nun darauf, die Gruppe G_{576} aus möglichst wenigen centrischen Involutionen zusammenzusetzen, und können nach dem vorhergehenden diese Aufgabe auch so formuliren:

„Wir suchen eine möglichst geringe Anzahl von centrischen Involutionen, aus denen sich die Gruppe G_{16} und noch je eine planar- und eine geschaart-ternäre Collineation zusammensetzen lassen."

Solche centrische Involutionen erzeugen die Gruppe G_{576}. Wir werden finden, dass die Gruppe aus 4 centrischen Involutionen, von denen zwei gerade in Cf.-punkten, die beiden anderen gerade in Cf.-ebenen sind, erzeugt werden kann. Dass hierzu weniger als 4 centrische Involutionen nicht ausreichen, dass ferner von 4 die Gruppe G_{576} zusammensetzenden centrischen Involutionen zwei gerade in Cf.-punkten und zwei gerade in Cf.-ebenen sein müssen, und dass die beiden ersteren nicht dieselben zwei Δ_1 vertauschen dürfen, ebensowenig wie die beiden

letzteren dieselben zwei Δ, leuchtet bei einiger Ueberlegung ein. Seien nun i_1, i_2 zwei centrische Involutionen des einen Typus, während k_1, k_2 zwei des anderen Typus bezeichnen sollen. In Bezug auf die Transformation der Δ und Δ_1 mögen diese 4 Involutionen die folgenden Formen haben, in welchen p, q, r irgend eine Permutation von 1, 2, 3 bedeutet:

$$i_1 = \Delta^1.\Delta^2.\Delta^3.\Delta_1^p.\Delta_1^q\,\Delta_1^r, \qquad i_2 = \Delta^1.\Delta^2.\Delta^3.\Delta_1^q.\Delta_1^p\,\Delta_1^r,$$
$$k_1 = \Delta^p.\Delta^q\,\Delta^r.\Delta_1^1.\Delta_1^2.\Delta_1^3, \qquad k_2 = \Delta^q.\Delta^p\,\Delta^r.\Delta_1^1.\Delta_1^2.\Delta_1^3.$$

Dann ist

$$i_1.i_2 = \Delta^1.\Delta^2.\Delta^3.\Delta_1^p\,\Delta_1^r\,\Delta_1^q$$

eine planar ternäre Collineation, und

$$i_1 i_2.k_1 k_2 = \Delta^p\,\Delta^r\,\Delta^q.\Delta_1^p\,\Delta_1^r\,\Delta_1^q$$

entweder geschaart ternär oder halbgeschaart senär; im letzteren Falle aber ist das Quadrat geschaart ternär. Wählen wir also noch die Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 der Art, dass sie die Gruppe G_{16} erzeugen, so resultirt aus ihnen nach den obigen Ausführungen die ganze Gruppe G_{576}.

Beispiel I.

i_1 = 12*. 21. 34. 43. 13 14. 31 41. 24 32. 42 23.

i_2 = 41*. 14. 23. 32. 12 31. 21 13. 34 24. 43 42.

k_1 = 12 21. 13 31. 23 32. 34. 43. 24. 42. 14. 41. (4 ist Involutionsebene),

k_2 = 21 34. 31 42. 41 23. 12. 43. 13. 24. 14. 32. (432 ist Involutionsebene).

Die Gruppe G_{16} wird erzeugt z. B. durch die Collineationen

$$s_1 = (i_1 k_1)^2, \quad s_2 = (i_2 k_2)^2, \quad s_3 = i_2 (i_1 k_1)^2 i_2, \quad s_4 = i_1 (i_2 k_2)^2 i_1.$$

Die Involutionsebenen 4 und 432 von k_1 und k_2 gehen bez. durch die Centra 41 und 12 von i_2 und i_1, nicht aber durch deren Verbindungsgerade. Suchen wir nun alle möglichen Quadrupel i_1, i_2, k_1, k_2 von centrischen Involutionen der Gruppe G_{576} auf, von welchen die beiden ersteren zwei Eckpunkte verschiedener Δ_1, die beiden letzteren zwei Eckpunkte verschiedener Δ zu Involutionscentren besitzen, und welche ausserdem der Bedingung genügen, dass die Involutionsebenen der beiden letzteren bez. durch die Centra der beiden ersteren, nicht aber durch beide zugleich gehen, so finden wir für die Anzahl der verschiedenen Quadrupel 288. Andrerseits werden wir sofort beweisen, dass es in G_{576} ausser der Identität keine Collineation giebt, welche die Involutionen irgend eines Quadrupels in sich selbst überführt, und gelangen so zu dem Satze:

> Jedes der 288 Quadrupel i_1, i_2, k_1, k_2 wird durch 2 Collineationen von G_{576} in ein beliebiges andres Quadrupel übergeführt; insbesondere existirt in G_{576} eine von der

Identität verschiedene Collineation, welche die Involutionen eines Quadrupels zwar nicht in sich selbst, aber paarweise in einander transformirt."

„Die Involutionen jedes der 288 Quadrupel erzeugen die Gruppe G_{576}."

Irgend eine Collineation σ, welche die Involutionen des oben angegebenen Quadrupels in sich selbst überführt, muss deren Centren $12, 41, \bar{4}, \overline{432}$ ebenfalls in sich selbst transformiren. Soll die Collineation σ ausserdem der Gruppe G_{576} angehören, so muss sie auch den dritten Cf.-punkt 31 der Geraden $\overline{41\ 12}$ in sich überführen. Da ferner die Diagonale $\overline{31\ 13}$ als Verbindungsgerade der Punkte 31 und $\bar{4}$ in sich selbst übergeht, so transformirt σ auch 13, ebenso aber 21, 42 u. s. w. in sich selbst; überhaupt gehen durch σ alle Cf.-punkte in sich selbst über, so dass σ nur die Identität sein kann. Die eben bewiesenen Sätze benutzen wir zur Herleitung eines schon erwähnten interessanten Theorems:

„Jede Collineation der Gruppe G_{576} kann durch Collineationen der Gruppe in eine beliebige andere Collineation desselben Typus transformirt werden."

Irgend eine Collineation ν der Gruppe resultirt aus den Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 eines der 288 Quadrupel; sie lässt sich als Product dieser Involutionen darstellen, also

$$\nu = \Pi(i_1, i_2, k_1, k_2).$$

Ist ν' eine Collineation desselben Typus, so können wir (nach 8) durch Abänderung der Cf.-bezeichnung bewirken, dass ν' durch dieselbe projective Beziehung dargestellt wird, wie vordem ν. Die früheren Darstellungen von i_1, i_2, k_1, k_2 repräsentiren dann vier Involutionen i_1', i_2', k_1', k_2', welche eines der obigen 288 Quadrupel bilden, und zugleich wird

$$\nu' = \Pi(i_1', i_2', k_1', k_2'),$$

worin Π dasselbe Product in den i_1', i_2', k_1', k_2' bedeutet, wie vorhin in den i_1, i_2, k_1, k_2. Ist nun ϱ diejenige Collineation von G_{576}, welche die Involutionen i_1, i_2, k_1, k_2 bez. in i_1', i_2', k_1', k_2' transformirt, so haben wir

$$\varrho^{-1}\nu\varrho = \varrho^{-1}\Pi(i_1, i_2, k_1, k_2)\varrho = \Pi(\varrho^{-1}i_1\varrho,\ \varrho^{-1}i_2\varrho,\ \varrho^{-1}k_1\varrho,\ \varrho^{-1}k_2\varrho),$$

d. h.

$$\varrho^{-1}\nu\varrho = \Pi(i_1', i_2', k_1', k_2') = \nu',$$ w. z. b. w.

Beispiel II. i_1 und i_2 seien dieselben Involutionen wie im Beispiel I; als Involutionsebenen der k wähle man zwei der drei nicht durch die Centra von i_1 und i_2 gehenden Cf-ebenen; z. B. sei

$$k_1 = 12\,21.\ 24\,42.\ 14\,41.\ 34.\ 43.\ 13.\ 31.\ 23.\ 32;$$
$$k_2 = 12\,34.\ 13\,42.\ 41\,32.\ 21.\ 43.\ 31.\ 24.\ 14.\ 23.$$

G_{16} wird erzeugt durch die Collineationen:

$$s_1 = (i_1 k_1)^2, \quad s_2 = (i_1 k_2)^2, \quad s_3 = (i_2 k_1)^2, \quad s_4 = (i_2 k_2)^2.$$

Wir brechen diese Untersuchung hier ab und bemerken nur noch, dass sich die Gruppe G_{576} u. A. aus zwei centrischen Involutionen verschiedenen Typus und einer doppeltungeraden hyperbolisch geschaarten Involution, ferner aus zwei halbplanar senären Collineationen von verschiedenem Typus zusammensetzen lässt, z. B. aus

$$\alpha = \mathbf{1}.\ \mathbf{2}\ \mathbf{3}\ \mathbf{4}.\ 234\ 432.\ 143\ 123\ 132\ 142\ 124\ 134.$$

und

$$\beta = \mathbf{1}\ 123\ 132\ \mathbf{3}\ 142\ 234.\ \mathbf{2}\ 134\ 143.\ \mathbf{4}\ 243\ 124.$$

(13.) Wie wir soeben dargethan haben, giebt es in der Gruppe G_{576} Collineationen, welche irgend eine Collineation der Gruppe in eine beliebige desselben Typus überführen. Sind nun φ und φ' zwei Collineationen von einerlei Typus, und möge ψ eine Verwandtschaft der Gruppe sein, welche φ in φ' transformirt, während $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die mit φ vertauschbaren Collineationen der Gruppe bedeuten sollen, so haben die Gleichungen statt:

$$\alpha_i^{-1} \varphi \alpha_i = \varphi \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \ldots n;$$

daher ist

$$(\alpha_i \psi)^{-1} \varphi (\alpha_i \psi) = \psi^{-1} \alpha_i^{-1} \varphi \alpha_i \psi = \psi^{-1} \varphi \psi = \varphi'.$$

Da die $\alpha_i (i = 1, 2, 3, \ldots n)$ von einander verschieden sind, so sind auch die $\alpha_i \psi$ verschiedene Collineationen, und wir finden, dass φ in φ' durch mindestens n Collineationen von G_{576} übergeht. Führt andrerseits eine von ψ verschiedene Verwandtschaft χ von G_{576} die Collineation φ in φ' über, so dass

$$\chi^{-1} \varphi \chi = \varphi'$$

ist, so ergiebt sich

$$(\chi \psi^{-1})^{-1} \varphi (\chi \psi^{-1}) = \psi \chi^{-1} \varphi \chi \psi^{-1} = \psi \varphi' \psi^{-1} = \varphi.$$

Existiren demnach n Collineationen, welche φ in φ' überführen, so transformiren auch n Collineationen φ in sich selbst. Es folgt:

Die Gruppe G_{576} enthält stets eine Anzahl von Collineationen, welche irgend eine Collineation der Gruppe in sich selbst überführen, und eine gleiche Anzahl von Collineationen von G_{576} transformiren die betr. Collineation in irgend eine andere desselben Typus. Man erhält jene Anzahl n, indem man die Gesammtzahl 576 der Collineationen durch die Anzahl aller Collineationen von dem betr. Typus dividirt. Mit einer centrischen Involution von G_{576} sind daher $n = \frac{576}{12} = 48$ Collineationen der Gruppe vertauschbar. Offenbar ist

eine centrische Involution der Gruppe mit allen Collineationen derselben vertauschbar, welche das Involutionscentrum und damit auch die Involutionsebene in sich selbst überführen. Es giebt aber 48 Collineationen in G_{576}, welche einen Cf.-punkt in sich selbst transformiren, und so folgt:

Die mit einer centrischen Involution i von G_{576} vertauschbaren Collineationen sind identisch mit den 48 Collineationen, welche das Involutionscentrum in sich überführen. Diese 48 Collineationen bilden eine Gruppe G_{48}. Dieselbe umfasst doppeltgerade und doppeltungerade, in Cf.-punkten gerade und in Cf.-ebenen ungerade, sowie in Cf.-ebenen gerade und in Cf.-punkten ungerade Collineationen, schliesst daher von jeder dieser 4 Arten 12 Collineationen in sich. Eine bemerkenswerthe Untergruppe G_8 von G_{48} enthält, wenn die Involution i vom Typus $(\mathrm{I}\beta_1)$ ist, ausser der Identität 3 hyperbolisch geschaarte Involutionen, deren Axen Gegenkanten des durch die Involution i in sich selbst übergehenden Tetraeders Δ_1 sind, sowie 4 centrische Involutionen, deren Involutionsebenen dasselbe Δ_1 bilden. Unter den Collineationen von G_{48} befinden sich ferner diejenigen 6 centrischen Involutionen des Typus $(\mathrm{II}\alpha_1)$, deren Involutionsebenen durch das Centrum von i gehen; diese 6 centrischen Involutionen erzeugen mit G_8 die Gruppe G_{48}.

D. Flächen II. Ordnung, welche durch die Collineationen gewisser Untergruppen von G_{576} in sich selbst übergeführt werden.

(14.) Im folgenden ziehen wir des öfteren die Würfelcf. zu Hilfe; der Mittelpunkt des Würfels, den wir zugleich zum Centrum der in (13.) erwähnten Involution i wählen, sei 41; es ist also:

$$i = 12\ 31.\ 21\ 13.\ 34\ 24.\ 43\ 42.\ 41.\ 14.\ 23.\ 32.$$

Die 6 centrischen Involutionen vom Typus $(\mathrm{II}\,\alpha_1)$ der Gruppe G_{48}, deren Involutionsebenen durch 41 gehen, stellen sich bei der vorausgesetzten Würfelcf. dar als Spiegelungen an den 6 Diagonalebenen des Würfels. Die 3 hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_8 sind Spiegelungen an den durch 41 gehenden Parallelen zu den Würfelkanten, und die 4 centrischen Involutionen von G_8 sind Spiegelungen am Punkte 41 und an den 3 Halbirungsebenen paralleler Würfelkanten.*) Die Gruppe G_{48} lässt sich also im Falle der oben angegebenen Würfelcf. aus Spiegelungen am Centrum des Würfels und an Geraden und Ebenen, die durch das Centrum gehen, zusammensetzen. Durch alle diese Spiegelungen aber gehen die Kugeln, welche den Würfelmittelpunkt zum Centrum besitzen, in sich selbst über. Die concentrischen Kugeln bilden ein Büschel von Flächen II. Ordnung,

*) Vgl. Klein, Icosaeder p. 17—23.

und da die Würfelconfiguration in jede Cf. $(12_6, 16_3)$ collinear transformirt werden kann, so folgt:

„Durch die 48 Collineationen von G_{576}, welche einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, gehen die Flächen eines Büschels von (nicht geradlinigen) Flächen II. O. in sich selbst über. Jeder beliebige Punkt irgend einer dieser Flächen wird durch die 48 Collineationen in Punkte derselben Fläche transformirt."

Aus der Würfelcf. leitet man folgende Eigenschaften der Flächen des Büschels leicht ab:

„Diese Flächen haben das Tetraeder Δ_1, welchem jener Cf.-punkt angehört, zum gemeinschaftlichen Poltetraeder und bestimmen in der dem Cf.-punkte gegenüberliegenden Tetraederfläche dasselbe polare Feld."

Für das folgende ist der Nachweis von Wichtigkeit, dass keine dieser Flächen durch mehr als 48 Collineationen von G_{576} in sich selbst transformirt wird. Wir bedienen uns wieder der Würfelcf. und sei 41 das Centrum des zugehörigen Würfels. Da jede Kugel mit dem Centrum 41 von den 3 Tetraedern Δ_1 nur das Tetraeder 41 14 23 32 als Poltetraeder besitzt, so führt jede Collineation von G_{576}, welche eine solche Kugel in sich selbst transformirt, das Tetraeder 41 14 23 32 (in ein Poltetraeder der Kugel, also) in sich selbst über. Von den 192 Collineationen der Gruppe, welche das Tetraeder in sich selbst übergehen lassen, transformiren aber nur jene 48 den Punkt 41 in sich selbst; die übrigen 144 transformiren den Punkt 41 in je einen der Punkte 14, 23, 32 und folglich die Kugel in Flächen II. O., welche je einen dieser 3 unendlich fernen Punkte einschliessen. Hieraus folgt:

„Diejenigen 48 Collineationen von G_{576}, welche irgend einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, transformiren einen beliebigen Punkt in 48 Punkte einer Fläche II. O.; auf dieser Fläche liegt im Allgemeinen kein neunundvierzigster von den 576 Punkten, in welche jener Punkt durch die Collineationen von G_{576} übergeführt wird."*)

Wir theilen nun die Collineationen der Gruppe G_{576} in 12 Unterabtheilungen ein: die erste derselben umfasst die 48 Collineationen, welche einen Cf.-punkt in sich selbst überführen, also eine Gruppe G_{48} bilden; die zweite Abtheilung erhält man, wenn man eine nicht zu G_{48} gehörige Collineation von G_{576} mit den Collineationen von G_{48} hinten multiplicirt. Die 48 so erzeugten Collineationen bilden übrigens keine Gruppe. Die dritte Abtheilung umfasst die 48 Collineationen,

*) Dass die 48 Punkte i. A. nicht auf einer biquadratischen Raumcurve, d. h. auf mehr als einer Fläche II. O. liegen, erkennt man leicht, wenn man den zu transformirenden Punkt auf einer Cf.-geraden der Würfelcf. annimmt.

welche aus der Multiplication einer nicht in den beiden ersten Unterabtheilungen enthaltenen Verwandtschaft mit den Collineationen von G_{48} resultiren u. s. f. Die 48 Collineationen jeder Abtheilung transformiren irgend einen Punkt in 48 Punkte einer Fläche II. O.; ist nämlich β diejenige Collineation, durch deren Multiplication mit den Verwandtschaften von G_{48} die Collineationen einer der zwölf Unterabtheilungen entstehen, und führt β irgend einen Punkt P in P_1 über, so sind die Punkte, in welche P durch die Verwandtschaften der betr. Unterabtheilung übergeht, identisch mit den 48 Punkten, in welche P_1 durch die Collineationen von G_{48} übergeht, und diese 48 Punkte liegen nach früherem auf einer Fläche II. O., F^2. Die zu den 12 Unterabtheilungen gehörenden F^2 sind Flächen eines Büschels, und zwar im Falle der Würfelcf. eines Kugelbüschels, wenn die Collineationen von G_{48} den Mittelpunkt des Würfels in sich transformiren. Da nun derjenige Cf.-punkt, welchen die Collineationen der Gruppe G_{48} sich selbst entsprechen lassen, ein beliebiger unter den 12 Cf.-punkten ist, so schliessen wir:

> „Die 576 Punkte, in welche ein beliebiger Punkt durch die Collineationen von G_{576} übergeführt wird, liegen zu je 48 auf 144 Flächen II. O., welche sich zu zwölfen auf 12 Flächenbüschel vertheilen. Zu jeder Fläche irgend eines der 12 Büschel lässt sich je eine der 11 anderen so bestimmen, dass die Gruppe dieser 12 Flächen durch die Collineationen von G_{576} in sich selbst übergeht."

Seien nämlich $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ Collineationen von G_{576}, welche den durch die Collineationen der obigen Gruppe G_{48} in sich selbst übergehenden Punkt 41 in je einen der übrigen 11 Cf.-punkte überführen. Wir theilen dann die 576 Collineationen in 12 Unterabtheilungen ein, welche man erhält, wenn man die Collineationen von G_{48} hinten bez. mit der Identität, $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ multiplicirt. Sei F^2 eine der 12 Flächen, die durch die Collineationen von G_{48} in sich übergehen, und möge F^2 durch $\beta_2, \beta_3, \ldots \beta_{12}$ bez. in $F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ übergehen; dann geht F^2 über in $F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ bez. durch alle Collineationen der zweiten, dritten, ... letzten Unterabtheilung. Ferner geht $F_2{}^2$ über in F^2 durch β_2^{-1}, also F_2^2 über in $F^2, F_2^2, F_3^2, \ldots F_{12}^2$ bez. durch alle Collineationen, die man erhält, wenn man $\beta_2{}^{-1}$ mit den Collineationen der ersten, zweiten, dritten, ... letzten Unterabtheilung hinten multiplicirt. Ueberhaupt werden durch die Collineationen von G_{576} die 12 Flächen $F^2, F_2{}^2, \ldots$ unter sich permutirt. Sind $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_{48}$ die Collineationen von G_{48}, so geht nach dem vorhergehenden $F_2{}^2$ in sich selbst über durch die Collineationen $\beta_1 = 1$, $\beta_2{}^{-1}\alpha_2\beta_2$, $\beta_2{}^{-1}\alpha_3\beta_2, \ldots \beta_2{}^{-1}\alpha_{48}\beta_2$. Die Fläche $F_2{}^2$ gehört demnach

zu demjenigen der obigen 12 Büschel, dessen Flächen durch die Gruppe $\beta_2^{-1} G_{48} \beta_2$ in sich selbst übergehen.

Die 16 Collineationen, welche zwei Eckpunkte eines Tetraeders Δ_1 in sich selbst transformiren, führen irgend einen Punkt in 16 Punkte zweier Flächen II. O., also in 16 Punkte einer biquadratischen Raumcurve über. Die 16 Punkte liegen zu achten auf zwei Kegelschnitten, in welche die Raumcurve zerfällt. Im Falle der Würfelcf. liegen sie, wenn 41 und 14 sich selbst entsprechen, auf zwei congruenten Kreisen, welche $\overline{14\ 41}$ zur gemeinsamen Axe haben.

Mit einer hyperbolisch geschaarten Involution vom Typus (Iα_2) ist eine Gruppe von 64 Collineationen der Gruppe G_{576} vertauschbar; diese 64 Collineationen führen nur eine Fläche II. O. in sich selbst über, nämlich die imaginäre Ordnungsfläche der in (2) erwähnten polaren Correlation σ. Eine halbplanar senäre Collineation vom Typus (IIγ) und (IIIβ) ist nur mit ihren 6 Potenzen vertauschbar.

E. Die desmische Fläche IV. Ordnung.*)

(15.) Wir wenden uns nun zu den interessantesten Untergruppen von G_{576}, den Gruppen nämlich, welche die 3Δ resp. die $3\Delta_1$ in sich selbst transformiren. Von diesen beiden Gruppen von je 96 Collineationen brauchen wir nur die eine zu besprechen und wir beschränken uns auf die erstere G_{96}. Die Ebenenquadrupel, welche je eines der 3Δ bilden, gehören einem Büschel von Flächen IV. Ordnung an, weil jedes von ihnen durch die 16 Cf.-geraden, den Schnitt der beiden anderen Quadrupel, geht (1.). Da nun von diesem Flächenbüschel 3 Flächen (nämlich die 3 Ebenenquadrupel der Δ) durch die Collineationen der Gruppe G_{96} in sich selbst übergehen, so erfreut jede Fläche des Büschels sich dieser Eigenschaft. Also:

> „Die 96 Collineationen, welche die 3Δ in sich selbst überführen, transformiren einen beliebigen Punkt in 96 Punkte einer Fläche IV. O., F^4; diese sog. desmische Fläche F^4 geht durch die 96 Collineationen in sich selbst über, sie enthält die 16 Cf.-geraden und hat demnach die 12 Cf.-punkte zu Doppelpunkten."

Die 576 Collineationen gruppiren die desmischen Flächen zu sechsen so, dass jede Gruppe von 6 derselben durch alle 576 Collineationen in sich selbst transformirt wird.

---

*) Vgl. Stahl, Crelle's Journal 101, p. 90. Humbert, Journal de Math. 4e série 7, p. 353. Study, Sphärische Trigonometrie. XX. Band d. Abh. d. math.-phys. Klasse der Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., Nr. 2, p. 210.

(16.) Jede biquadratische Raumcurve, welche zwei Tetraedern Δ_1 umschrieben ist, hat mit der desmischen Fläche F^4 acht Doppelpunkte gemein. Verbindet sie die 8 Doppelpunkte mit irgend einem anderen Punkte P von F^4, so liegt sie ganz auf der Fläche F^4. Daraus folgt sofort, dass eine Fläche II. O., welche zweien Δ_1 umschrieben ist, die F^4 in zwei biquadratischen Raumcurven durchschneidet. Umgekehrt können 2 auf F^4 gelegene biquadratische Raumcurven, welche denselben zwei Δ_1 umschrieben sind, durch eine Fläche II. O. verbunden werden. Also:

> „Die desmische Fläche IV. O. enthält 3 Schaaren biquadratischer Raumcurven, welche je zweien der Tetraeder Δ_1 umschrieben sind.“

Verbinden wir irgend zwei Raumcurven derselben Schaar mit den übrigen Raumcurven der Schaar durch zwei Büschel von Flächen II. O., so sind diese projectiv auf einander bezogen und erzeugen die Fläche F^4. Da jede Raumcurve der Schaar sich selbst conjugirt ist bez. der beiden F^2-Bündel, welchen die anderen beiden Schaaren angehören (6), so ist auch die Fläche F^4 sich selbst conjugirt zunächst bez. jener 2 Bündel, dann aber ebenso bez. des dritten. Sind nun P und P' zwei Punkte von F^4, welche bez. eines der 3 F^2-Bündel conjugirt sind, und sind k^4 und $k_1{}^4$ die beiden durch P resp. P' gehenden biquadratischen Raumcurven dieses Bündels, so sind P und P' auch conjugirt bez. aller durch k^4 oder $k_1{}^4$ gehenden Flächen des Bündels. Die Gerade $\overline{PP'}$ berührt daher die Flächen und folglich die beiden Raumcurven in P resp. P'. Da aber k^4 und $k_1{}^4$ auf der F^4 liegen, so folgt:

> „Die Tangenten der 3 auf F^4 gelegenen Schaaren biquadratischer Raumcurven sind Doppeltangenten der Fläche. Durch einen beliebigen Punkt P der Fläche gehen 3 der Raumcurven, und deren Tangenten in P berühren die Fläche F^4 in P und in den 3 Punkten, welche dem Punkt P hinsichtlich der 3 Flächenbündel conjugirt sind.“

Da die drei betr. Tangenten in der Ebene liegen, welche die desmische Fläche in P berührt, so ergiebt sich:

> „Die 3 Punkte, welche irgend einem Punkt hinsichtlich jener 3 Flächenbündel conjugirt sind, liegen mit ihm in einer Ebene.“*)

Weisen wir nun jedem Punkte des Raumes die auf diese Weise durch ihn bestimmte Ebene zu, so erhalten wir ein höheres Nullsystem, in

*) Die 3 Punkte liegen sogar auf einer Geraden; der Beweis ergiebt sich in Verbindung mit den obigen Ausführungen unmittelbar aus einem von Humbert a. a. O. p. 386 angeführten Satze.

welchem die desmische Fläche F^4 als sich selbst zugeordnet betrachtet werden kann. Jedem Punkte entspricht in dem Nullsysteme i. A. eine Ebene. Die Punkte, welche einer beliebigen Ebene zugeordnet sind, erhalten wir als die Schnittpunkte der Ebene mit zweien der Flächen III. O., welche der Ebene hinsichtlich der 3 Flächenbündel conjugirt sind, so dass in dem Nullsysteme einer Ebene 9 Punkte, die Basispunkte eines Büschels von Curven III. O., entsprechen. In diesen Punkten wird die Ebene von desmischen Flächen des in (15.) erwähnten Büschels berührt.

„Die 16 Geraden einer Cf. $(12_6, 16_3)$ bilden die Grundcurve eines Büschels von desmischen Flächen IV. O.; eine beliebige Ebene wird von 9 dieser Flächen berührt."

F. Ueber die 1152 Collineationen und 1152 Correlationen, welche eine harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ in sich selbst transformiren.

(17.) Die 576 Collineationen, welche zwei associirte Cff. $(12_6, 16_3)$ in sich selbst überführen, sind schon besprochen worden. (8.—10.). Bei den 576 Collineationen, welche zwei associirte Cff. $(12_6, 16_3)$ in einander transformiren, sind hinsichtlich der Ueberführung der Δ in die Δ_1 drei verschiedene Fälle möglich.

I. Es gehen je ein Δ und ein Δ_1 in einander über z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1)(\Delta^2 \Delta_1^2)(\Delta^3 \Delta_1^3).$$

II. Es können ein Δ und ein Δ_1 in einander übergehen, während die übrigen Δ und Δ_1 einen quaternären Cykel bilden, z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1)(\Delta^2 \Delta_1^2 \Delta^3 \Delta_1^3).$$

III. Die 3Δ und $3\Delta_1$ gehen senär cyklisch in einander über z. B.

$$(\Delta^1 \Delta_1^1 \Delta^2 \Delta_1^2 \Delta^3 \Delta_1^3).$$

Entsprechend diesen 3 möglichen Fällen theilen wir die 576 Collineationen in 8 verschiedene Typen ein, wie folgt:

I. 96 Collineationen vertauschen die 3Δ mit je einem Δ_1; darunter sind

1) 48 involutorische und zwar

(α) 12 elliptisch geschaarte z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{12}.\ \mathbf{2}\,\overline{21}.\ \mathbf{3}\,\overline{34}.\ 4\,\overline{43}.\ 234\,\overline{13}.\ 143\,\overline{24}.\ 124\,\overline{31}.\ 132\,\overline{42}.$$
$$432\,\overline{14}.\ 134\,\overline{23}.\ 142\,\overline{32}.\ 123\,\overline{41}.$$

(β) 36 hyperbolisch geschaarte z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}.\ \mathbf{2}\,\overline{12}.\ \mathbf{3}\,\overline{34}.\ \mathbf{4}\,\overline{43}.\ 234\,\overline{32}.\ 143\,\overline{41}.\ 124\,\overline{23}.\ 132\,\overline{14}.$$
$$432\,\overline{42}.\ 134\,\overline{31}.\ 142\,\overline{13}.\ 123\,\overline{24}.$$

2) 48 quaternäre, deren Quadrate die 6 elliptischen Involutionen von G_{576} sind.

(α) 36, in welchen die gemeinschaftlichen Gegenkanten eines der Paare sich vertauschender Δ und Δ_1 sich selbst entsprechen, die gemeinschaftlichen Gegenkanten von jedem der anderen zwei Paare Δ und Δ_1 in einander übergehen z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}\;\mathbf{2}\,\overline{34}.\;\mathbf{3}\,\overline{21}\;\mathbf{4}\,\overline{12}.\;234\,\overline{13}\;132\,\overline{42}.\;143\,\overline{24}\;124\,\overline{31}.$$
$$432\,\overline{32}\;142\,\overline{14}.\;134\,\overline{41}\;123\,\overline{23}.$$

(β) 12, in welchen die drei paar gemeinsamen Gegenkanten der sich paarweise entsprechenden Δ und Δ_1 in sich selbst übergehen z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{34}\;\mathbf{2}\,\overline{43}.\;\mathbf{3}\,\overline{12}\;\mathbf{4}\,\overline{21}.\;234\,\overline{24}\;132\,\overline{31}.\;143\,\overline{13}\;124\,\overline{42}.$$
$$432\,\overline{41}\;142\,\overline{23}.\;134\,\overline{32}\;123\,\overline{14}.$$

II. 288 Collineationen vertauschen ein Δ und ein Δ_1 mit einander, und lassen die übrigen Δ und Δ_1 quaternär cyklisch in einander übergehen.

1) 144 quaternäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}.\;\mathbf{2}\,\overline{12}.\;\mathbf{3}\,\overline{34}\;\mathbf{4}\,\overline{43}.\;234\,\overline{42}\;123\,\overline{23}.\;143\,\overline{13}\;142\,\overline{41}.\;124\,\overline{24}$$
$$432\,\overline{32}.\;132\,\overline{31}\;134\,\overline{14}.$$

Ihre Quadrate sind die 36 doppeltgeraden hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_{576}.

2) 144 octenäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}.\;\mathbf{2}\,\overline{34}.\;\mathbf{3}\,\overline{12}\;\mathbf{4}\,\overline{21}.\;234\,\overline{42}\;142\,\overline{32}\;124\,\overline{24}\;134\,\overline{23}.\;432\,\overline{41}$$
$$143\,\overline{13}\;123\,\overline{14}\;132\,\overline{31}.$$

Ihre Quadrate sind die 36 planar quaternären Collineationen von G_{576}.

III. 192 Collineationen führen die 3Δ und $3\Delta_1$ senär cyklisch in einander über.

1) 96 senäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{43}\;124\,\overline{13}\;123\,\overline{32}.\;\mathbf{2}\,\overline{21}\;143\,\overline{24}\;134\,\overline{23}.\;\mathbf{3}\,\overline{12}\;132\,\overline{31}\;432\,\overline{41}.$$
$$\mathbf{4}\,\overline{34}\;234\,\overline{42}\;142\,\overline{14}.$$

Ihre Quadrate sind die 16 geschaart ternären Collineationen von G_{576}.

2) 96 duodenäre z. B.

$$\mathbf{1}\,\overline{21}\;143\,\overline{24}\;432\,\overline{32}\;\mathbf{3}\,\overline{34}\;234\,\overline{42}\;123\,\overline{41}.\;\mathbf{2}\,\overline{43}\;124\,\overline{13}\;142\,\overline{23}$$
$$\mathbf{4}\,\overline{12}\;132\,\overline{31}\;134\,\overline{14}.$$

(18.) Die schon früher besprochene polare Correlation σ (2), welche die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 zu Poltetraedern besitzt, giebt uns die Mittel an die Hand, aus den Eintheilungen der 1152 Collineationen, welche eine harmonische Cf. in sich transformiren, eine Eintheilung der 1152 das gleiche leistenden Correlationen auf äusserst einfache Weise herzuleiten. Diese 1152 Correlationen bilden mit den 1152 Collineationen eine Gruppe G_{2304}. Alle Verwandtschaften dieser Gruppe führen die polare Correlation σ in sich selbst über, weil sie die Gruppe der 6 Poltetraeder Δ und Δ_1 von σ ungeändert lassen; σ theilt sonach mit der Identität die Eigenschaft, mit allen Verwandtschaften der Gruppe G_{2304} vertauschbar zu sein. Sind nun

$$\alpha \text{ und } \beta$$

zwei solche Verwandtschaften von G_{2304}, dass

$$\alpha = \beta\sigma = \sigma\beta$$

ist, so folgt

$$\beta = \alpha\sigma = \sigma\alpha,$$

ferner

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = \alpha^{-1}\alpha\sigma\alpha = \sigma\alpha = \beta.$$

Nennen wir daher zwei Verwandtschaften α und β von G_{2304}, welche durch die Gleichung verbunden sind:

$$\alpha = \beta\sigma = \sigma\beta \quad \text{oder} \quad \beta = \alpha.\sigma = \sigma.\alpha$$

für den Moment „zusammengehörig", so ergiebt sich:

1) „Zusammengehörige Verwandtschaften von G_{2304} sind vertauschbar."

2) „Sind α und β zusammengehörige Verwandtschaften, so enthält G_{2304} vom Typus der α und vom Typus der β gleich viele Verwandtschaften."

Ist nämlich ν irgend eine Verwandtschaft von G_{2304}, so ist:

$$\nu^{-1}\alpha\nu = \nu^{-1}\beta\sigma\nu = \nu^{-1}\beta\nu\sigma.$$

Ist nun $\nu^{-1}\alpha\nu$ von α verschieden, so ist auch $\nu^{-1}\beta\nu$ von β verschieden, und ist $\nu^{-1}\alpha\nu = \alpha$, so ist auch $\nu^{-1}\beta\nu = \beta$.

3) „Bilden die Collineationen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$, wo α_1 die Identität ist, eine Gruppe, und sind $\beta_1 = \sigma, \beta_2, \ldots \beta_r$ die zugehörigen Correlationen, so bilden auch

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r, \quad \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_r$$

eine Gruppe."

Denn aus

$$\beta_i = \alpha_i.\sigma, \quad \beta_l = \sigma.\alpha_l$$

folgt

$$\beta_i\beta_l = \alpha_i\sigma^2\alpha_l = \alpha_i.\alpha_l,$$

und $\beta_i\beta_l$ gehört demnach zur Gruppe der α.

Ferner ist

$$\beta_l . \alpha_i = \sigma \alpha_l . \alpha_i$$

und

$$\alpha_l . \beta_i = \alpha_l . \alpha_i . \sigma .$$

Ist also

$$\alpha_l . \alpha_i = \alpha_m ,$$

so finden wir

$$\beta_l . \alpha_i = \sigma . \alpha_m = \beta_m ,$$

$$\alpha_l . \beta_i = \alpha_m . \sigma = \beta_m ,$$

und die links stehenden Producte gehören zu den β.

4) „Aus σ und den involutorischen Collineationen der Gruppe G_{2304} resultiren lauter polare oder Nullcorrelationen."

Ist nämlich α eine involutorische Collineation von G_{2304}, so ist

$$(\sigma\alpha)^2 = \sigma\alpha\sigma\alpha = \sigma\alpha\alpha\sigma = \sigma^2 = 1 .$$

Aus der Gruppe G_{16}, welche ausser der Identität die 6 elliptisch und die 9 doppeltgeraden hyperbolisch geschaarten Involutionen von G_{576} enthält, und der Correlation σ resultirt nach den vorstehenden Sätzen 3, 4 eine Gruppe G_{32}, welche nur involutorische Verwandtschaften enthält, nämlich ausser den Collineationen von G_{16} sechs Null- und zehn polare Correlationen. (Klein's Gruppe.)

Für die Eintheilung der 1152 Correlationen von G_{2304} in Typen ist von Wichtigkeit der Satz 2.

(19.) Aus der polaren Correlation σ und den 12 elliptisch geschaarten Involutionen, die unter (I 1α) in (17.) angegeben sind, resultiren 12 Nullcorrelationen;*) diese führen die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in sich selbst über. Das gleiche bewirken die 36 polaren Correlationen, welche aus σ und den 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen (I 1β) in (17.) resultiren. Die Ordnungsflächen der 36 Polarsysteme sind alle reell und geradlinig und zwar gehen durch je 2 Gegenkanten der 3 Tetraeder Δ (oder Δ_1) vier von ihnen. Die polare Correlation σ selbst ist schon hinlänglich besprochen. Sie erzeugt mit den Collineationen von G_{576} 576 Correlationen, durch welche die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in einander übergehen. Aus σ und den 6 elliptisch geschaarten Involutionen (Iα_3) von G_{576} resultiren 6 Nullcorrelationen, und aus σ und den 9 hyperbolisch geschaarten Involutionen (Iα_2) resultiren 9 polare Correlationen, deren Ordnungsflächen reell und geradlinig sind. σ erzeugt mit den 24 centrischen Involutionen von G_{576} 24 polare Correlationen, deren Ordnungsflächen ebenfalls reell, aber nicht geradlinig sind. Ausser den angegebenen polaren Correlationen giebt es nur noch 36, welche die beiden associirten Cff. (12_6, 16_3) in einander transformiren; dieselben sind

*) Vgl. Reye, a. a. O. p. 102.

das Erzeugniss von σ mit den 36 hyperbolisch geschaarten Involutionen $(\mathrm{II}\beta_1)$ von G_{576}. Ihre Polarflächen sind reell und geradlinig.

Eine harmonische Cf. $(24_9, 18_4)$ wird nach vorstehendem durch 18 Null- und 106 polare Correlationen in sich selbst transformirt.

(20.) Die Gruppe G_{2304} ist in einer von Klein aufgestellten Gruppe G_{23040} enthalten, welche ausser den Collineationen und Correlationen von G_{2304} keine reellen Verwandtschaften besitzt, und zu der man folgendermassen gelangt: die in (19.) erwähnten 6 involutorischen Nullsysteme bestimmen 6 sog. „Fundamentalcomplexe"*), welche man analytisch so darstellen kann

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0,$$

worin die x solche lineare Functionen der Liniencoordinaten sind, dass zwischen ihnen die Identität besteht:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die Gruppe der 6 Complexe bleibt ungeändert, wenn man die Vorzeichen der Verhältnisse der x beliebig ändert und die x beliebig permutirt**). Die auf diese Weise definirten Operationen stellen $2^5 . 6! = 23040$ Verwandtschaften dar, die zur Hälfte Collineationen, zur Hälfte Correlationen sind, und welche die durch die 6 Fundamentalcomplexe bestimmten 10 Fundamentalflächen und 15 Fundamentaltetraeder***) in einander transformiren. Die 6 Tetraeder Δ und Δ_1 gehören zu den Fundamentaltetraedern und die Polarfläche der Correlation $\sigma(2)$ gehört zu den Fundamentalflächen; G_{2304} ist diejenige Untergruppe von G_{23040}, deren Verwandtschaften die Polarfläche von σ ungeändert lassen. Dies Resultat lässt sich u. A. aus einer Untersuchung von Herrn Hess herleiten, der zeigt,†) dass zu jeder der 10 Fundamentalflächen eine Gruppe von 6 der 15 Fundamentaltetraeder gehört, welche zu einander und zu der betr. Fläche dieselbe projective Lage haben, wie die in 1) und 2) beschriebenen Tetraeder Δ und Δ_1 und die Ordnungsfläche von σ. Die so bestimmten 10 Gruppen von je 6 Tetraedern gehen durch 10 . 2304 Collineationen und Correlationen in einander über.

Strassburg im Juni 1895.

---

*) Vgl. F. Klein, Math. Ann. Bd. 2, p. 203.

**) F. Klein, Math. Ann. Bd. 4, p. 356. — Reichardt, Math. Ann. Bd. 30. Nova Acta, Halle. Bd. L. — Maschke, Math. Ann. Bd. 30.

***) F. Klein, Math. Ann. Bd. 2, p. 205—208.

†) Hess, Nova Acta, Halle. Bd. LV, Nr. 2. Beiträge zur Theorie der räumlichen Configurationen, p. 116—117.

Neue Beweise für die Convergenz der Reihen, welche bei der Integration linearer Differentialgleichungen in der Umgebung der einfachsten singulären Stellen auftreten.

Von

Adolf Kneser in Dorpat.

Ein wesentlicher Theil der bekannten Sätze, welche Fuchs im LXVI. Bande des Crelle'schen Journals über die Integrale einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung der einfachsten, neuerdings als „Stellen der Bestimmtheit" bezeichneten singulären Punkte aufgestellt hat, ist von Frobenius im LXXVI. Bande der genannten Zeitschrift nach einer neuen Methode abgeleitet worden, indem zuerst durch einfache Rechnungen Reihen gebildet werden, welche der Differentialgleichung formal genügen, und dann die Convergenz derselben nachgewiesen wird. Ein wesentliches Hülfsmittel des Beweises bildet das Theorem von Weierstrass über die Summation einer gleichmässig convergenten Reihe, deren Glieder Potenzreihen einer und derselben Variabeln sind. Man kann aber auch ohne von diesem Satze Gebrauch zu machen, wie auf den folgenden Blättern gezeigt wird, den Beweis der Convergenz in verhältnissmässig elementarer Weise führen und dadurch einen neuen und, wie mir scheint, bequemen Zugang zu einem Theil der fundamentalen Theorie von Fuchs eröffnen.

§ 1.

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Beginnen wir mit dem Specialfall der Gleichungen zweiter Ordnung, welcher bei einer gewissen Anordnung der Rechnung sehr leicht zu erledigen ist.

In der Gleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_2\, y = 0$$

seien die Coefficienten P in der Umgebung der Stelle $x = 0$ ausser-

wesentlich singulär, und zwar so, dass P_1 höchstens von der ersten, P_2 höchstens von der zweiten Ordnung unendlich gross wird. Führt man die Gleichung durch die Substitution

$$y = z e^{-\frac{1}{2}\int P_1\,dx}$$

in die binomische

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \left(P_2 - \frac{1}{2}\frac{dP_1}{dx} - \frac{1}{4}P_1^2\right) z = 0$$

über, so wird in dieser der Coefficient von z mit x^2 multiplicirt endlich, sodass man sich, unter $a_0, a_1, \ldots$ Constanten verstehend, auf Gleichungen von folgender Form beschränken kann:

(1) $$P(z) = x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots) z = 0.$$

Setzt man hierin für z eine Reihe der Form

$$\mathfrak{r} = g_0 x^{\varrho} + g_1 x^{\varrho+1} + g_2 x^{\varrho+2} + \cdots,$$

in welcher $g_0, g_1, \ldots$ von x unabhängige Grössen sind, so ist in dem Ausdruck $P(\mathfrak{r})$ der Coefficient von $x^{\varrho+\nu}$, wenn ν, wie stets im Folgenden, ein positive ganze Zahl bedeutet, offenbar

$$g_\nu \{(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)+a_0\} + a_1 g_{\nu-1} + a_2 g_{\nu-2} + \cdots + a_\nu g_0 .$$

Führt man daher die Bezeichnung ein

$$f(u) = u(u-1) + a_0$$

und setzt allgemein

(2) $$g_\nu f(\varrho+\nu) + a_1 g_{\nu-1} + a_2 g_{\nu-2} + \cdots + a_\nu g_0 = 0$$

so folgt, die Convergenz der Reihe $\mathfrak{r}$ vorausgesetzt, für beliebige Werthe von ϱ die Gleichung

$$P(\mathfrak{r}) = g_0 f(\varrho) x^{\varrho},$$

von der man später leicht zur Gleichung (1) zurückgehen kann.

Um nun die Reihe $\mathfrak{r}$ auf ihre Convergenz hin zu untersuchen, beschränken wir die complexe Variable ϱ auf ein beliebig begrenztes, endliches Gebiet $\mathfrak{R}$; die positive ganze Zahl k werde so angenommen, dass für alle diese Werthe von ϱ die Ungleichung

(3) $$|f(\varrho+k+1)| > 1$$

besteht. Alsdann kann für $\nu > k$ die Grösse g_ν durch die Gleichung (2) definirt werden, wenn die Werthe $g_0, g_1, \ldots g_{\nu-1}$ bekannt sind. Die Grössen $g_0, g_1, \ldots g_k$ seien beliebig gegebene Functionen von ϱ, welche im Gebiet $\mathfrak{R}$ ebenso wie ihre ersten Ableitungen nach ϱ endlich und stetig sind. Ferner seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ derartige positive Constanten, dass die Reihe

$$\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots$$

einen nicht verschwindenden Convergenzbereich besitzt, und dass ausserdem allgemein die Relation

$$(4) \qquad \alpha_\nu \geqq |a_\nu|$$

besteht. Die Constanten $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_k$ seien ebenfalls positiv und es sei für alle dem Gebiete $\mathfrak{R}$ angehörenden Werthe von ϱ

$$(5) \qquad \beta_0 > |g_0|, \; \beta_1 > |g_1| \ldots \beta_k > |g_k|.$$

Definirt man sodann für $\nu > k$ die Grössen β_ν durch die Recursionsformel

$$(6) \qquad \beta_\nu = \alpha_1 \beta_{\nu-1} + \alpha_2 \beta_{\nu-2} + \cdots + \alpha_\nu \beta_0,$$

so sind sie offenbar alle positiv. Da nun den Relationen (2) und (3) zufolge für $\nu > k$ die Ungleichung

$$|g_\nu| < |a_1 g_{\nu-1}| + |a_2 g_{\nu-2}| + \cdots + |a_\nu g_0|$$

gilt, so ergiebt sich nach (4) und (5) zunächst für $\nu = k+1$

$$|g_{k+1}| < \alpha_1 \beta_k + \alpha_2 \beta_{k-1} + \cdots + \alpha_{k+1} \beta_0,$$

also mit Rücksicht auf (6)

$$|g_{k+1}| < \beta_{k+1}.$$

Aus dieser Ungleichung folgt weiter, indem man schrittweise von einem Index zu dem um Eins höheren fortschreitet, die allgemeine Relation

$$|g_{k+\nu}| < \beta_{k+\nu}.$$

Hieraus kann leicht geschlossen werden, dass die Reihe $\mathfrak{r}$ einen nicht verschwindenden Convergenzbereich besitzt. Bildet man nämlich zunächst rein formal das Product

$$(\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \cdots)(1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots),$$

so ist der Coefficient von x^ν der Ausdruck

$$\beta_\nu - \alpha_1 \beta_{\nu-1} - \alpha_2 \beta_{\nu-2} - \cdots - \alpha_\nu \beta_0;$$

dieser verschwindet nach (6) für $\nu > k$; wenn $\nu \leqq k$, bezeichnen wir ihn durch b_ν. Dann sind die Grössen β_ν die Coefficienten in der Entwickelung des Quotienten

$$\frac{\beta_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_k x^k}{1 - \alpha_1 x - \alpha_2 x^2 - \cdots}$$

nach steigenden Potenzen von x; da diese Entwickelung für nicht verschwindende Werthe von x convergirt, so giebt es positive, von ϱ unabhängige Grössen γ, δ von der Beschaffenheit, dass allgemein

$$\gamma \delta^\nu > \beta_\nu > |g_\nu|,$$

und dass für alle dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehörenden Werthe von ϱ die Reihe $\mathfrak{r}$ convergirt unter der Bedingung

$$|x| < \frac{1}{\delta}.$$

§ 2.

Fortsetzung; Differentiation der Reihe $\mathfrak{r}$ nach ϱ.

Für gewisse Ausnahmefälle, diejenigen nämlich, in welchen die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung $f(u) = 0$ gleich oder um eine ganze Zahl von einander unterschieden sind, muss man über die Convergenz der Reihe

$$\bar{\mathfrak{r}} = g_0' + g_1'x + g_2'x^2 + \cdots$$

orientirt sein, in welcher, wie fortan immer geschehen soll, durch Accente die Ableitungen nach ϱ bezeichnet sind. Um diese Reihe näher zu untersuchen, gehen wir aus von der durch Differentiation aus der Gleichung (2) folgenden

$$g_\nu' f(\varrho+\nu) = -g_\nu f'(\varrho+\nu) - a_1 g_{\nu-1}' - a_2 g_{\nu-2}' - \cdots - a_\nu g_0',$$

welche jedenfalls, sobald $\nu > k$, geschrieben werden kann

$$(7) \qquad g_\nu' = -g_\nu \frac{f'(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)} - \frac{a_1 g_{\nu-1}' + a_2 g_{\nu-2}' + \cdots + a_\nu g_0'}{f(\varrho+\nu)}.$$

Nun sei h eine der Zahlen $k+\nu$, deren Bestimmung vorbehalten bleibt; setzt man

$$(8) \qquad G_0 = g_0',\ G_1 = g_1', \ldots G_h = g_h',$$

für $\nu > h$ aber allgemein

$$(9) \qquad G_\nu = -\frac{a_1 G_{\nu-1} + a_2 G_{\nu-2} + \cdots + a_\nu G_0}{f(\varrho+\nu)}$$

so ist in dieser Gleichung der Nenner nach (3) stets von Null verschieden; da nun zufolge der in § 1 für die Functionen $g_0, g_1, \ldots g_k$ gemachten Voraussetzungen die Grössen $g_0', g_1', \ldots g_k'$ im Gebiet $\mathfrak{R}$ endliche und stetige Functionen von ϱ sind, da ferner von der auf die Ableitungen $g_0', g_1', \ldots g_k'$ bezüglichen Voraussetzung in § 1 kein Gebrauch gemacht worden ist, so kann man die Grössen $g_0, g_1, \ldots g_k$ durch $G_0, G_1, \ldots G_h$, die Zahl k durch die grössere h ersetzen, und es ergiebt sich aus dem in § 1 erhaltenen Resultat, dass die Potenzreihe

$$G_0 + G_1 x + G_2 x^2 + \cdots$$

für einen gewissen, von der speciellen Wahl des Werthes ϱ unabhängigen Bereich der Variabeln x convergirt. Somit kann eine positive Constante δ derartig bestimmt werden, dass für alle dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehörenden Werthe von ϱ

$$(10) \qquad \delta^\nu > |a_\nu|, \quad \delta^\nu > |g_\nu|, \quad \delta^\nu > |G_\nu|.$$

Subtrahirt man nun eine der Gleichungen (7) und (9) von der anderen, so ergiebt sich

$$g_\nu' - G_\nu = -\frac{f'(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)}\, g_\nu$$
$$-\frac{a_1(g_{\nu-1}'-G_{\nu-1})+a_2(g_{\nu-2}'-G_{\nu-2})+\cdots+a_{\nu-h-1}(g_{h+1}'-G_{h+1})}{f(\varrho+\nu)};$$

hieraus folgt mit Benutzung der Relationen (10)

$$(11)\qquad |g_\nu'-G_\nu| < \delta^\nu \left|\frac{f'(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)}\right|$$
$$+\frac{\delta\,|g_{\nu-1}'-G_{\nu-1}|+\delta^2\,|g_{\nu-2}'-G_{\nu-2}|+\cdots+\delta^{\nu-h-1}\,|g_{h+1}'-G_{h+1}|}{|f(\varrho+\nu)|}.$$

Setzt man speciell $\nu = h+1$, so erhält man

$$(12)\qquad g_{h+1}' - G_{h+1} = -\frac{f'(\varrho+h+1)}{f(\varrho+h+1)}\, g_{h+1}.$$

Wird jetzt für die bisher oberhalb der Grenze k willkürliche Zahl h die Annahme eingeführt, dass allgemein

$$(13)\qquad \left|\frac{f'(\varrho+\nu+h)}{f(\varrho+\nu+h)}\right| < 1$$

sei, eine Ungleichung, die für jeden dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehörigen Werth von ϱ bei willkürlichen Werthen der Zahl ν besteht, sobald die Zahl h oberhalb einer gewissen Grenze liegt, so ergiebt die Gleichung (12)

$$|g_{h+1}' - G_{h+1}| < \delta^{h+1}.$$

Dieser Formel lassen sich ähnliche zur Seite stellen, in welchen $h+1$ durch irgend eine grössere ganze Zahl ersetzt ist. Nimmt man nämlich an, es sei $\nu > h+1$ und

$$|g_{h+1}'-G_{h+1}| < \delta^{h+1},\ |g_{h+2}'-G_{h+2}| < \delta^{h+2}, \ldots |g_{\nu-1}'-G_{\nu-1}| < \delta^{\nu-1},$$

so lehrt die Formel (11)

$$|g_\nu' - G_\nu| < \delta^\nu \left|\frac{f'(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)}\right| + \frac{(\nu-h-1)\,\delta^\nu}{|f(\varrho+\nu)|} < \delta^\nu\,\frac{|f'(\varrho+\nu)|+\nu}{|f(\varrho+\nu)|}.$$

Erlegt man daher der Zahl h ausser der Ungleichung (13) noch die mit dieser vereinbarte weitere Beschränkung auf, dass für $\nu > h$

$$\frac{|f'(\varrho+\nu)|+\nu}{|f(\varrho+\nu)|} < 1$$

sei, was offenbar möglich ist, da der Ausdruck links für beliebige dem Gebiet $\mathfrak{R}$ angehörige Werthe von ϱ beliebig klein wird, sobald man ν oberhalb einer gewissen Grenze bleiben lässt, so ergiebt die vorletzte Ungleichung

$$(14)\qquad |g_\nu' - G_\nu| < \delta^\nu,$$

eine Relation die hiermit für jeden Werth $\nu > h$ durch vollständige Induction bewiesen ist. Da ferner

$$|g_\nu'| \leq |g_\nu' - G_\nu| + |G_\nu|,$$

so folgt nach (10) und (14) allgemein

$$|g_\nu'| < 2\delta^\nu.$$

Die Grösse δ ist ihrer Definition nach von der speciellen Wahl der Grösse ϱ im Gebiet $\mathfrak{R}$ unabhängig; für dieses Gebiet convergirt daher die Reihe

$$\bar{\mathfrak{r}} = g_0' + g_1'x + g_2'x^2 + \cdots$$

gleichmässig, wenn das Argument x so fixirt wird, dass die Ungleichung

$$|x| < \frac{1}{\delta}$$

besteht. Jene Reihe kann daher einem leicht zu beweisenden und bekannten Satze zufolge nach ϱ gliedweise integrirt werden, wodurch man erhält

$$(15)\qquad \begin{aligned} \bar{\mathfrak{r}} &= \frac{\partial}{\partial \varrho}(g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots), \\ \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho} &= \mathfrak{r} \lg x + x^\varrho \bar{\mathfrak{r}}. \end{aligned}$$

Hiermit sind alle Vorbereitungen getroffen, um die Integrale der Gleichung (1) in der Umgebung des singulären Punktes $x = 0$ nach der Methode von Frobenius darzustellen; man geht zu dem Zweck davon aus, dass, wenn alle Gleichungen (2) erfüllt sind, die Identitäten

$$(16)\qquad \begin{aligned} P(\mathfrak{r}) &= f(\varrho)\, g_0 x^\varrho, \\ P\left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho}\right) &= f'(\varrho)\, g_0 x^\varrho + x^\varrho f(\varrho)\,(g_0' + g_0 \lg x) \end{aligned}$$

gelten und grenzt das Gebiet $\mathfrak{R}$ so ab, dass es die Wurzeln der determinirenden Gleichung $f(u) = 0$, welche ϱ_0 und ϱ_1 seien, ausser diesen aber keine Grösse der Form $\varrho_0 - \nu$ oder $\varrho_1 - \nu$ enthält. Hat man zunächst $\varrho_1 = \varrho_0 + m$, wobei m eine positive ganze Zahl bedeute, so setzen wir, unter $\bar{g}_0$ eine von ϱ unabhängige Grösse verstehend,

$$g_0 = \bar{g}_0 f(\varrho + m)$$

und definiren die übrigen Grössen g_ν durch die Gleichungen (2), von denen nur die auf den Werth $\nu = m$ bezügliche von dem Factor $f(\varrho + m)$ befreit wird. Alsdann sind die Grössen $g_0, g_1, \ldots g_m$ für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ sammt ihren ersten Ableitungen endliche und stetige Functionen von ϱ. Die folgenden Grössen g können ausnahmslos durch die ungeänderten Formeln (2) definirt werden, wobei die in § 1 definirte Zahl k grösser als m sein muss, die Reihen $\mathfrak{r}$ und $\bar{\mathfrak{r}}$ convergiren daher für von Null verschiedene Werthe von x und stehen zu einander in den Beziehungen (15). Weiter zeigen die Identitäten (16), dass die Ausdrücke

$$(\mathfrak{r})_{\varrho = \varrho_0 + m}, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho}\right)_{\varrho = \varrho_0}$$

Integrale der Differentialgleichung $P(z) = 0$ darstellen.

Haben die Wurzeln der determinirenden Gleichung keine ganzzahlige Differenz, so können die Gleichungen (2) stets ohne weiteres zur Definition aller Grössen g_ν benutzt werden; man hat den Gleichungen (16) zufolge bei gleichen Wurzeln die Integrale

$$(\mathfrak{r})_{\varrho=\varrho_0}, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0},$$

bei ungleichen

$$(\mathfrak{r})_{\varrho=\varrho_0}, \quad (\mathfrak{r})_{\varrho=\varrho_1}.$$

§ 3.

Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung.

Um den bisherigen analoge Entwickelungen für die allgemeine Gleichung

$$(12)\quad P(y) = x^n \frac{d^n y}{dx^n} + x^{n-1}\mathfrak{P}_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + x^{n-2}\mathfrak{P}_2(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$\cdots + \mathfrak{P}_n(x)\, y = 0$$

zu erhalten, in welcher durch $\mathfrak{P}$ Potenzreihen nicht verschwindenden Convergenzbereichs bezeichnet sind, versuchen wir ihr zu genügen durch eine Reihe

$$\mathfrak{r} = g_0 x^\varrho + g_1 x^{\varrho+1} + g_2 x^{\varrho+2} + \cdots;$$

setzt man allgemein

$$\mathfrak{P}_\nu(y) = a_{\nu 0} + a_{\nu 1} x + a_{\nu 2} x^2 + \cdots,$$

$$f(\varrho) = \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho-n+1) + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varrho(\varrho-1)\cdots$$
$$\cdots(\varrho-n+\lambda+1)a_{\lambda 0} + a_{n0},$$

$$f_\nu(\varrho) = \sum_{\lambda=1}^{n-1} \varrho(\varrho-1)\cdots(\varrho+\lambda-n+1)a_{\lambda\nu} + a_{n\nu},$$

so ergiebt sich leicht die rein formale Identität

$$P(\mathfrak{r}) = g_0 f(\varrho)x^\varrho + \sum_{\nu=1}^{\infty} x^{\varrho+\nu}\left\{g_\nu f(\varrho+\nu) + \sum_{\lambda=1}^{\nu} g_{\nu-\lambda} f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)\right\}.$$

Die Convergenz der Reihe $\mathfrak{r}$ vorausgesetzt, integrirt man also wiederum für willkürliche Werthe von ϱ die Gleichung

$$P(\mathfrak{r}) = g_0 f(\varrho) x^\varrho,$$

wenn allgemein die Gleichung

$$(18)\qquad g_\nu f(\varrho+\nu) + \sum_{\lambda=1}^{\nu} g_{\nu-\lambda} f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda) = 0$$

besteht. Diese kann zur Definition der Grösse g_ν durch die Grössen g von geringerem Index dienen, wenn der Coefficient von g_ν nicht verschwindet. Das kann nur für eine endliche Anzahl von Werthen ν geschehen, wenn man die Variable ϱ auf ein beliebig begrenztes, ganz im Endlichen gelegenes Gebiet $\mathfrak{R}$ beschränkt. Jedenfalls also kann die Gleichung (18) als Recursionsformel zur Bestimmung der Grössen g_ν dienen, sobald der Index ν eine gewisse positive ganze Zahl k überschritten hat; $g_0, g_1, \ldots g_k$ seien Functionen von ϱ, welche nebst ihren ersten $n-1$ Ableitungen im Gebiet $\mathfrak{R}$ endlich und stetig sind.

Da nun die Potenzreihen $\mathfrak{P}_\nu$ für von Null verschiedene Werthe des Arguments convergiren, so giebt es derartige positive Grössen γ, δ, dass allgemein die Ungleichung

$$|a_{\lambda\nu}| < \gamma\delta^\nu$$

gilt. Dabei kann, wie die Definitionsgleichungen der Functionen f_ν lehren, die Grösse γ so gross angenommen werden, dass in dem nach Potenzen von ϱ geordneten Polynom $f_\nu(\varrho)$ die absoluten Beträge aller Coefficienten unterhalb der Grenze $\gamma\delta^\nu$ verbleiben. Alsdann ist für $|u| > 1$

$$(19) \qquad |f_\nu(u)| < \gamma\delta^\nu(1+|u|+|u|^2+\cdots+|u|^{n-1}) < n\gamma\delta^\nu|u|^{n-1}.$$

Beschränkt man das Argument u auf ein beliebiges endliches Gebiet, so kann eine derartige positive Grösse γ_1 gefunden werden, dass für jeden Werth von ν

$$(20) \qquad \left|\frac{f_\nu(u)}{\gamma\delta^\nu}\right| < \gamma_1;$$

denn die Coefficienten der links stehenden ganzen Function von u sind dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins. Speciell sei $u = \varrho + m$, und m eine ganze Zahl, dann kann es nur für eine endliche Anzahl von Werthen m im Gebiet $\mathfrak{R}$ Grössen ϱ geben, für welche u dem absoluten Betrage nach kleiner als Eins ist. Beschränkt man sich auf diese Werthe von m, so ist offenbar

$$\left|\frac{f_\nu(\varrho+m)}{\gamma\delta^\nu}\right| < \gamma_1.$$

Wendet man diese Betrachtungen an auf die Coefficienten der in der Form

$$(21) \qquad g_\nu = -\sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\, g_{\nu-\lambda}$$

geschriebenen Recursionsformel (18), so erhält man eine der Ungleichungen

(22)
$$\left|\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \frac{\gamma_1\gamma\delta^\lambda}{|f(\varrho+\nu)|}$$

oder

$$\left|\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \frac{n\gamma\delta^\lambda|\varrho+\nu-\lambda|^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|},$$

je nach den Werthen der Differenz $\nu-\lambda$; die erste gilt nach (20) für gewisse Werthe von ϱ, wenn $\nu-\lambda$ einer der soeben betrachteten Zahlen m gleich ist, die zweite nach (19) in allen übrigen Fällen. Ersetzt man letztere durch die aus ihr folgende

$$\left|\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \frac{n\gamma\delta^\lambda(|\varrho|+\nu)^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|},$$

so sieht man unmittelbar, dass in ihr der Zähler der rechten Seite für hinreichend grosse Werthe von ν grösser ist als in der Ungleichung (22). Sobald daher ν eine gewisse Grenze h, welche wir grösser als k voraussetzen dürfen, überschritten hat, gilt allgemein die zuletzt hingeschriebene Ungleichung

Aus dieser folgt auf Grund der Formel (21)

$$|g_\nu| < \sum_{\lambda=1}^{\nu} |g_{\nu-\lambda}|\delta^\lambda \cdot \frac{n\gamma(|\varrho|+\nu)^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|};$$

nimmt man daher für h eine so grosse Zahl, dass für $\nu > h$ stets

$$\frac{n\gamma(\nu+|\varrho|)^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|} < 1,$$

was offenbar möglich ist, da der Bruch auf der linken Seite bei unbegrenzt wachsenden Werthen von ν unendlich klein wird, so hat man, sobald $\nu > h$, die Ungleichung

(23)
$$|g_\nu| < \sum_{\lambda=1}^{\nu} |g_{\nu-\lambda}|\delta^\lambda.$$

Jetzt seien $h+1$ positive Grössen β so gewählt, dass für alle dem Bereich $\mathfrak{R}$ angehörigen Werthe von ϱ und für $\nu = 1, 2, \ldots h$

(24)
$$|g_0| < \beta_0, \quad |g_\nu| < \beta_\nu\delta^\nu;$$

lässt man ν über die Grenze h hinaus wachsen, so diene zur Definition weiterer Grössen β die Formel

(25)
$$\beta_\nu = \sum_{\lambda=1}^{\nu} \beta_{\nu-\lambda},$$

welche offenbar für alle diese Grössen positive Werthe ergiebt. Alsdann

ergiebt die Ungleichung (23) bei der speciellen Annahme $\nu = h + 1$ mit Rücksicht auf (24)

$$|g_{h+1}| < \sum_{\lambda=1}^{h+1} \beta_{h+1-\lambda}\, \delta^{h+1-\lambda} \,.\, \delta^\lambda$$

oder

$$(26) \qquad |g_{h+1}| < \beta_{h+1}\, \delta^{h+1}.$$

Setzt man ferner $\nu = h + 2$, so ist nach (23), (24) und (25)

$$|g_{h+2}| < \sum_{\lambda=1}^{h+2} \beta_{h+2-\lambda}\, \delta^{h+2-\lambda} \,.\, \delta^\lambda$$

oder nach (25)

$$|g_{h+2}| < \delta^{h+2} \sum_{\lambda=1}^{h+2} \beta_{h+2-\lambda}, \quad |g_{h+2}| < \beta_{h+2}\, \delta^{h+2}.$$

Auf diese Weise fortschliessend beweist man leicht durch vollständige Induction die allgemeine Gültigkeit der Relation (24) für beliebige Werthe ν.

Um von diesem Resultat aus zum Ziel zu kommen, brauchen wir nur noch zu zeigen, dass die mit den Coefficienten β_ν gebildete Potenzreihe für nicht verschwindende Werthe von x convergirt. Das sieht man sofort, wenn man für $\nu \leqq h$ setzt

$$(27) \qquad B_\nu = \beta_\nu - \sum_{\lambda=1}^{\nu} \beta_{\nu-\lambda},$$

und den Quotienten

$$\frac{\beta_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots + B_h x^h}{1 - x - x^2 - \cdots} = \frac{(1-x)(\beta_0 + B_1 x + \cdots + B_h x^h)}{1 - 2x}$$

nach steigenden Potenzen von x entwickelt; zur Bestimmung der Coefficienten ergeben sich genau die Recursionsformeln (25) oder (27), je nachdem der Exponent von x die Zahl h übersteigt oder nicht. Die Reihe

$$\beta_0 + \beta_1 \delta x + \beta_2 \delta^2 x^2 + \cdots$$

convergirt daher, sobald

$$(28) \qquad |x| < \frac{1}{2\delta};$$

dasselbe gilt der Relation (24) zufolge von der Reihe

$$\frac{\mathfrak{r}}{x^\varrho} = g_0 + g_1 x + g_2 x^2 + \cdots$$

Dieselbe convergirt, wenn man für x einen festen, der Ungleichung (28) genügenden Werth setzt, gleichmässig für alle dem Gebiet $\mathfrak{R}$

angehörigen Werthe von ϱ, da die Grössen β, γ, δ ihrer Definition nach von ϱ unabhängig sind. Aus eben diesem Grunde giebt es derartige positive Constanten Γ, Δ, dass für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$

$$|g_\nu| < \Gamma\Delta^\nu.$$

§ 4.

Die allgemeinere Reihe r gliedweise nach ϱ differenzirt.

Die Constante γ kann, ohne ihre bisher gebrauchten Eigenschaften zu verlieren, so gewählt werden, dass alle Coefficienten des Polynoms

$$\frac{f_\nu^{(\mu)}(u)}{\gamma\delta^\nu},$$

in welchem μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots n-1$ bedeutet, dem absoluten Betrage nach die Einheit nicht übersteigen. Dann giebt es, wie oben, eine positive Constante γ_1 von der Beschaffenheit, dass für $|u| \leqq 1$

$$(29) \qquad |f_\nu^{(\mu)}(u)| < \gamma_1\gamma\delta^\nu,$$

während bei der Annahme $|u| > 1$ offenbar die Ungleichung

$$(30) \qquad \begin{aligned} |f_\nu^{(\mu)}(u)| &< \gamma\delta^\nu(1 + |u| + |u|^2 + \cdots + |u|^{n-\mu-1}) \\ &< (n-\mu)\gamma\delta^\nu |u|^{n-\mu-1} \end{aligned}$$

stattfindet.

Diese Bemerkungen wenden wir an auf die Formel, welche man erhält, indem man die Gleichung (18) μ-mal differenzirt, und durch $f(\varrho+\nu)$ dividirt,

$$(31) \qquad \begin{aligned} g_\nu^{(\mu)} = &-\sum_{\sigma=0}^{\mu-1}\binom{\mu}{\sigma} g_\nu^{(\sigma)}\frac{f^{(\mu-\sigma)}(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)} - \sum_{\lambda=1}^{\nu} g_{\nu-\lambda}^{(\mu)}\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)} \\ &-\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\sigma=1}^{\mu}\binom{\mu}{\sigma} g_{\nu-\lambda}^{(\mu-\sigma)}\frac{f_\lambda^{(\sigma)}(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}. \end{aligned}$$

Wir nehmen an, was für $\mu = 1$ nach § 3 feststeht, es gebe derartige Constanten Γ, Δ, dass für $\sigma = 0, 1, \ldots \mu - 1$ und für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ bei beliebigen Werthen ν die Ungleichungen

$$(32) \qquad |g_0^{(\sigma)}| < \Gamma, \qquad |g_\nu^{(\sigma)}| < \Gamma\Delta^\nu$$

bestehen; dabei kann man die Grössen Γ, Δ unbeschadet dieser Relationen vergrössern, also annehmen

$$\Gamma > \gamma, \quad \Delta > \delta$$

und demnach die Grössen γ und δ in den Ungleichungen (29) und (30) durch Γ und Δ ersetzen. Dieselben ergeben dann, dass entweder

$$\left|\frac{f_\lambda^{(\sigma)}(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \frac{\gamma_1 \Gamma \Delta^\lambda}{|f(\varrho+\nu)|}$$

oder

$$\left|\frac{f_\lambda^{(\sigma)}(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < (n-\sigma)\Gamma\Delta^\lambda \frac{|\varrho+\nu-\lambda|^{n-\sigma-1}}{|f(\varrho+\nu)|}$$

$$< (n-\sigma)\Gamma\Delta^\lambda \frac{(|\varrho|+\nu)^{n-\sigma-1}}{|f(\varrho+\nu)|},$$

wenn $\nu-\lambda$, wie in der Formel (31), keine negative Zahl ist. Für die in der Doppelsumme auf der rechten Seite der Gleichung (31) auftretenden Glieder hat man daher, mit Rücksicht auf (32) eine der beiden Ungleichungen

$$\binom{\mu}{\sigma}\left|g_{\nu-\lambda}^{(\mu-\sigma)} \frac{f_\lambda^{(\sigma)}(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \binom{\mu}{\sigma} \frac{\gamma_1 \Gamma^2 \Delta^\nu}{|f(\varrho+\nu)|},$$

$$\binom{\mu}{\sigma}\left|g_{\nu-\lambda}^{(\mu-\sigma)} \frac{f_\lambda^{(\sigma)}(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \binom{\mu}{\sigma}(n-\sigma)\Gamma^2\Delta^\nu \frac{(|\varrho|+\nu)^{n-\sigma-1}}{|f(\varrho+\nu)|}.$$

Die Grösse, deren absoluter Betrag links steht, kann also in jedem Falle dargestellt werden als Product von Δ^ν in einen Factor, welcher für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ dem absoluten Betrage nach unter einer gegebenen Grösse liegt, sobald ν eine gewisse Grenze überschritten hat. Ein ähnliches Resultat erhält man nach (32) für die Glieder der ersten Summe auf der rechten Seite der Gleichung (31), da offenbar

$$\binom{\mu}{\sigma}\left|g_\nu^{(\sigma)} \frac{f^{(\mu-\sigma)}(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \binom{\mu}{\sigma}\Gamma\Delta^\nu \left|\frac{f^{(\mu-\sigma)}(\varrho+\nu)}{f(\varrho+\nu)}\right|,$$

und die Zahl $\mu-\sigma$ hier nicht kleiner als Eins wird. Man kann daher die Gleichung (31) in der Form

$$g_\nu^{(\mu)} = -\sum_{\lambda=1}^{\nu} g_{\nu-\lambda}^{(\mu)} \frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)} + \Delta^\nu \varepsilon_\nu \tag{33}$$

schreiben, wobei die Grössen $|\varepsilon_\nu|$ im ganzen Gebiet $\mathfrak{R}$ beliebig klein sind, sobald die Zahl ν oberhalb eines gewissen Werthes r liegt.

Weiter folgt aus den Formeln (19) und (20), dass entweder

$$|f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)| < \gamma_1\Gamma\Delta^\lambda$$

oder

$$|f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)| < n\Gamma\Delta^\lambda|\varrho+\nu-\lambda|^{n-1} < n\Gamma\Delta^\lambda(\nu+|\varrho|)^{n-1};$$

nun gilt für hinreichend grosse Werthe ν die Ungleichung

$$n(\nu+|\varrho|)^{n-1} > \gamma_1,$$

mithin auch

$$\left|\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < n\Gamma\Delta^\lambda \frac{(|\varrho|+\nu)^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|}.$$

Da ferner offenbar

$$\lim_{\nu=+\infty} \frac{\nu(\nu+|\varrho|)^{n-1}}{|f(\varrho+\nu)|} = 1,$$

so kann man die letzte Ungleichung, wenn man die Zahl r nöthigenfalls vergrössert, für $\nu > r$ durch folgende ersetzen

$$(34) \qquad \left|\frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}\right| < \frac{(n+1)\Gamma\Delta^\lambda}{\nu}.$$

Subtrahiren wir jetzt von der Gleichung (33) die ursprüngliche Recursionsformel (21), so ergiebt sich

$$g_\nu^{(\mu)} - g_\nu = -\sum_{\lambda=1}^{\nu} \frac{f_\lambda(\varrho+\nu-\lambda)}{f(\varrho+\nu)}(g_{\nu-\lambda}^{(\mu)} - g_{\nu-\lambda}) + \Delta^\nu \varepsilon_\nu;$$

setzt man daher

$$g_0^{(\mu)} - g_0 = h_0, \qquad g_\nu^{(\mu)} - g_\nu = \Delta^\nu h_\nu,$$

so folgt aus der Relation (34)

$$(35) \qquad |h_\nu| < \frac{(n+1)\Gamma}{\nu}\sum_{\lambda=1}^{\nu}|h_{\nu-\lambda}| + |\varepsilon_\nu|.$$

Nun giebt es eine von ϱ unabhängige positive Grösse C von der Beschaffenheit, dass für alle Werthe von ν oberhalb der Grenze r die Ungleichung

$$(36) \qquad C > |\varepsilon_\nu|$$

gilt. Ferner kann man annehmen

$$(37) \qquad (n+2)\Gamma > 1,$$

da die Grösse Γ in der ganzen bisherigen Argumentation durch eine grössere ersetzt werden kann, ohne die benutzten Eigenschaften einzubüssen. Nach diesen Festsetzungen führen wir eine positive Grösse Ψ ein, welche den Ungleichungen

$$(38) \qquad \Gamma\Psi > C, \quad \Psi > |h_{\nu_1-\lambda}|, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu_1)$$

genügt, wobei $\nu_1 > r$ sei. Dann ergiebt sich aus (35) und (36)

$$|h_{\nu_1}| < (n+1)\Gamma\Psi + C < (n+2)\Gamma\Psi;$$

zusammen mit den Relationen (38) hat man daher, mit Rücksicht auf (37) die weiteren

$$(n+2)\Gamma^2\Psi > C, \quad (n+2)\Gamma\Psi > |h_{\nu_1+1-\lambda}|, \quad (\lambda = 1, 2, \ldots \nu_1+1).$$

In diese gehen die Ungleichungen (38) über, wenn man Ψ durch $(n+2)\Gamma\Psi$, und ν_1 durch ν_1+1 ersetzt. Man erhält daher durch nochmalige Anwendung der soeben gebrauchten Schlussweise

$$|h_{\nu_1+1}| < (n+2)^2\Gamma^2\Psi,$$

und ebenso fortfahrend kommt man zu der allgemeinen Formel

$$|h_{\nu_1+\nu}| < (n+2)^{\nu+1}\Gamma^{\nu+1}\Psi.$$

Aus diesen Resultaten ist ersichtlich, dass die Potenzreihe

$$(39) \qquad h_1 x + h_2 x^2 + \cdots = \sum_{\nu=1}^{+\infty} (g_\nu - g_\nu^{(\mu)}) \frac{x^\nu}{\Delta^\nu}$$

einen nicht verschwindenden Convergenzbereich besitzt; das Endergebniss des § 3 lehrt dann, dass dasselbe von der Potenzreihe

$$(40) \qquad g_0^{(\mu)} + g_1^{(\mu)} x + g_2^{(\mu)} x^2 + \cdots$$

gilt. Und mehr noch: die Reihe (39) convergirt offenbar stärker als eine gewisse von ϱ unabhängige geometrische Progression, ebenso nach § 3 die Potenzreihe $\mathfrak{r}$; damit ist bewiesen, dass auch die Reihe (40), wenn man für x einen festen Werth nimmt, dessen absoluter Betrag eine gewisse von ϱ unabhängige Grenze nicht übersteigt, für das ganze Gebiet $\mathfrak{R}$ gleichmässig convergirt. Diese Resultate, welche für $\mu = 0$ in § 3 hergeleitet sind, beruhen auf der Annahme (32), sind also nach der Methode der vollständigen Induction für alle Zahlen $\mu = 1, 2, \ldots n-1$ bewiesen.

Um nun auf die Integration der Differentialgleichung (17) zurückzukommen, fassen wir die Gruppe aller Wurzeln der determinirenden Gleichung $f(u) = 0$ ins Auge, welche sich von einer unter ihnen nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die positiv genommenen Werthe aller von Null und von einander verschiedenen Differenzen irgend zweier von diesen Wurzeln seien $m_1, m_2, \ldots m_s$; dann setzen wir, im Wesentlichen der citirten Abhandlung von Frobenius folgend,

$$g_0 = f(\varrho + m_1) f(\varrho + m_2) \ldots f(\varrho + m_s),$$

und definiren die Grössen g_ν durch die Gleichungen (18), indem in der für $\nu = m_i$ erhaltenen der Factor $f(\varrho + m_i)$ weggelassen wird. Das Gebiet $\mathfrak{R}$ umfasse die Wurzeln der bezeichneten Gruppe, sonst aber keinen Werth, der aus irgend einer Wurzel der determinirenden Gleichung durch Subtraction einer positiven ganzen Zahl entsteht. Für dieses Gebiet verschwindet kein Nenner eines aus den Gleichungen (18) erhaltenen Ausdrucks g_ν nach der angegebenen Modification derselben; die Grössen g_ν sind also im Gebiet $\mathfrak{R}$ reguläre analytische Functionen von ϱ, und da sie, sobald die Zahl ν einen gewissen endlichen Werth erreicht hat, durch die ungeänderten Gleichungen (18) definirt werden, so sind die Voraussetzungen der obigen Theorie erfüllt. Die Reihe $\mathfrak{r}$ convergirt also für nicht verschwindende Werthe von x, und man hat in der Bezeichnung des § 3 die Identität

$$P(\mathfrak{r}) = g_0 f(\varrho) x^\varrho.$$

Differenzirt man dieselbe μ-mal nach ϱ, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^\mu}{\partial\varrho^\mu} P(\mathfrak{r}) = P\left(\frac{\partial^\mu \mathfrak{r}}{\partial\varrho^\mu}\right) = P(\mathfrak{r}^{(\mu)}) = \sum_{\lambda=0}^{\mu} x^\varrho (\lg x)^\lambda \binom{\mu}{\lambda} \sum_{\sigma=0}^{\lambda} \binom{\lambda}{\sigma} g_0^{(\sigma)} f^{(\lambda-\sigma)}(\varrho);$$

die rechte Seite verschwindet daher und $\mathfrak{r}^{(\mu)}$ ist ein Integral der Gleichung (17), wenn

$$g_0 = g_0' = \cdots = g_0^{(\mu_1)} = f(\varrho) = f'(\varrho) = \cdots = f^{(\mu_2)}(\varrho) = 0,$$

und durch μ_1 und μ_2 zwei ganze Zahlen, deren Summe μ ist, bezeichnet werden. Hieraus ersieht man leicht, welche Wurzeln der betrachteten Gruppe für ϱ in den Ausdruck $\mathfrak{r}^{(\mu)}$ zu setzen sind, um ihn zu einem Integral zu machen, und dass man so viele Integrale erhält, wie in der Gruppe Wurzeln vorhanden sind, wenn jede mit ihrer Multiplicität in Rechnung gebracht wird. Wendet man endlich ein in § 2 benutztes Theorem auf die Reihe (40) an, so sieht man, dass diese nach ϱ gliedweise integrirt werden kann, dass also die Gleichung

$$g_0^{(\mu)} + g_1^{(\mu)} x + g_2^{(\mu)} x^2 + \cdots = \frac{\partial}{\partial\varrho}\left(g_0^{(\mu-1)} + g_1^{(\mu-1)} x + g_2^{(\mu-1)} x^2 + \cdots\right)$$

besteht, und dass alle erhaltenen Integrale ganze Functionen von $\lg x$ sind, deren Coefficienten als Producte aus Potenzen von x und gewöhnlichen Potenzreihen dieser Variabeln dargestellt werden können.

Juli 1895.

Intorno ad alcune osservazioni sui segmenti infiniti e infinitesimi attuali.

Di

G. Veronese a Padova.

I sigg. W. Killing e G. Cantor hanno pubblicato recentemente due critiche alla mia teoria degli infiniti e infinitesimi attuali, che credo opportuno di confutare per non lasciare radicare nel pubblico dei falsi concetti intorno al fondamento di essa*). Queste critiche, non solo non accennano tutto quanto si riferisce nei miei *Fondamenti di Geometria***) e in altre pubblicazioni alla detta teoria e può portar lume sull' argomento, ma dimostrano in modo non dubbio che pur prendendo di mira una piccola parte dell' opera mia non hanno riferito o interpretato con esattezza neppure le proposizioni mie in esse esaminate.

Per censurare una teoria è necessario considerare anzitutto i principî che ne formano la base, o altri che a quelli equivalgano. Un metodo diverso, pare a me, possa condurre con facilità, specialmente nelle questioni di principî, ad equivoci e a discussioni interminabili senza vantaggio della scienza. Ed è per ciò che nello studio da me fatto dei lavori sui fondamenti della geometria e compendiato nell' appendice del mio libro ho cercato di seguire sempre con attenzione e imparzialità i principî stabiliti in ogni lavoro, accennando accanto agli eventuali difetti, di cui meritasse tener conto, anche i pregi più importanti, o bene circoscrivendo il campo della critica. Tale metodo ho tenuto anche dimostrando che se le obiezioni fatte in passato contro il segmento

*) W. Killing: Bemerkungen über Veronese's Transfiniten Zahlen-Index Lectionum in Ac. Monasteriensi. 1895. — G. Cantor: Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre in questi Annali, vol. 46 ultimo fasc°. pag. 500—501.

**) Tradotti da A. Schepp. Lipsia 1894. L'originale lo indicherò con la lettera i, la traduzione con t.

infinitesimo attuale valgono per quello di altri autori non possono valere per il mio. Fra altro ho provato la insostenibilità della dimostrazione del postulato V d' Archimede data dal sigr Killing nelle sue „Nicht-Euclidische Raumformen" ed ho criticato la dimostrazione sull'impossibilità del segmento infinitesimo attuale del sigr. Cantor pubblicata la prima volta nel Zeitschrift der Philosophie di Fichte nell' anno 1887. Questa dimostrazione non è però completa; e non avendo potuto, nè io nè altri, conoscerla interamente, ho cercato di darle nel mio libro quella interpretazione che mi parve e mi pare tuttora la vera*)

La critica del sigr K. tenta di seguire i principî della mia teoria, e conclude che questa per la sua importanza ha bisogno di una prova ulteriore prima di essere accettata. Il sigr. K. rinuncia così implicitamente alla difesa della sua dimostrazione del postulato d' Archimede**). Basta dunque far vedere che le osservazioni di senso determinato sulle quali la sua critica si appoggia non hanno fondamento di verità.

Neanche il sigr. C. difende la sua dimostrazione dalla mia critica, ma crede invece con poche affermazioni generiche di distruggere la mia teoria***). Non mi occupo della forma e del metodo della sua censura, badando soltanto alla sostanza delle cose da lui asserite. Egli afferma la „Uebereinstimmung"†), dei miei infiniti e infinitesimi cogli „höchst absurden" numeri infiniti di Fontenelle. Io conoscevo perfettamente questi infiniti e le censure che li hanno distrutti, ed è per ciò

---

*) Vegganai anche le mie „Osservazioni sopra una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale." — Atti del Circolo mat°. di Palermo, 1892.

**) Vedi anche a proposito di questo postulato A: Il continuo rettilineo e l' assioma V d' Archimede. Atti della R. Acc. dei Lincei, 1890 — Elementi di Geometria in collaborazione col prof. Gazzaniga del R. Liceo di Padova, parte I litografata, Drucker ed. Padova, 1895. — Osservazioni sui principî della geometria. Atti della R. Acc. di Padova, 1894. — Tullio Levi-Civita: Sugli infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici. Atti del R. Istituto Veneto, 1893.

Nei tre primi lavori è posta la questione del postulato d' Archimede, e quindi quella dell' infinitesimo attuale, in modo diverso che ne' miei *Fondamenti;* e sotto un' altra forma si può mettere partendo dalla rappresentazione numerica dei punti della retta secondo i concetti di Klein. Vedi anche Burkhardt: Nachr. der kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1895. Heft I. Le ip. IV e VII e il principio dell' ip. III dell' introduzione dei miei *Fondamenti* sostituiscono il detto postulato nella teoria degli infiniti e infinitesimi e servono a costruirli. Nella memoria delDr. Levi-Civita la trattazione si svolge con metodo puramente analitico e in modo diverso.

***) Veggansi anche le lettere del sigr. Cantor pubblicate nel fascicolo di agosto di quest' anno della Rivista di Matematica, e delle quali venni recentemente per caso a conoscenza.

†) Ib. pag. 108.

che nell' appendice del libro mi limitai ad accennare a quelle critiche ed a dichiarare che la teoria di Fontenelle non è da confondersi colla mia.*). Di questa mia dichiarazione il sigr. C. non ha tenuto conto. Inoltre egli asserisce che „*Hauptursache*" degli errori del mio libro è nientemeno che una definizione (come arbitrariamente la chiama) dell' eguaglianza di due numeri. Lasciando a lui di provare queste sue affermazioni, riservandomi a mia volta di provare il contrario; mi restringo frattanto a dimostrare che le osservazioni della critica del sigr. C. sulle mie proposizioni in essa citate non sono esatte.

I.

Dato il concetto di „einfach geordnete Menge $\mathfrak{M}$" per Ordnungstypus (od anche Ordnungszahl) $\overline{M}$, il sigr. Cantor intende (l. c.) „den Allgemeinbegriff, welcher sich aus $\mathfrak{M}$ ergiebt, wenn wir nur von der Beschaffenheit der Elemente abstrahiren, die Rangordnung unter ihnen aber beibehalten." Chiama „ähnliche" due „geordnete Mengen" $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{N}$ quando, come io dico, si corrispondono univocamente nel medesimo ordine, e scrive $\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{N}$. Da ciò, egli dice, risulta l'eguaglianza $\overline{M} = \overline{N}$ (1), e inversamente. *Questa eguaglianza è dimostrata anche nei miei Fondamenti***). Il sigr. C. afferma invece che non ho tenuto conto della necessità del criterio di eguaglianza (1). A giustificazione di queste sue parole soggiunge:

1) A pag. 30 (dei miei Fondamenti, t) viene definita l' „Anzahl oder Zahl einer geordneten Gruppe ganz in Uebereinstimmung mit dem, was wir Ordnungstypus einer einfach geordneten Menge genannt haben, erklärt"***).

2) „Dem Kriterium der Gleichheit vermeint aber Herr V. einen Zusatz geben zu müssen. Er sagt pag. 31: „Zahlen deren Einheiten sich eindeutig und in derselben Ordnung entsprechen und *von denen die eine nicht ein Theil der andern oder ein Theil der andern gleich ist*, sind gleich.

Diese *Definition* der Gleichheit enthält einen Cirkel.

Es setzt also seine Definition der Gleichheit (abgesehen von ihrer Willkürlichkeit) *eine Definition der Gleichheit voraus, die wiederum eine Definition der Gleichheit voraussetzt etc. in infinitum.*

---

*) Appendice (i, pag. 620; t, pag. 698).

**) Oss. II, nr (o §§.) 45.

***) Nell' edizione italiana è detto soltanto numero, intendendo in questo caso „Anzahl" (i, nota 2, pag. 29). Può darsi che non sempre io abbia reso con chiarezza i miei concetti e che ancora qualche svista sia rimasta, ed io sarò grato a quegli studiosi che vorranno cortesemente farmene avvertito.

Ed è questa secondo il sigr. C. l' „Hauptursache" degli errori della mia teoria sugli infiniti e infinitesimi. *L' errore del sigr. C. è doppio,* anzi tutto perchè fossero anche vere le sue osservazioni, come già dissi, esse non avrebbero alcuna influenza sulla mia teoria dei segmenti infiniti e infinitesimi, dalla quale ho dedotto le regole dei numeri che li rappresentano; in secondo luogo perchè le sue osservazioni non sono in sostanza esatte.

1) Invero la mia definizione di numero accennata dal sigr. C. secondo la def. I, 38 ivi citata *non è la stessa del suo Ordnungstypus,* come egli afferma. I contrassegni (Merkmale) delle forme matematiche astratte sono nel mio libro le relazioni di tutto e parte, di ordine e di posizione, mediante le quali si paragonano fra loro. E nella def. I, 38 stessa è stabilito una volta per sempre, quando non sia detto diversamente, che nelle forme si considerano tutti questi contrassegni. Le forme sono dunque assoggettate a priori al principio che il tutto non è eguale alla parte; il quale principio (nè il suo contraddittorio) non può essere dimostrato per alcune forme, ad es. pei segmenti rettilinei, senza essere surrogato da un principio equivalente*). Dalla corrispondenza univoca e del medesimo ordine dei punti di due segmenti non si deduce che essi siano eguali. Ora, nella mia definizione citata di numero (Anzahl) avendo escluso soltanto la relazione di posizione fra gli elementi di un gruppo ordinato, considerati ciascuno come *uno,* è chiaro che oltre la relazione d' ordine non ho escluso neppure quella di tutto e di parte. Se si esclude questa relazione, si ha appunto l' *Ordnungstypus*, come escludendo anche l'ordine si ha il *Cardinalzahl* o la *Mächtigkeit* (potenza) del sigr. Cantor. Tutto sta a vedere se anche tenendo conto della relazione di tutto e parte si possano stabilire gli ordinari criteri di eguaglianza, di maggiore e di minore. Ora questi criteri si possono appunto stabilire pei miei segmenti limitati finiti, infiniti e infinitesimi, e quindi pei numeri che servono ad indicarli rispetto ad un' origine e ad un segmento dato preso come unità fondamentale.

2) Per quanto riguarda la seconda osservazione del sigr. C. dirò che la proposizione c) del nr (o §§) 45 sopra citata *non è una definizione,*

---

*) Nello studio della forma fondamentale (e quindi anche della teoria in discorso), che è scopo principale dell' introduzione, e in quello della geometria basta ammettere il detto principio pei soli segmenti. Invece di questo principio si può ammettere che nella forma fondamentale a cominciare da un dato elemento in un dato verso esista un solo segmento eguale ad un altro qualunque dato nel verso considerato, da cui appunto colle altre proprietà del sistema omogeneo (def. I, 68) date le definizioni dei segni $>$ e $<$ si ricava che fra due segmenti esiste una ed una sola delle tre relazioni $=$, $>$, $<$ che soddisfano alle regole ordinarie. (Veggansi i miei citati Elementi di Geometria pag. 16—17).

come egli asserisce, ma bensì una *conseguenza* della definizione di numero e delle cose esposte nel cap. I sull' eguaglianza. Il concetto dell' eguaglianza si svolge nel mio libro partendo dai primi principî logici che regolano il paragonare le cose fra loro, dai quali discendono subito le regole dei segni $=$ e $\neq$. Secondo la mia definizione di eguaglianza assoluta di due cose qualunque (nr. 9), esse sono eguali assolutamente o eguali, quando lo sono rispetto a tutti i contrassegni che di esse si considerano; mentre sono eguali relativamente o equivalenti quando sono eguali rispetto ad alcuni ma non a tutti i loro contrassegni. S'intende che tanto l' eguaglianza assoluta quanto quella relativa deve soddisfare i principî stabiliti al nr. 8.

La proposizione citata dal sigr. C. è nel mio libro letteralmente incompleta, ma da ciò che segue subito si comprende che dicendo l' uno non è parte o eguale ad una parte dell' altro, intendo dire che il gruppo ordinato (da cui deriva uno dei numeri) non è parte o eguale ad una parte del gruppo dell' altro, ammettendo che sia già stabilita in altro modo l' eguaglianza dei gruppi.

Si potrebbe dire, considerando superficialmente la definizione di eguaglianza assoluta e relativa che vi è una petizione di principio, perchè da che cosa è data a sua volta l' eguaglianza dei contrassegni? Ebbene questa deve essere ammessa senz' altro supponendo sempre che essa soddisfi ai principî già stabiliti. Così per utilizzare la definizione dell' eguaglianza ho stabilito (oss I, 71) che le forme considerate siano costruibili mediante una forma fondamentale data, sulla quale è ammessa l' esistenza di segmenti limitati eguali senza che un segmento sia eguale ad una sua parte*).

Come si vede, *la mia definizione dell' eguaglianza non ha poi nulla di arbitrario.* Tutti i concetti fondamentali dell' opera mia sono analizzati non già mediante regole stabilite a capriccio, ma facendoli scaturire man mano dalle leggi semplici del pensiero logico.

---

*) Quando due figure sono eguali si dimostra nel mio libro che si può stabilire una corrispondenza univoca fra i loro punti in modo che le figure corrispondenti (e quindi anche i segmenti rettilinei) che vi fanno parte sono ordinatamente eguali. E reciprocamente, quando si può stabilire fra due figure la detta corrispondenza fra i loro punti e i segmenti rettilinei da essi determinati, esse sono eguali. Ma anche dando una tale proposizione come definizione (come feci nei miei citati Elementi pag. 42—44), tale definizione non contiene alcuna petizione di principio, e si dimostra poi che soddisfa ai principî già stabiliti ed è sufficiente per stabilire l' eguaglianza delle figure rispetto a tutti i contrassegni che di esse si considerano. L' idea del movimento *senza deformazione* resta così affatto esclusa, e trova nel concetto di eguaglianza così definito e nelle proprietà degli enti geometrici il suo vero fondamento. Essa serve solo per costruire praticamente e approssimativamente oggetti eguali.

Aggiungo ancora che il sigr. Dr. Levi-Civita costruì un sistema di numeri coi soli numeri ordinari, senza ipotesi, i quali corrispondono in parte ai miei numeri infiniti e infinitesimi. Questo sistema è meno esteso perchè è limitato ai soli numeri finiti, infiniti e infinitesimi d' ordine finito, mentre fra questi numeri è più completo. Basta leggere le prime pagine del lavoro interessante del Dr. Levi-Civita per persuadersi che i concetti di $=$, $>$ e $<$ fra questi numeri soddisfano alle regole ordinarie di questi segni, in guisa che essi formano „eine einfach geordnete Menge" che non è punto rappresentabile coi numeri transfiniti di G. Cantor. Presi ad es i due *monosemii* 1, 1_1 del sigr. Levi-Civita (corrispondenti ai miei numeri 1 e ∞_1) si vede che fra 1 e 1_1 sono compresi i numeri:

$$2, 3, \ldots, n, \ldots (1_1 - n), \ldots (1_1 - 1)$$

pei quali è ad es. $(1_1 - n) < 1_1$, mentre i numeri $\omega - n$ e ω di Cantor sono eguali, indicano cioè lo stesso elemento nella serie dei numeri transfiniti di questo autore. Io stabilisco per convenzione (def. I, 83) che l' intervallo $(1 \ldots 1_1)$ contiene 1_1 unità 1; in altre parole che 1_1 è il numero degli elementi $1\, 2 \ldots 1_1$, considerati nell' ordine dato. In tal caso il numero che spetta ad es. al gruppo

$$1\, 2\, 3 \ldots (1_1 - n)$$

non è eguale a quello del gruppo ordinato

$$1\, 2\, 3 \ldots (1_1 - n) \ldots 1_1,$$

pure potendosi stabilire una corrispondenza univoca e del medesimo ordine fra i loro elementi.

Non nego che secondo il concetto aritmetico col quale a un gruppo dato di unità se ne aggiunge un' altra e cosi via, considerando la serie dei numeri naturali come un gruppo già dato di elementi (*uni*), si presentano spontaneamente i numeri di Cantor; ma secondo il concetto geometrico della retta si presentano invece spontaneamente i miei segmenti infiniti, e quindi i numeri che il rappresentano, quando si faccia astrazione, come si può, dall' ass. V d' Archimede.

II.

Il sigr. C. cita anche con elogio la critica del sigr. Killing. Le pagine qui citate si riferiscono alla nota del sigr. K.

1) Anzitutto questa critica contiene delle osservazioni di senso non etbene determinato e quindi non posso rispondere ad esse. Non è chiaro ad es. su che cosa egli appoggi i suoi dubbi contro la mia ip. V che per me è semplicissima, nè contro la mia definizione di sistema astratto ad n dimensioni, la quale nulla ha di comune colla teoria

degli infiniti e infinitesimi; nè è chiaro finalmente che cosa intenda per *Zusammenhang* che egli vorrebbe esistesse fra le scale generate ciascuna con una data unità intorno agli elementi della forma fondamentale, sebbene io sappia che cosa significhi per me quella parola. Mi limiterò dunque alle altre osservazioni.

2) a pag. 3 è detto che un „gruppo ordinato" (s' intende secondo il mio libro) è costituito da due campi di scala generati con una unità a partire da un elemento come origine nelle due direzioni della forma fondamentale. *Ciò non è esatto*, perchè io intendo per gruppo ordinato anche tutta la forma fondamentale e quindi anche delle serie o gruppi ordinati limitati e illimitati che contengono delle parti limitate (nel senso da me definito al cap. I) che contengono delle serie illimitate. Il gruppo ordinato di segmenti eguali all' unità delle due scale considerate dal sigr. K. è illimitato di 1ª specie.

3) Sembra che la mia ip. III, dal modo con cui è citata a pag. 4, consideri dei gruppi ordinati staccati, mentre essa afferma che la forma fondamentale considerata dapprima come data è tale che costruita in un dato verso una scala di data unità a cominciare da un elemento come origine, esiste nel verso dato un elemento almeno fuori di essa scala. Del resto nella nota a pag. 129 ho dato una rappresentazione sulla retta dei campi di due scale successive di data unità (non già di tutta la forma fondamentale) ove l' ordine può essere stabilito ad es. mediante un fascio di raggi partendo dal raggio che passa per l'origine della prima scala nel verso dell' indice dell' orologio. E nella nota a pag. 184 ho dato un' altra rappresentazione geometrica in cui l' ordine dei gruppi considerati è pure pienamente stabilito dalle ordinarie definizioni di direzione di due rette o meglio di raggi paralleli.

4) A pag. 4—5 il sigr. K. trova nella mia ip. VIII un „*infinitamente piccolo*" che è invece un *indefinitamente piccolo* (unbegrenzt klein); nè ciò è una semplice svista di trascrizione. Infatti a pag. 9 egli dice che l' ip. VI (che afferma la continuità relativa, cioè in un campo nel quale fra i segmenti vale la citata proposizione d' Archimede) e l' ip. VIII *sono molto oscure perchè nella prima il segmento variabile diventa „unbegrenzt klein"* e nella seconda „*unendlich klein*" in senso assoluto!

Egli aggiunge che „die Art der Veränderung noch gar nicht bestimmt ist, wofern es nicht möglich ist, ein Gesetz aufzustellen, nach der die Veränderung erfolgen soll, mentre per la variazione del segmento considerato nelle ip. VI e VIII basta che esso diventi indefinitamente piccolo, vale a dire per le premesse definizioni che diventi e rimanga da un suo stato più piccolo di ogni segmento dato piccolo a piacere, finito nell' ip. VI e infinitesimo nella ip. VIII,

come può accadere, senza che sia necessario per le conseguenze dedotte nel mio libro di stabilire una legge particolare di variazione*).

Il sigr. K. osserva che una tal legge poteva darla il sigr. Dedekind nell' introduzione dei numeri irrazionali, perchè aveva a disposizione i numeri razionali, mentre a me manca tale possibilità perchè io mi servo dell' ip. VI per dimostrare la divisibilità di un segmento in n parti eguali. Ciò non riguarda propriamente la legge di variazione, bensì la giustificazione dell' ipotesi; ma a questa ho accennato dopo la dimostrazione della divisibilità di un segmento in n parti eguali mediante il sistema di numeri razionali già stabilito (i, 138 e t, 154). Ma si può giustificare l' ip. VI (e così l' ip. VIII) senza ricorrere ai numeri, considerando le serie di segmenti determinati da un segmento variabile nel senso dell' ip. VI come nuovi elementi. Introducendo il concetto di identità di questi elementi, quello di segmento di due di essi, dell' eguaglianza e diseguaglianza fra i nuovi segmenti (che sono determinati dai vecchi quando i loro estremi sono individuati da due degli elementi primitivi) si fa vedere che i nuovi elementi soddisfano nel campo dell' ip. VI (o dell' ip. VIII) alle ipotesi precedenti, e valgono per essi le conseguenze dedotte da esse e dall' ip. VI (o VIII), la quale viene così sostituita da opportune definizioni. In questo modo si potrebbe evitare astrattamente il postulato della continuità.

E qui cade in acconcio di fare osservare che se nel libro io feci uso di ipotesi, le ho però giustificate secondo un ordine naturale di idee. Le ip. III e IV sono giustificate con una rappresentazione geometrica, la ip. V ha la sua giustificazione nel principio dell' ip. III applicato al campo dato dell' ip. IV; le ip. VI e VIII si giustificano nel modo anzidetto, e finalmente l' ip. VII trova la sua compatibilità nell' eguaglianza della costituzione dei segmenti, come si ammette astrattamente per tutti i segmenti ordinari.

D' altronde il gruppo *semplicemente ordinato* formato da quei numeri del Dr. Levi-Civita, costruiti senza ipotesi coi numeri reali ordinari che corrispondono ai miei, soddisfa alle proposizioni contenute nelle mie ipotesi tranne la V. Ciò costituisce, ove se ne senta il bisogno, una conferma analitica della validità di esse.

5) A pag. 5 il sigr. K. dice „Herr Veronese betrachtet die Grundform nur für sich, niemals aber ihre Lage im Raume". *Ma anche ciò non è vero*. Nel libro I, § 10 e segu. io considero appunto come elemento dello spazio la retta assoluta, che rappresenta la forma fondamentale, limitata ai campi finito, infiniti e infinitesimi d' ordine finito, perchè per le considerazioni geometriche svolte nei miei *Fondamenti* basta limitarsi a questi campi.

---

*) Veggansi anche i citati Elementi di Geom. pag. 29 e segu.

6) A pag. 6 per provare che sono giustificati i dubbî sulle mie ipotesi, il sigr. K. dice: „So wird in § 99, f (i, 144, t. 159) getadelt, dass vielfach die Behauptung $(AB) \equiv (BA)$ als Axiom hingestellt werde, während sie sich aus allgemeinen Grössensätzen ergebe.“ Ma questo egli aggiunge: „kann nicht aus allgemeinen Grössensätzen folgen“.

Ed anche questo è errato. Invero nella nota a pag. 144 dell' originale (opp. t, 159) *non ho detto affatto che la proposizione* 99, g (e non f) *derivi aus allgemeinen Grössensätzen;* ne ho inteso biasimare l' uso di quel postulato in generale, poichè evidentemente (come ho detto nella prefazione del libro) non vi è un solo sistema possibile di assiomi; ma espressamente ho parlato di quei trattati di geometria, o di altre memorie, nei quali si fa uso dei postulati da me usati nella dimostrazione di quella proposizione, e per chiarire meglio il mio concetto ho citato gli Elementi di Geometria di De Paolis accennando da quali postulati di questo autore si deduca la proposizione $(AB) \equiv (BA)$, che è pure ammessa da De Paolis con un postulato tanto pei segmenti rettilinei quanto per gli angoli*).

7) A pag. 7 egli dice che se la teoria dei numeri transfiniti di Cantor è esatta „so darf Herr V. nicht, wie er es thut, einen Gegensatz zwischen beiden Theorien postuliren, namentlich dürfen beide nicht zu entgegengesetzten Folgerungen führen, wie das hier der Fall ist, denn nach Herrn Cantor's Ansicht leiden die actual unendlich kleinen Grössen an einem inneren Widerspruch“. Di ciò ho parlato precedentemente; le due teorie sono per sè esatte; ma l' „Ansicht“ del sigr. Cantor non è esatta, eccetto che non si ammetta per la retta un postulato che escluda a priori l' infinitesimo attuale. Ho fatto già vedere nell' appendice che se invece di scegliere il mio postulato sulla continuità della retta si assume quello di Dedekind, allora non c' è bisogno di ricorrere ai numeri transfiniti di Cantor per dimostrare la proposizione di Archimede.

8) Alla fine della sua nota (pag. 10—11) il sigr. K. parla della rappresentazione da me data dei segmenti finiti e infiniti di 1^0 ordine (esclusi però gli infinitesimi). Sembra a lui che mi siano sfuggiti i gravi dubbi che si oppongono a tale rappresentazione, perchè è stato dimostrato che „zwei Mannigfaltigkeiten nur dann in eindeutiger und stetiger Weise auf einander abbilden kann, wofern sie von derselben Zahl von Dimensionen sind.“ L' appendice del mio libro dimostra che una tale proprietà mi era nota. Ma a giustificazione delle sue parole il sigr. K. aggiunge: „Die Theorie des Herrn V. beruht aber darauf,

*) Nei miei Elementi di Geometria per ragioni didattiche l' ho data anch' io per i segmenti con un postulato.

dass man ein Raumgebilde von beliebigen vielen Dimensionen auf ein dimensionales Gebilde eindeutig und stetig abbilden kann." *Ed anche questo non è vero*, perchè vi è la corrispondenza univoca, non la continuità. Ma se anche vi fosse la continuità, ciò non proverebbe ancora nulla contro la mia teoria, perchè il teorema sopra citato fu dimostrato per le sole varietà ordinarie dalle quali sono esclusi gli infiniti e gli infinitesimi.

Padova, novembre 1885.

Sur la formule sommatoire d'Euler,

par

J. Franel à Zurich.

1.

En cherchant à mettre la différence entre la somme $\sum_{r=0}^{r=h} F(r)$ et l'intégrale définie $\int_0^h F(x)\,dx$ sous une forme commode pour la discussion nous avons été conduit à une formule remarquable par sa concision et d'où l'on tire aisément une démonstration de la formule sommatoire d'Euler ou de Maclaurin. Bien que la formule en question soit un corollaire de la théorie des séries trigonométriques on voudra bien nous permettre de l'exposer en raison de sa démonstration simple et de son utilité.

Introduisons, à cet effet, la fonction périodique

$$f(x) = E(x) - x + \tfrac{1}{2},$$

où $E(x)$ désigne, comme d'habitude, le plus grand nombre entier contenu dans la quantité x, puis envisageons l'intégrale

$$J = \int_0^h f(x) \,.\, F'(x)\,dx,$$

$F(x)$ ainsi que sa dérivée $F'(x)$ étant des fonctions uniformes et continues dans l'intervalle d'intégration; on suppose que la limite supérieure de l'intégrale est un nombre entier positif quelconque.

On peut mettre J sous la forme

$$J = \sum_{r=0}^{r=h-1} \int_r^{r+1} f(x)\,F'(x)\,dx = \sum_{r=0}^{r=h-1} \int_r^{r+1} \left(r - x + \tfrac{1}{2}\right) F'(x)\,dx,$$

d'où

$$J = \sum_{r=0}^{r=h-1} \left(r+\tfrac{1}{2}\right)[F(r+1) - F(r)] - \int_0^h x\,F'(x)\,dx,$$

$$= -\sum_{r=0}^{r=h-1} F(r) + \tfrac{1}{2}F(0) + \left(h+\tfrac{1}{2}\right)F(h) - \int_0^h x\,F'(x)\,dx.$$

Mais

$$\int_0^h x\,F'(x)\,dx = h\,F(h) - \int_0^h F(x)\,dx,$$

de sorte qu'il vient finalement

$$J = -\sum_{r=0}^{r=h} F(r) + \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx,$$

c'est-à-dire

$$(1)\qquad \sum_{r=0}^{r=h} F(r) = \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx - \int_0^h f(x)\,F'(x)\,dx;$$

Telle est la formule que nous voulions établir et qui permet dans un grand nombre de cas de décider de la convergenze ou de la divergence d'une série à termes quelconques.

2.

Remplaçons dans le second membre de la formule (1) $f(x)$ par son développement en série trigonométrique. On sait qu'on a pour toutes les valeurs d'x, à l'exclusion des valeurs entières,

$$(2)\qquad f(x) = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{\sin 2m\pi x}{m\pi},$$

et que cette serie converge uniformément dans l'intervalle

$$(r+\delta,\ r+1-\delta),$$

r étant un nombre entier et δ une quantité positive aussi petite d'ailleurs qu'on le voudra*).

C'est ce qu'on peut établir directement et sans rien emprunter à la théorie des séries de Fourier de la manière suivante:

On a tout d'abord, comme on le vérifie facilement en effectuant l'intégration,

$$(3)\qquad 2\pi i\,f(x) = \int_0^1 \left[\frac{1}{t-e^{2\pi i x}} - \frac{1}{t-e^{-2\pi i x}}\right] dt,$$

*) Voir Picard, Traitè d'analyse. tome I, page 239.

d'où l'on tire en appliquant l'identité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^{n-1} + \frac{x^n}{1-x},$$

$$f(x) = \frac{\sin 2\pi x}{\pi} + \frac{\sin 4\pi x}{2\pi} + \cdots + \frac{\sin 2\nu\pi x}{n\pi} + R_n,$$

en faisant

$$R_n = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 t^n\,dt\left[\frac{e^{2\pi(n+1)ix}}{1-t\,e^{2\pi ix}} - \frac{e^{-2\pi(n+1)ix}}{1-xe^{-2\pi ix}}\right],$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{t^n\,dt}{1-2t\cos 2\pi x+t^2}\left[\sin 2\pi(n+1)x - t\sin 2n\pi x\right].$$

Pour démontrer la convergence uniforme de la série dans l'intervalle $(\delta,\ 1-\delta)$, où δ est positif mais aussi petit qu'on le veut, nous décomposerons cet intervalle en trois au-moyen des deux quantités $\frac{1}{2}-h$, $\frac{1}{2}+h$, h étant positif mais inférieur à $\frac{1}{4}\cdot$ Supposons d'abord x dans l'intervalle milieu et faisons $x=\frac{1}{2}+\varepsilon$; il viendra

$$\pi R_n = (-1)^{n+1}\sin 2\pi(n+1)\varepsilon\int_0^1\frac{t^n\,dt}{1+2t\cos 2\pi\varepsilon+t^2}$$

$$+ (-1)^{n+1}\sin 2\pi n\varepsilon\int_0^1\frac{t^{n+1}\,dt}{1+2t\cos 2\pi\varepsilon+t^2}.$$

Or h étant $<\frac{1}{4}$ et, par-suite $2\pi h<\frac{\pi}{2}$ on aura, puisque $|\varepsilon|<h$

$$\cos 2\pi\varepsilon > \cos 2\pi h > 0.$$

Le trinôme $1+2t\cos 2\pi\varepsilon+t^2$ est donc constamment supérieur à t^2 dans l'intervalle d'intégration d'où résulte immédiatement

$$\pi\,|R_n| < \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}.$$

pour toutes les valeurs d'x comprises entre

$$\frac{1}{2}-h \quad\text{et}\quad \frac{1}{2}+h.$$

D'autre part le minimum du trinôme $1-2t\cos 2\pi x+t^2$ étant égal à $\sin^2 2\pi x$ on aura certainement

$$|R_n| < \frac{1}{\pi\sin^2 2\pi x}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right)$$

et, par conséquent, pour toutes les valeurs d'x appartenant à l'intervalle $\left(\delta,\ \frac{1}{2}-h\right)$ ou à l'intervalle $\left(\frac{1}{2}+h,\ 1-\delta\right)$

$$|R_n| < \frac{1}{\pi \sin^2 2\pi g}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right),$$

g désignant la plus petite des deux quantités δ et h. La série

$$\sum_1^\infty \frac{\sin 2m\pi x}{m\pi}$$

converge donc bien uniformément dans l'intervalle $(\delta, 1-\delta)$ quelque petite que soit la quantité positive δ et, à cause de sa périodicité, dans tout intervalle $(r+\delta, r+1-\delta)$ où r est un nombre entier.

Pour obtenir une limite supérieure de R_n valable dans tout l'intervalle $(0, \delta)$ nous partirons de l'équation

$$\cos 2\pi x + \cos 4\pi x + \cdots + \cos 2n\pi x = -\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2\sin \pi x}$$

d'où l'on tire

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{\sin 2r\pi x}{r\pi} = -x + \int_0^x \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx$$

$$= -x + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx - \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx$$

$$= -x + \frac{1}{2} - \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx.$$

Or, x étant supposé inférieur à $\frac{1}{2}$, $f(x)$ se réduit à $\frac{1}{2} - x$ d'où

$$R_n = \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\sin \pi x}\,dx = \int_x^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{\pi x} \cdot \frac{\pi x}{\sin \pi x}\,dx.$$

Le quotient $\frac{\pi x}{\sin \pi x}$ est inférieur à $\frac{\pi}{2}$ de sorte que

$$|R_n| < \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{2x}\right).$$

Remplaçons maintenant dans l'intégrale

$$J = \int_0^h f(x)\,F'(x)\,dx$$

$f(x)$ par son développement

$$\frac{\sin 2\pi x}{\pi} + \cdots + \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} + R_n.$$

On verra sans peine que l'intégrale

$$J_n = \int_0^h R_n . F'(x)\, dx$$

tend vers 0 quand n augmente indéfiniment.

En effet

$$J_n = \sum_{r=0}^{r=h-1} \left[\int_r^{r+\delta} R_n . F'(x)\, dx + \int_{r+\delta}^{r+1-\delta} R_n . F'(x)\, dx + \int_{r+1-\delta}^{r+1} R_n . F'(x)\, dx \right]$$

or

$$\int_r^{r+\delta} R_n(x)\, F'(x)\, dx = \int_0^{\delta} R_n(x)\, F'(x+r)\, dx$$

est, en valeur absolue,

$$< \frac{M}{2} \int_0^{\delta} \log\left(\frac{1}{2x}\right) dx,$$

M désignant le maximum de $|F'(x+r)|$ entre 0 et δ. Cette intégrale est donc infiniment petite en même temps que δ; il en est de même évidemment de l'intégrale

$$\int_{r+1-\delta}^{r+1} R_n(x)\, F'(x)\, dx = -\int_0^{\delta} R_n(x)\, F'(r+1-x)\, dx.$$

Enfin dans l'intégrale

$$\int_{r+\delta}^{r+1-\delta} R_n(x) . F'(x)\, dx$$

le facteur $R_n(x)$ peut, comme on l'a vu, être rendu plus petit que toute quantité donnée d'avance et cela pour toutes les valeurs d'x comprises entre $r+\delta$ et $r+1-\delta$, en prenant n suffisament grand. Par conséquent, après avoir choisi une quantité positive ε, aussi petite qu'on le voudra, on pourra choisir δ assez petit et ensuite N assez grand pour que $|J_n|$ soit $< \varepsilon$ dès que $n > N$.

Il en résulte que dans l'intégrale J on peut remplacer $f(x)$ par son développement

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin 2m\pi x}{m\pi}$$

puis intégrer terme à terme, de sorte que la formule (1) peut s'écrire

$$(4)\qquad \sum_{r=0}^{r=h} F(r) = \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx - \sum_{m=1}^{\infty}\int_0^h \frac{\sin 2m\pi x}{m\pi}\cdot F'(x)\,dx$$

ou encore

$$(5)\qquad \sum_{r=0}^{r=h} F(r) = \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx + 2\sum_{m=1}^{\infty}\int_0^h \cos 2m\pi x\,.\,F(x)\,dx,$$

équation qui est un corollaire de la théorie des séries trigonométriques*).

3.

En appliquant plusieurs fois successivement l'intégration par parties on obtient**)

$$\int_0^h \frac{\sin 2m\pi x}{m\pi}F'(x)\,dx = \sum_{i=1}^{i=r}\left(F^{(2i-1)}(h) - F^{(2i-1)}(0)\right)\frac{(-1)^i\,.\,2}{(2m\pi)^{2i}} + (-1)^{r-1}\int_0^h F^{(2r)}(x)\cdot\frac{2\cos 2m\pi x}{(2m\pi)^{2r}}\,dx$$

d'où résulte

$$(6)\qquad \sum_{n=0}^{n=h} F(n) = \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx + \sum_{i=1}^{i=r}(-1)^i\left[F^{(2i-1)}(0) - F^{(2i-1)}(h)\right]\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2}{(2m\pi)^{2i}} + (-1)^r\int_0^h F^{(2r)}(x)\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{2\cos 2m\pi x}{(2m\pi)^{2r}}\cdot dx.$$

*) Voir, par-exemple, Vorlesungen über Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind, 1er supplément, page 288. Quand on établit la formule (5) de cette manière il n'est pas nécessaire de supposer que la fonction $F(x)$ a une dérivée.

**) On suppose naturellement que la fonction considérée $F(x)$ admet des dérivées des $2r$ premiers ordres uniformes et continues dans l'intervalle $(0, h)$.

C'est la formule d'Euler telle qu'elle a été obtenue par Poisson dans son mémoire, sur le calcul des intégrales définies lu à l'Académie des sciences de Paris dans sa séance du 11. décembre 1826*)

En introduisant les nombres B_i et les fonctions $\varphi(x, n)$ de Bernouilli définis respectivement par les équations

$$\frac{B_i}{1.2.3\ldots 2i} = 2\sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{1}{(2m\pi)^{2i}},$$

$$v \cdot \frac{e^{xv}-1}{e^v-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{v^n}{1.2\ldots n}\,\varphi(x, n)$$

et en remarquant que la somme de la série

$$(-1)^r \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{2\cos 2m\pi x}{(2m\pi)^{2r}}$$

est égale à

$$(-1)^r \frac{B_r}{1.2\ldots(2r)} - \frac{\varphi(x, 2r)}{1.2\ldots(2r)},$$

pour les valeurs d'x comprises entre 0 et 1**), il viendra

$$\sum_{n=0}^{n=h} F(n) = \tfrac{1}{2}F(0) + \tfrac{1}{2}F(h) + \int_0^h F(x)\,dx$$

$$+ \sum_{i=0}^{i=r-1} \frac{(-1)^i B_i}{1.2\ldots(2i)} \left[F^{(2i-1)}(0) - F^{(2i-1)}(h)\right]$$

$$- \frac{1}{1.2\ldots(2r)} \int_0^h \varphi(x, 2r)\,dx \sum_{k=0}^{k=h-1} F^{(2r)}(x+k).$$

En appliquant cette formule à la fonction

$$F(x) = \varphi(a + qx)$$

où a et q sont des constantes et en faisant, pour abréger,

$$a + qh = b,$$

on obtient

---

*) Voir Kronecker, Vorlesungen über Mathematik, erster Band, herausg. von Herrn Netto, pag. 153.

**) Voir, par-exemple, Schlömilch's Compendium der höheren Analysis; zweiter Band, dritte Auflage, pag. 221.

$$(7)\quad q\sum_{n=0}^{n=h}\varphi(a+qn)=\frac{1}{2}\varphi(a)+\frac{1}{2}\varphi(b)+\int_a^b\varphi(x)\,dx$$
$$+\sum_{i=0}^{i=r-1}\frac{(-1)^i B_i}{1\,.\,2\,\ldots\,(2i)}\,q^{2i}\left[\varphi^{(2i-1)}(a)-\varphi^{(2i-1)}(b)\right]$$
$$-\frac{q^{2r+1}}{1\,.\,2\ldots(2r)}\int_0^1 S_{2r}\,.\,\varphi(x,\,2r)\,dx$$

où

$$S_{2r}=\varphi^{(2r)}(a+qx)+\varphi^{(2r)}(a+q+qx)+\cdots+\varphi^{(2r)}\big(a+(h-1)q+q\,x\big).$$

Telle est la forme généralement employée de la formule sommatoire d'Euler ou de Maclaurin. Pour la discussion du reste nous renvoyons aux ouvrages cités plus haut de M. M. Schlömilch et Kronecker.

Zurich, septembre 1895.

Beitrag zur Theorie der rationalen Functionen.

Von

Emanuel Beke in Budapest.

Es ist wohlbekannt, wie man eine rationale Function der n Elemente

$$x_1, x_2, \ldots x_n \tag{1}$$

bildet, welche bei den Substitutionen einer gegebenen Gruppe G unverändert bleibt. — Man bildet zu diesem Zweck die Galois'sche Function, z. B.

$$V = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \tag{2}$$

welche so gewählt ist, dass sie mit jeder Substitution ihren Werth verändert. Dann wendet man die Substitutionen der Gruppe G auf (2) an, wodurch die Functionen:

$$V_1, \; V_2, \ldots V_r \tag{3}$$

hervorgebracht werden. — Nun behauptet man, dass im Allgemeinen die symmetrischen Functionen der (3) zur Gruppe G gehören. —

Wenn wir $n = 4$ annehmen, und G die bekannte Gruppe:

$$G = [1, (x_1 x_2), (x_3 x_4), (x_1 x_2)(x_3 x_4), (x_1 x_3)(x_2 x_4), (x_1 x_4)(x_2 x_2), (x_1 x_3 x_2 x_4), (x_1 x_4 x_3 x_2)] \tag{4}$$

ist, dann ist die einfachste symmetrische Function:

$$\sum_1^8 {}^i V_i = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \tag{5}$$

eine symmetrische Function der gegebenen Elemente, welche also *nicht zur Gruppe gehört.*

Herr Jordan weicht dieser Erscheinung dadurch aus, dass er immer die symmetrische Function:

$$(t - V_1)(t - V_2) \ldots (t - V_r) \tag{6}$$

benützt. Herr Netto*) erweitert die Function (2) durch α_0, und durch das Product:

$$V_1 \,.\, V_2 \ldots V_r \tag{7}$$

---

*) Netto: Substitutionentheorie p. 28. Acta Math. I, p. 371.

erhält man durch passende Wahl von α_0 ebenso, wie bei (6) durch die passende Wahl von t eine rationale Function, welche *wirklich* zur Gruppe G gehört. —

Es liegt die Frage nahe, wann die Erscheinung, welcher wir in (5) begegnen, im Allgemeinen eintritt, und wie hoch man den Exponenten k zu wählen hat, damit die Potenzsumme:

$$\sum_1^r V_i^k \tag{8}$$

wirklich zur Gruppe G gehören soll. Mit diesen Fragen will ich mich in den folgenden Zeilen beschäftigen.

1. Nehmen wir an, dass die Gruppe G intransitiv sei, und die Elemente:

$$x_1, x_2, \ldots x_m \tag{9}$$

mit einander transitiv verbindet. —

Dann ist, wie bekannt, in der Gruppe G keine Substitution vorhanden, welche ein Element der Reihe (9) in ein anderes Element, welches in dieser Reihe nicht vorhanden ist, überführen würde. — Hingegen giebt es dieselbe Anzahl von Substitutionen, welche ein gegebenes Element von (9) in ein beliebiges Element dieser Reihe überführen; denn, wenn g alle Substitutionen enthält, welche x_1 unverändert lassen, und σ_i eine Substitution bedeutet, welche x_1 in x_i überführt, dann enthält $\sigma_i g$ die sämmtlichen von einander verschiedenen Substitutionen, welche diese Ueberführung leisten. — Nehmen wir an, dass μ solche Substitutionen vorhanden sind, welche x_1 unverändert lassen, dann sind auch μ, von diesen und von einander verschiedene Substitutionen, welche x_1 in x_i und allgemein: x_i in x_k überführen, wenn x_i und x_k in der Reihe (9) enthalten sind. —

Wenden wir jetzt die Substitutionen von G auf (2) an, und bilden die Summe:

$$\sum_1^r V_h \tag{10}$$

dann ist der Coefficient von α_i:

$$\mu(x_1 + x_2 + \cdots + x_m).$$

Die Summe (10) ist:

$$\mu(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m)(x_1 + x_2 + \cdots + x_m) + \psi$$

wo ψ die Elemente (9) nicht mehr enthält. Die Function (10) ist also symmetrisch in den Elementen (9). Wir haben also das Resultat, dass, wenn die Gruppe G die Elemente

$$x_1, x_2, \ldots x_m$$

mit einander transitiv verbindet, dann ist die einfachste symmetrische Function:

$$\sum_1^r V_h$$

in diesen Elementen symmetrisch.

Wenn die Gruppe G sämmtliche Elemente (1) mit einander transitiv verbindet, d. h., wenn die Gruppe G transitiv ist, dann ist die Function (10) in allen Elementen symmetrisch. —

Aus dem Vorhergehenden ersehen wir also, dass die Function (10) im Allgemeinen *nicht* zur Gruppe gehört, sondern nur in dem besonderen Falle, wenn die Gruppe G die transitiv vorhandenen Elemente symmetrisch umsetzt. —

2. Nehmen wir jetzt an, dass die Gruppe G in den Elementen (9) k-fach transitiv sei; d. h. dass beliebige k Elemente aus (9) in beliebige andere k Elemente derselben Reihe übergeführt werden können. Dann ist hier auch die Anzahl der Substitutionen, welche eine beliebige Combination

(11) $$x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots x_{i_k}$$

aus der Reihe (9) in eine andere Combination

(12) $$x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots x_{h_k}$$

derselben Reihe überführt, constant. — Sei diese Zahl wieder μ.

Bilden wir jetzt die Potenzsumme:

(13) $$\sum_1^r{}^h V_h^e = \sum \frac{e!}{u!\,v!\,s!\ldots} \alpha_{h_1}^u \alpha_{h_2}^v \alpha_{h_3}^s \ldots x_{i_1}^u x_{i_2}^v x_{i_3}^s \ldots$$
$$(u+v+s+\cdots=e).$$

Wenn $e \leqq k$ ist, dann kommen in keinem Glied von (13) mehr als k Elemente der Reihe (9) vor. Hingegen kommt in μ Potenzen

$$V_h^e$$

als Coefficient von

$$\alpha_{h_1}^u \alpha_{h_2}^v \alpha_{h_3}^s \ldots$$

dasselbe Product:

$$x_{i_1}^u x_{i_2}^v x_{i_3}^s \ldots$$

vor, welches dann durch die k-fach transitive Gruppe G in eine jede Combination

$$x_{l_1}^u x_{l_2}^v x_{l_3}^s \ldots$$

übergeführt wird. Der Ausdruck von (13) reducirt sich also wieder auf eine symmetrische Function der Elemente (9). Wir haben also das allgemeinere Resultat, dass die Function:

$$\sum_1^r{}^h V_h^e$$

in den Elementen (9) symmetrisch ist, wenn diese Elemente durch die Gruppe G k-fach transitiv verbunden sind, und $e \leqq k$ gewählt ist. Wenn die Gruppe G in sämmtlichen Elementen k-fach transitiv ist, dann ist die Function (13) im Falle $e \leqq k$ überhaupt symmetrisch.

3. Endlich wollen wir die Frage beantworten, wie hoch die positive ganze Zahl e in (13) gewählt werden soll, dass in jedem Falle die Potenzsumme (13) zur Gruppe G gehören soll.

Es genügt zu diesem Zweck im Allgemeinen:

$$e = \frac{n(n+1)}{2} \tag{14}$$

zu wählen; denn in diesem Falle kommt in

$$V_1^e \tag{15}$$

ein Glied vor:

$$\frac{e!}{1!\,2!\ldots n!}\,\alpha_1\,\alpha_2^2\ldots\alpha_n^n\,x_1\,x_2^2\ldots x_n^n \tag{16}$$

und dieses Glied wird durch eine jede Substitution verändert. Wenn also auf (15) eine Substitution angewendet wird, welche nicht in G enthalten ist, dann tritt ein neues Glied ein, welches nicht in (13) enthalten war.

Der Ausdruck (13) bleibt also *nur* bei den Substitutionen von G unverändert, bei allen Anderen aber wird er der Form nach immer geändert, dem Werthe nach nur in den Fällen nicht, wenn zwischen den Elementen (1) gewisse Gleichungen bestehen, die aber durch Hinzufügung eines Factors zu den Elementen (1) — also in dem Falle, wo diese Elemente Wurzeln einer algebraischen Gleichung bilden, durch eine einfache lineare Transformation dieser Gleichung — hebbar sind.

Gödöllö, im August 1895.

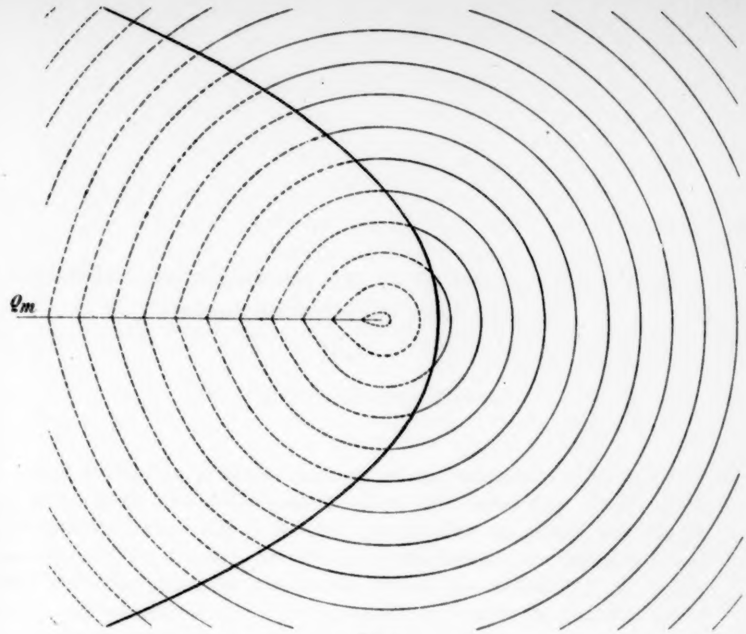


Fig. 1

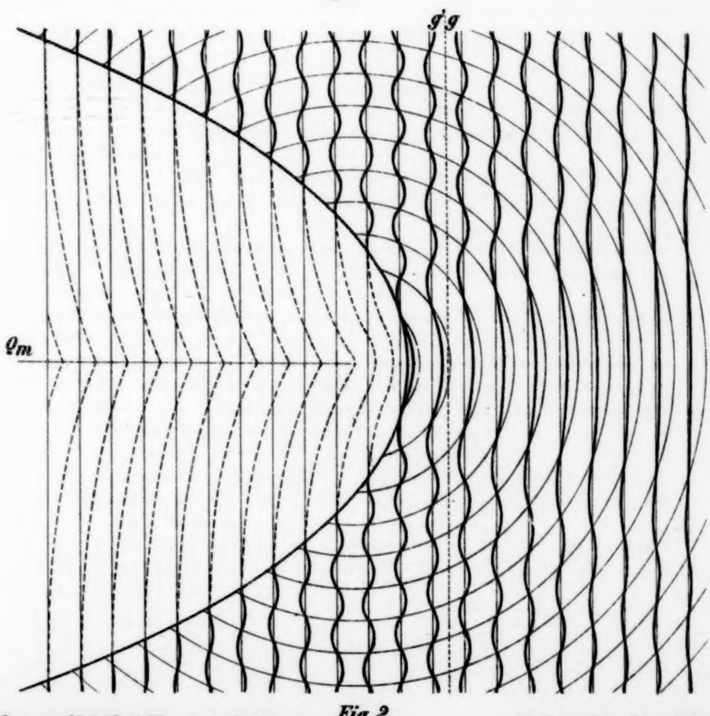


Fig. 2.

Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe.

Par

Mr. P. A. Nekrassoff à Moscou.

J'ai en vue de présenter dans cet article l'exposition des propriétés du mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. Je n'expose principalement que mes recherches personnelles en citant, aux places convenantes, les travaux des auteurs qui en parlent, car depuis peu il a paru beaucoup d'articles concernant ce cas de rotation*), qui, entre autre, est caractérisé par le mouvement du centre de gravité d'après les règles du pendule sphérique.

Ce cas de rotation d'un solide autour d'un point fixe a été examiné déjà par Mr. W. Hess dans les *Mathematische Annalen* (volume 37,

*) Nous citons ici le tableau de ces articles russes.

Mr. P. A. Nekrassoff: 1) „Au sujet du problème de la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe". (Recueil de mathématiques, t. XVI, 3ème livraison, 1892, Moscou).

2) „De la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe" (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. V, 1893, Moscou).

3) „Complément de l'article concernant la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe". (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. VI, 1893, Moscou).

4) „Recherches analytiques sur un cas de rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe". (Recueil de mathématiques, t. XVIII, 1895, Moscou).

Mr. N. E. Joukovsky: „Pendule loxodromique de Mr. Hess" (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. V, 1893, Moscou). Cet article est imprimé encore dans „Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung" (III. 1893, p. 62—70).

Mr. B. C. Mlodzeievsky et Mr. P. A. Nekrassoff: „Des conditions de l'existence des mouvements asymptotiques périodiques dans le problème de Hess" (Mémoires de la section physique de la société impériale des Amis des sciences naturelles, t. VI, 1893, Moscou).

Mr. J. A. Tchapliguin: „Au sujet du pendule loxodromique de Mr. Hess" (Mémoires de la section physique de la société Impériale des Amis des sciences naturelles, t. VII, 1894, Moscou).

page 178—180). Dans l'ouvrage de Mr. Hess beaucoup de propriétés de ce mouvement sont restées inexpliquées; principalement celles qui dépendent des particularités de l'équation plus compliquée de ce problème. Je suis parvenu à réduire l'intégration de cette dernière à celle de l'équation linéaire du deuxième ordre à coefficients uniformes doublement périodiques complexes. Par ce moyen le problème s'éclaircit à un tel point qu'il devient possible de se représenter assez complètement le tableau de la rotation et à réduire les calculs aux séries toujours convergentes et qui ont la simplicité permise par le problème. Ainsi on peut placer ce cas de rotation au nombre de ceux qui ont été examinés avec une attention plus profonde.

Au point de vue purement mathématique le cas de rotation que j'examine présente des particularités différentes. C'est à ces particularités qu'il faut attribuer l'avantage de l'emploi étendu des quantités complexes, dont les qualités géometriques se montrent très utiles dans l'exploration de ce cas, surtout combiné avec l'ainsi nommée *transformation linéaire* qui réduit les lignes droites et les cercles en cercles en conservant la similitude des parties infiniment petites. L'autre particularité du cas considéré consiste en ce que le problème est réduit ici non pas aux fonctions de temps uniformes comme dans les cas du mouvement examinés par Euler, Lagrange et Kovalevsky, mais aux fonctions multiformes.

§ 1.

Equations fondamentales; leurs intégrales algébriques.

En observant les conditions:

$$(1) \qquad y_0 = 0, \quad A(B-C)x_0^2 = C(A-B)z_0^2, \quad A > B > C,$$

les équations du mouvement d'un solide pesant autour du point fixe O, amenées à la forme*):

$$(2) \qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} = (B-C)qr + y_0\gamma'' - z_0\gamma', & \frac{d\gamma}{dt} = r\gamma' - q\gamma'', \\ B\frac{dq}{dt} = (C-A)rp + z_0\gamma - x_0\gamma'', & \frac{d\gamma'}{dt} = p\gamma'' - r\gamma, \\ C\frac{dr}{dt} = (A-B)pq + x_0\gamma' - y_0\gamma, & \frac{d\gamma''}{dt} = q\gamma - p\gamma', \end{cases}$$

*) A, B et C sont les moments d'inertie par rapport aux axes principaux de l'inertie, tracés par le point fixe et pris comme axes des coordonnés x, y et z dans le solide; x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées du centre G de gravité; p, q, r sont les projections de la vitesse de rotation autour d'un axe momentané sur les axes déja nommés des coordonnées; $\gamma, \gamma', \gamma''$ sont les cosinus des angles de ces axes avec la direction de la gravité. En plus on suppose que la masse M du solide et l'accélération g satisfont à la condition $Mg = 1$, ce qui, comme on le sait, ne limite que le choix des unités.

admettent, outre les trois intégrales algébriques:

$$(3)\qquad \begin{cases} \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = l_0 = 1, \\ Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = l_1, \\ Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2(x_0\gamma + y_0\gamma' + z_0\gamma'') = l_2, \end{cases}$$

encore une quatrième intégrale de Mr. **Hess**, algébrique particulière

$$(4)\qquad Ax_0p + Cz_0r = 0.$$

Avant de développer les conséquences auxquelles conduit la considération de l'intégrale particulière (4), fixons notre attention pour un instant sur une qualité remarquable des intégrales *générales*, qui est intéressante, entre autre, par ce qu'elle joint les conditions (1) et l'intégrale particulière (4) avec la méthode de Mme. **Kovalevsky**, exposée dans le § 1 de son mémoire, concernant le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe (*Acta Mathematica*, XII).

Si nous approfondissons avec Mme. **Kovalevsky** la recherche de tous les cas où les équations différentielles du problème admettent pour les fonctions p, q, r, γ, γ' et γ'', qu'elles déterminent, des pôles, comme des points singuliers, avec la condition, que les coefficients des developpements de ces fonctions en séries dans le domaine des pôles dépendent de *cinq* constantes arbitraires; il se trouvera parmi ces cas celui qui est caractérisé par les conditions (1). Ainsi, en exécutant les conditions (1) on peut satisfaire les équations (2) par des séries de la forme:

$$(5)\qquad \begin{cases} p = \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^{n-1}, & \gamma = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^{n-2}, \\ q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^{n-1}, & \gamma' = \sum_{n=0}^{\infty} g_n t^{n-2}, \\ r = \sum_{n=0}^{\infty} r_n t^{n-1}, & \gamma'' = \sum_{n=0}^{\infty} h_n t^{n-2}, \end{cases}$$

qui convergent dans un domaine de zéro et dont les coefficients contiennent *cinq* constantes arbitraires.

Il s'ensuit que le cas de Mr. **Hess** aurait pu être trouvé par les procédés de **Kovalevsky**, puisque ce cas est contenu dans ces équations et n'a été oublié par elle que par inadvertance*).

Renvoyant les lecteurs qui s'intéressent à cette application de la méthode de **Kovalevsky** aux articles de Mr. H. **Appelroth****), qui

*) C'est justement par ce procédé que j'ai trouvé le cas de Mr. **Hess** et ce ne fut que plus tard que j'appris l'existence de son mémoire.

) Mr. H. H. **Appelroth: 1) „Par rapport au premier paragraphe du mémoire

renferment la démonstration de la propriété déjà nommée des intégrales générales du système (2) avec les conditions (1), je me bornerai à développer dans ce qui suit surtout le cas correspondant à l'intégrale particulière (4).

Malgré le caractère particulier de ce cas, le mouvement qui y correspond ne présente pas un degré de généralité moindre que dans les cas examinés par Euler, Lagrange et Kovalevsky. Effectivement en partant de l'intégrale particulière (4) nous perdons une constante arbitraire, mais à sa place nous gagnons une constante dans les quantités x_0, y_0, z_0, A, B et C, qui, se soumettant aux conditions (1), sont moins limitées que dans les cas de Euler, Lagrange et Kovalevsky.

Quant à la réalisation du cas que j'examine du mouvement d'un solide, il faut remarquer avant tout la possibilité de la construction du solide pour lequel les conditions (1) suffisent. Si l'on cherche dans le premier solide donné les points pour lesquels les moments principaux A, B et C et les coordonnées x_0, y_0, z_0, du centre G de gravité remplissent les conditions (1), nous trouverons une quantité innombrable de points remplissant la place géométrique représentée par deux lignes droites qui passent par le centre de gravité. Ces lignes droites sont perpendiculaires aux sections circulaires d'un ellipsoïde construit pour le centre de gravité. Cet ellipsoïde, rapporté aux axes principaux x', y', z' de l'inertie, est déterminé par l'équation:

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1,$$

où

$$a'^2 = \frac{A'}{M}, \quad b'^2 = \frac{B'}{M}, \quad c'^2 = \frac{C'}{M},$$

A', B', C' sont des moments d'inertie correspondant à ces axes. Cette conclusion a été faite par Mr. Tschapliguin. Il suffit de fixer l'un des points de deux droites nommées pour avoir un solide capable de reproduire le mouvement que j'examine. En appropriant ensuite ce corps de façon à pouvoir y exciter un mouvement dont les circonstances initiales correspondent à l'intégrale particulière (4), il faut avoir en vue que l'axe instantané doit se trouver pendant tout le temps de ce mouvement sur le même plan, déterminé par l'équation: $Ax_0x + Cz_0z = 0$. Si par conséquent il fallait donner au solide la forme d'un gyroscope, c'est justement dans ce plan que devrait être placé l'axe du gyroscope auquel on attache le fil pour le faire tourner.

Voici encore un moyen de réaliser le même mouvement du solide

---

de Sophie Kovalevsky" (Recueil de mathématiques, t. XVI, livraison 3ème, 1892, Moscou). — 2) „Problème concernant la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe" (Mémoires scientifiques de l'Université Impériale de Moscou, section physico-mathématique, liv. 11, 1894).

examiné pour lequel l'intégrale (4) a de la valeur. Il faut ôter le solide donné de la position d'équilibre et le livrer à lui-même sans lui donner aucune vitesse initiale, de sorte qu'au commencement du mouvement $p = q = r = 0$. Avec ces conditions l'intégrale (4) se réalisera absolument. En même temps dans le deuxième des intégrales (3) la constante l_1 devient zéro, et la constante l_2 doit contenter l'inégalité $l_2 < 2\varrho_0$, comme nous nous en convainquons au moyen de la troisième des expressions (3). Par conséquent ce moyen, qui est l'un des plus simples de ceux, qui réalisent le mouvement, appartenant au cas que j'examine, n'embrasse pas ce cas dans toute son étendue.

§ 2.

Réduction du problème à la recherche du mouvement de deux points remarquables.

Supposons que les conditions (1) ont lieu et que les cironstances initiales réalisent en même temps un mouvement pareil autour du point O, auquel correspond l'intégrale particulière (4).

Introduisons les désignations suivantes:

$$(6) \qquad \begin{cases} \xi = \frac{z_0}{\varrho_0}\gamma - \frac{x_0}{\varrho_0}\gamma'', \quad \eta = \gamma', \quad \zeta = \frac{x_0}{\varrho_0}\gamma + \frac{z_0}{\varrho_0}\gamma'', \\ v = \xi + \eta i, \end{cases}$$

$$\varrho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Il est évident que η, ζ et ξ sont les cosinus des angles de la direction OV de la gravité avec les trois lignes suivantes réciproquement perpendiculaires: 1) à l'axe y de l'inertie, auquel correspond le moment B et qui est représenté sur la figure 1 par la ligne $O\eta$, 2) à la ligne $O\zeta$, qui passe par le centre de gravité G, et 3) à la ligne $O\xi$, perpendiculaire au plan $\eta O \zeta$. D'ailleurs la quantité complexe $v = \xi + \eta i$, qui joue dans le problème un rôle principal, est représentée sur le plan $\eta O \xi$ par le point v (figure 1). Ce point coïncide avec la projection sur le plan du point V, qui sépare dans la direction de la gravité e segment OV égal à 1.

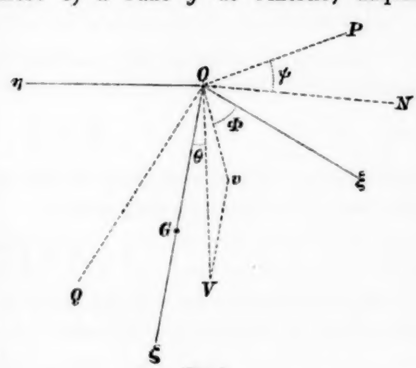


Fig. 1.

Si nous représentons la sphère O, décrite du centre O par le rayon 1, et si nous prenons le plan $\xi O\eta$ pour le plan de son équateur, l'amplitude Φ de la quantité v, représentée par l'angle $vO\xi$, sera la longitude du point V, et l'angle $\theta = VOG$, dont le cosinus est ζ, sera le *complément de la latitude* du point V jusqu'à l'angle droit.

Après avoir éliminé des équations (2), (4) et (6) les fonctions r, γ, γ' et γ'', nous trouverons les équations différentielles suivantes:

$$(7)\qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} = \dfrac{A(C-B)x_0}{Cz_0}pq - z_0\eta, \\ B\dfrac{dq}{dt} = \dfrac{A(A-C)x_0}{Cz_0}p^2 + \varrho_0\xi, \\ \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{(C-A)x_0}{C\varrho_0}p\eta - q\zeta, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{A\varrho_0}{Bz_0}p\zeta - \dfrac{(C-A)x_0}{C\varrho_0}p\xi, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = q\xi - \dfrac{A\varrho_0}{Bz_0}p\eta. \end{cases}$$

Les trois intégrales connues de ces équations, obtenues par les équations (3), sont:

$$(8)\qquad \begin{cases} \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = l_0 = 1, \\ \dfrac{A\varrho_0}{z_0}p\xi + Bq\eta = l_1, \\ \dfrac{A^2\varrho_0^2}{Bz_0^2}p^2 + Bq^2 - 2\varrho_0\zeta = l_2. \end{cases}$$

Par ces équations nous trouvons:

$$(9)\qquad \begin{cases} q = \dfrac{l_1\eta + \xi R}{B(1-\zeta^2)}, \quad p = \dfrac{z_0(l_1\xi - \eta R)}{A\varrho_0(1-\zeta^2)}, \\ \eta = \pm\sqrt{1-\xi^2-\zeta^2}, \quad R = \pm\sqrt{B(1-\zeta^2)(l_2+2\varrho_0\zeta) - l_1^2}. \end{cases}$$

Après avoir introduit les quantités p, q et η dans la dernière des équations (7), nous obtiendrons l'équation:

$$(10)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{R}{B},$$

qui conduit à la nouvelle intégrale des équations (7) qui dépend des fonctions elliptiques, précisément:

$$(11)\qquad t + l_3 = B\int\frac{d\zeta}{R}.$$

La troisième et la quatrième des équations (7) sont amenées au moyen des équations (9) à la forme:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{(a\xi-\zeta)l_1\eta - (a\eta^2+\xi\zeta)R}{B(1-\zeta^2)}, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{(l_1\xi - \eta R)(\zeta - a\xi)}{B(1-\zeta^2)}, \end{cases}$$

où

$$a = \frac{B(C-A)x_0 z_0}{A C \varrho_0^2}. \tag{13}$$

A l'aide de la deuxième des conditions (1) le carré de la quantité a est exprimé au moyen des moments A, B et C de la façon suivante:

$$a^2 = \frac{(A-B)(B-C)}{AC}; \tag{13'}$$

le signe de la quantité a est opposé au signe du produit $x_0 z_0$.

Après avoir multiplié la deuxième des équations (12) par $i = \sqrt{-1}$ et après avoir additionné ensuite ces équations, nous obtenons:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(R - l_1 i)(av - 2\zeta)v}{2B(1-\zeta^2)} - \frac{a(l_1 i + R)}{2B}, \tag{14}$$

où v est déterminé par l'une des équations (6).

Le mouvement du solide que j'examine est entièrement déterminé par le mouvement de deux points: 1) par le mouvement du centre de gravité G relativement à l'espace immobile et 2) par le mouvement du point v qui détermine à son tour la translation du point V et du segment OV dans leur mouvement relatif dans le solide.

Le mouvement du point G se détermine par le changement de deux angles: 1) par l'angle θ entre la direction de la gravité OV et la ligne OG, 2) par l'angle ψ entre la ligne donnée immobile et horizontale OP et la ligne mobile horizontale ON, située dans le plan $\xi O \eta$ (Fig. 1). Ce mouvement du point G qui s'exprime au moyen des fonctions elliptiques du temps t, déterminées par l'équation (10), se produit d'après les règles du pendule sphériques (voyez l'article de Mr. N. E. Joukovsky).

La détermination du mouvement du point v, représentant une quantité complexe, qui satisfait à l'équation (14), est réduite par une transformation, désignée plus loin, à la recherche de l'équation différentielle linéaire à coefficients doublement periodiques uniformes.

§ 3.

Mouvement du centre de gravité G d'après la règle du pendule sphérique.

L'équation (10), qui détermine le cosinus ζ de l'angle $\theta = VOG$, montre que cet angle change dans un ordre qui correspond au mouvement du point pesant G d'après la règle du pendule sphérique avec la tension d'un poids égal à $\varrho_0^2 : B$. Par conséquent la tension réelle du poids

$$g = \frac{1}{M}$$

change par rapport à $M\varrho_0^2 : B$.

Afin que le mouvement que j'examine soit possible, il est nécessaire de satisfaire à quelques conditions. Ce que nous devons considérer avant tout.

La quantité ζ, comme cosinus de l'angle $\theta = VOG$, doit satisfaire les conditions:

$$-1 < \zeta < +1, \tag{15}$$

et la quantité dérivée $\frac{d\zeta}{dt}$ doit être une quantité réelle et par conséquent l'inégalité

$$R^2 > 0 \tag{16}$$

doit avoir lieu.

Supposons

$$f(\zeta) = R^2$$

et remarquons que

$$f(-\infty) > 0, \quad f(-1) < 0 \text{ et } f(+1) < 0,$$

nous nous convainquons que les conditions (15) et (16) ne peuvent pas être remplies autrement que si l'équation $f(\zeta) = 0$ a trois racines réelles et si l'une d'elles ζ_1 se place entre $-\infty$ et -1, et les deux autres ζ_2 et ζ_3 se placent entre -1 et $+1$. Les inégalités:

$$\zeta_0 < 1 \quad \text{et} \quad \Delta > 0 \tag{17}$$

doivent exister pour que l'exécution de ces conditions soit possible. Dans ces inégalités

$$\begin{cases} \zeta_0 = -\frac{l_2}{2\varrho_0}, \quad \Delta = g_2{}^3 - 27 g_3{}^2, \\ g_2 = \left(\frac{12\varrho_0{}^2 + l_2{}^2}{3\varrho_0}\right)\sqrt[3]{\frac{B^2}{4\varrho_0}}, \\ g_3 = l_1{}^2 - \frac{2 l_2 B}{3} + \frac{l_2{}^3 B}{54\varrho_0{}^2}. \end{cases} \tag{18}$$

Supposons que les conditions (17) sont remplies de sorte que les trois racines $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ du polynome $f(\zeta) = R^2$ soient réelles et se placent d'après la quantité dans l'ordre suivant:

$$\zeta_1 < -1 < \zeta_2 < \zeta_3 < +1. \tag{19}$$

En même temps les inégalités suivantes

$$\zeta_1 < \zeta_0 < \zeta_2 \tag{20}$$

auront lieu et la quantite ζ varie entre les limites:

$$\zeta_2 \leqq \zeta \leqq \zeta_3. \tag{21}$$

Choisissons le commencement du temps t de façon que pour $t = 0$ la quantité ζ coïncide avec ζ_2. Au moyen de cette condition nous trouvons d'après l'équation (10) que:

$$t = B\int_{\zeta_2}^{\zeta} \frac{d\zeta}{R}. \tag{22}$$

Comme pendant la croissance de t en partant de zéro la quantité ζ doit grandir en partant de ζ_2, le radical R doit être pris avec le signe $+$, tant que ζ n'atteint pas sa plus grande valeur ζ_3.

Transformons ensuite les variables ζ et t dans le but d'exprimer la quantité ζ et les autres quantités, qui y sont liées, au moyen des formes normales des fonctions elliptiques. Nous supposons que:

$$\zeta = -y\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}} - \frac{l_2}{6\varrho_0}, \quad t = B\tau\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}. \tag{23}$$

Après la transformation nous aurons:

$$\tau = \int_y^{e_2}\frac{dy}{R}. \tag{24}$$

$$R = \sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3} = \sqrt{4(y-e_1)(y-e_2)(y-e_3)}. \tag{25}$$

Ici les quantités g_2 et g_3 sont déterminées par les expressions (18). Les quantités e_0, e_1, e_2 et e_3 sont liées aux quantités déjà nommées ζ_0, ζ_1, ζ_2 et ζ_3 par les équations

$$\zeta_k = -e_k\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}} - \frac{l_2}{6\varrho_0}, \quad (k=0, 1, 2, 3).$$

Il s'ensuit d'après cette forme et d'après les inégalités (19), (20) et (21) que:

$$e_1 > e_0 > e_2 \geqq y \geqq e_3. \tag{26}$$

Supposons

$$T = \int_y^{\infty}\frac{dy}{R}, \tag{27}$$

et suivons les indications, adoptées dans le livre de **Halphen** «Traité des fonctions elliptiques». Nous obtiendrons:

$$y = \wp T, \quad R = -\wp' T. \tag{28}$$

La période réelle et la période imaginaire de ces fonctions seront:

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty}\frac{dy}{R} \quad \text{où} \quad \omega' = \int_{-\infty}^{e_3}\frac{dy}{R} \tag{29}$$

et en même temps:

$$\int_{e_2}^{\infty}\frac{dy}{R} \equiv \omega + \omega'\text{*}). \tag{30}$$

*) Les quantités, liées par le signe $\equiv$, ne peuvent différer les unes des autres que par des nombres entiers des périodes 2ω et $2\omega'$.

Il s'ensuit de cette formule et des inégalités (24) et (27), que

$$T \equiv \tau + \omega + \omega' \tag{31}$$

et que

$$y = \wp(\tau + \omega + \omega') \quad \text{et} \quad R = -\wp'(\tau + \omega + \omega'). \tag{32}$$

Malgré la présence de la quantité imaginaire ω' dans ces expressions, les fonctions y et R restent des quantités réelles et s'expriment par les formules suivantes, qui ne contiennent pas de quantités imaginaires*):

$$\begin{cases} y = \wp T = e_2 + \dfrac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)}{\wp\tau - e_2}, \\ R = -\wp' T = \dfrac{(e_2 - e_1)(e_2 - e_3)\wp'\tau}{(\wp\tau - e_2)^2}. \end{cases} \tag{33}$$

En outre nous avons les formules suivantes*):

$$\wp(\omega + \omega') = e_2, \quad \wp\omega' = e_3. \tag{34}$$

Ces expressions ainsi que celles de (32) montrent, qu'avec le changement du temps τ de 0 jusqu'à ω la quantité y diminue de e_2 jusqu'à e_3 (en même temps la quantité ζ augmente de ζ_2 jusqu'à ζ_3 et $R > 0$); avec la variation ultérieure du temps τ de ω jusqu'à 2ω la quantité y va croissant de e_3 jusqu'à e_2 (en même temps la quantité ζ va diminuant de ζ_3 jusqu'à ζ_2 et $R < 0$).

Ainsi la fonction y passe dans les moments $2m\omega$ et $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier, par le maximum e_2 et le minimum e_3; la quantité dérivée $\frac{dy}{d\tau}$ passe dans les mêmes moments par zéro $\left(\text{car } \wp'(\omega + \omega') = 0 \text{ et } \wp'\omega' = 0\right)$ et change de signe.

En passant à la définition de l'angle ψ qui se trouve entre la ligne horizontale immobile OP (Fig. 1) et la ligne horizontale mobile ON, située dans le plan $\xi O \eta$, nous déterminerons d'abord les composantes Ω_1, Ω_2 et Ω_3 de la vitesse de rotation du solide autour de l'axe instantané sur les axes $O\xi$, $O\eta$ et $O\zeta$. Ces composantes seront évidemment:

$$\Omega_1 = \frac{z_0}{\varrho_0} p - \frac{x_0}{\varrho_0} r, \quad \Omega_2 = q, \quad \Omega_3 = \frac{x_0}{\varrho_0} p + \frac{z_0}{\varrho_0} r. \tag{35}$$

L'équation (4) est réduite, après l'élimination de p et de r, à la forme suivante,

$$\Omega_3 - a\Omega_1 = 0. \tag{36}$$

Si nous sousentendons par Φ l'angle $vO\xi$, qui représente la longitude du point V (ou, autrement, une signification de l'amplitude de la quantité $v = \xi + i\eta$) et qui complète l'angle $NO\xi$ à l'angle droit, nous obtiendrons:

---

*) Halphen, t. I, p. 37.

$$\Omega_1 = \sin\theta\cos\Phi\cdot\frac{d\psi}{dt} + \sin\Phi\cdot\frac{d\theta}{dt},$$
$$\Omega_2 = \sin\theta\sin\Phi\cdot\frac{d\psi}{dt} - \cos\Phi\cdot\frac{d\theta}{dt},$$
$$\Omega_3 = \cos\theta\frac{d\psi}{dt} - \frac{d\Phi}{dt}.$$

Après avoir exclus les expressions Ω_1 et Ω_3 dans l'équation (36), nous trouvons:

$$(37)\qquad (\cos\theta - a\sin\theta\cdot\cos\Phi)\frac{d\psi}{dt} - a\cdot\sin\Phi\frac{d\theta}{dt} - \frac{d\Phi}{dt} = 0.$$

Nous savons que les cosinus des angles des axes mobiles $O\xi$, $O\eta$ et $O\zeta$ avec les axes immobiles OP, OQ, OV s'expriment (au moyen des formules connues de Euler) par trois angles Φ, ψ et θ, nous trouvons pour les cosinus ξ, η et ζ les expressions suivantes:

$$(38)\qquad \begin{cases} \xi = \cos\Phi\,.\,\sin\theta, \\ \eta = \sin\Phi\,.\,\sin\theta, \\ \zeta = \cos\theta. \end{cases}$$

Ces expressions ne renferment pas du tout l'angle ψ. Après les avoir substituées dans la première des équations (12) nous trouvons:

$$(39)\qquad -\sin\theta\frac{d\Phi}{dt} = \frac{l_1(a\sin\theta\,.\,\cos\Phi - \cos\theta)}{B\sin\theta} + a\sin\theta\,.\,\sin\Phi\cdot\frac{d\theta}{dt}.$$

Cette équation équivaut à l'équation (14).

En éliminant des équations (37) et (39) la dérivée $\frac{d\Phi}{dt}$, nous trouvons:

$$(40)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{l_1}{B\sin\theta} = \frac{l_1}{B(1-\zeta^2)}.$$

L'expression (40) montre que l'angle ψ change aussi avec le mouvement du point G d'après la loi du pendule sphérique. Comme cette loi a été suffisamment étudiée par d'autres auteurs nous ne retiendrons pas plus longtemps l'attention du lecteur sur le mouvement du point G.

§ 4.

Propriétés de rotation du point v, caractérisées par les changements périodiques de ζ. Equation linéaire différentielle aux coefficients doublement périodiques uniformes, déterminant le mouvemeut du point v. Ses intégrales multiformes.

Dans la détermination de rotation d'un solide un rôle important est joué non seulement par le point G, mais aussi par le point v, qui représente la quantité $v = \xi + i\eta$, déterminée par l'expression (14).

La position du point v sur le plan $\xi O \eta$ détermine la position correspondante du point V, qui est projeté sur le plan $\xi O \eta$ dans le point v, retranchant dans la direction de la gravité le segment $OV = 1$. Quand le point v se mouve dans le plan $\xi O \eta$, le point correspondant V se mouve relativement au solide examiné dans la sphère O, décrite du centre O par un rayon égal à 1.

Voilà pourquoi nous prendrons le point V pour représenter la quantité complexe $v = \xi + i\eta$ sur cette sphère O.

Le module de $v = \xi + i\eta$ s'exprime ainsi:

$$|v| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \sqrt{1 - \zeta^2}.$$

Par conséquent le point v, représentant sur le plan $\xi O \eta$ la quantité $v = \xi + i\eta$, doit se trouver sur la circonférence E, décrite du centre O par le rayon

$$r = \sqrt{1 - \zeta^2},$$

et le point correspondant V, représentant la même quantité sur la sphère O, doit être situé sur la circonférence F, qui se trouve dans l'intersection de cette sphère avec un plan parallèle au plan $\xi O \eta$ et à la distance de ζ du point O.

Comme ζ est une fonction périodique avec la période 2ω relativement au temps τ et en plus *paire*, le point V doit prendre place sur la même circonférence F non seulement au moment τ, mais aussi à chacun des moments:

$$\pm \tau \pm 2m\omega,$$

où m est un nombre entier. Le point v correspondant doit aux mêmes moments prendre place sur la même circonférence E.

Examinons les limites dans lesquelles se déplace la circonférence F, pendant le changement continuel de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. La fonction ζ étant paire, les déplacements de la circonférence F dans les intervalles depuis $-\omega$ jusqu'à 0 et de 0 jusqu'à $+\omega$ se produisent d'après la même loi, mais dans un ordre inverse, de sorte qu'il suffit d'examiner le mouvement de la circonférence F dans l'intervalle de 0 jusqu'à $+\omega$. Dans cet intervalle la circonférence F passe sans interruption de la position la *plus élevée* F_2, qui se trouve à la distance de ζ_2 du point O, à la position *la plus basse* F_3, qui se trouve à la distance de ζ_3 du point O*). Ainsi avec le changement du temps τ la circonférence F change périodiquement de place à l'intérieur de la zone sphérique, enfermée dans les cercles paralleles F_2 et F_3.

*) Dans le solide donné le haut et le bas sont déterminés comme les directions positive et négative de l'axe $O\zeta$ (Fig. 1).

Puisque la circonférence E est la projection de la circonférence F sur le plan $\xi O \eta$, les translations de la circonférence E sont faciles à reconnaître par les déplacements de la circonférence F, et vice-versa. Il faut faire cependant quelques remarques par rapport à la position et à la translation de la circonférence E.

Si $l_1^2 < Bl_2$, nous aurons: $\zeta_2 < 0 < \zeta_3$. Dans ce cas les cercles parallèles F_2 et F_3 sont disposés de côtés différents de l'équateur E_0 (section de la sphère O par le plan $\xi O \eta$). Afin de distinguer dans ce cas pour les deux positions différentes de la circonférence F, situées à une distance égale du centre O, les positions correspondantes coïncidentes de la circonférence E, nous distinguerons *deux côtés* du plan $\xi O \eta$: le côté de *l'endroit* et de *l'envers* et nous dessinerons sur ce plan la circonférence E du côté où est située la circonférence F correspondante. De cette façon la circonférence E seule, dessinée du côté correspondant du plan $\xi O \eta$, correspondra à la position donnée de la circonférence F, et vice-versa. Quand, avec le changement du temps τ, la circonférence F passe par l'équateur E_0 d'un hémisphère à l'autre, la circonférence E passe par la même circonférence E_0 d'un côté du plan $\xi O \eta$ à l'autre.

Si $l_1^2 \geqq Bl_2$, nous avons: $0 < \zeta_2 < \zeta_3$. Dans ce cas les sections F_2 et F_3 se trouvent à un seul et même côté de l'équation E_0, et par conséquent il n'y a aucune nécessité d'examiner la translation de la circonférence E d'un côté du plan $\xi O \eta$ sur l'autre (sur l'inverse).

Ainsi la circonférence E balance toujours périodiquement dans une surface plane à forme d'anneau [de deux côtés (avec $l_1^2 < Bl_2$) ou d'un côté (avec $l_1^2 \geqq Bl_2$)], enfermé entre les circonférences E_2 et E_3. On doit toujours prendre la position initiale du point v (avec $\tau = 0$) sur la circonférence E_2. Puis avec le cours du temps τ le point v doit se mouvoir dans la surface à forme d'anneau désignée, se trouvant sur la circonférence E.

Remarquons encore qu'il dérive des corrélations $\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \zeta_0$ et des inégalités (20) que $\zeta_2 + \zeta_3 > 0$. Donc dans tous les cas $\zeta_2^2 < \zeta_3^2$, c. à d. que la section F_2 est toujours plus rapprochée du centre O que la section F_3.

Convenons de donner le nom de *pôles* de la sphère O à ses points d'intersection avec l'axe OZ. Il n'est pas difficile de remarquer que la zone sphérique, enfermée entre les circonférences F_2 et F_3, n'atteint les pôles de la sphère O que suivant la condition $l_1 = 0$, quand l'équation $R^2 = 0$ a les racines $+1$ et -1. Dans les autres cas cette zone sphérique n'atteint jamais les pôles de la sphère O.

Passant à l'équation (14), remplaçons y ζ et t par les variables déjà nommées y et τ, pour lesquelles les expressions (23), (32) et (33) ont lieu, et ensuite transformons cette équation (14) en supposant que:

$$v = \frac{-1}{2a}\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}\left(\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0}\right)\frac{d\lg w}{d\tau}$$

(41)

$$= \frac{-1}{2a}\sqrt[3]{\frac{4}{B^2\varrho_0^2}}\left(\frac{R + l_1 i}{\zeta - \zeta_0}\right)\frac{d\lg w}{d\tau},$$

où

$$e_0' = + l_1 i$$

et

(41′)
$$T = \tau + \omega + \omega'.$$

Nous obtiendrons après la transformation l'équation linéaire:

(42)
$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0}\right)\frac{dw}{d\tau} + a^2(\wp T - e_0)w = 0,$$

dont les coefficients sont des fonctions uniformes doublement périodiques, renfermant la quantité imaginaire e_0'.

Remarquons que les quantités e_0 et e_0' peuvent être désignées ainsi:

(43)
$$e_0 = \wp T_0 \quad \text{et} \quad e_0' = \wp' T_0,$$

où

(43′)
$$T_0 = \omega + \omega' + \tau_0 = \omega + \omega' + \sqrt{-1}\int_{e_0}^{e_2}\frac{dy}{\sqrt{4(e_1 - y)(y - e_2)(y - e_3)}}.$$

En considérant les points singuliers des intégrales de l'équation (42), nous voyons que ces coefficients se transforment en quantités infinies dans deux cas: 1) quand $\tau \equiv -\tau_0$ et 2) quand $\tau \equiv -\omega - \omega'$. Par suite d'un examen plus minutieux nous voyons que les points singuliers des intégrales de l'équation (42) ne coïncident qu'avec les points de la deuxième catégorie, c. à. d. avec les points $\tau \equiv -\omega - \omega'$; dans le domaine de chaque point $\tau \equiv -\tau_0$ les intégrales restent des quantités finies, continues et uniformes.

Les points singuliers des intégrales de l'équation (42) représentent sur le plan du variable τ les quantités de la forme:

$$2m\omega + 2m'\omega' - \omega - \omega',$$

où m et m' sont des nombres entiers. Ces points sont situés aux sommets des angles droits, formés par deux systèmes de lignes parallèles: le premier système est formé par les lignes parallèles à l'axe de l'ordonnée qui passent par les points:

$$\omega + 2m\omega, \ (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots);$$

le second système est formé par les lignes parallèles à l'axe des abscisses (à l'axe de quantités réelles) qui passent par les points:

$$\omega' + 2m'\omega', \ (m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Cette régularité géométrique dans la disposition des points singuliers des intégrales de l'équation (42) présente l'une des propriétés essentielles de l'équation (42) et conduit elle même à des conclusions importantes.

Si nous supposons sur le plan du variable τ un cercle, décrit autour d'une rectangle, par les sommets duquel sont représentées les quantités:

$$\omega + \omega', \; -\omega + \omega', \; -\omega - \omega', \; \omega - \omega'$$

(Fig. 2), *dans l'intérieur de ce cercle il n'y aura pas de points singuliers des intégrales de l'équation* (42). Par conséquent les intégrales de l'équation (42) doivent se développer par degrés entiers et positifs de τ en séries qui convergent dans le domaine de ce cercle.

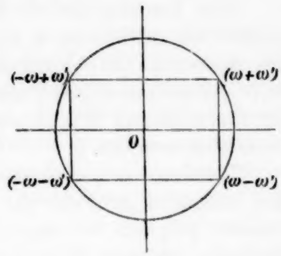


Fig. 2.

Les formes fondamentales de ces séries sont examinées plus bas. Maintenant nous remarquerons seulement que ces séries peuvent servir pour le calcul des résolutions de l'équation (42) quand le temps τ varie entre les limites de convergence

$$-\sqrt{\omega^2 + (\omega' i)^2} \quad \text{et} \quad +\sqrt{\omega^2 + (\omega' i)^2}.$$

Ces limites de convergence satisfont au-de-là des traitons du problème de mécanique que nous examinons. Effectivement il suffit pour étudier le mouvement, que nous explorons, de savoir calculer les résolutions des équations (42) au moyen des séries désignées avec le changement de τ seulement dans les limites moins larges, c. à. d. $-\omega$ et $+\omega$; car on peut toujours réduire les calculs à ces limites à l'aide des *substitutions linéaires* correspondantes aux suppléments des périodes entières 2ω.

Nous trouvons nécessaire de donner des à présent la forme générale des substitutions linéaires de ce genre, qui jouent un rôle essentiel dans le problème*).

Si $w_1\tau$ et $w_2\tau$ présentent deux résolutions diverses particulières de l'équation (42), $w_1(\tau+2\omega)$ et $w_2(\tau+2\omega)$ doivent posséder la même propriété et par conséquent il doit exister les corrélations:

$$(44) \qquad \begin{cases} w_1(\tau+2\omega) = \varkappa w_1\tau + \lambda w_2\tau, \\ w_2(\tau+2\omega) = \mu w_1\tau + \nu w_2\tau, \end{cases}$$

où $\varkappa$, λ, μ et ν sont des coefficients constants. Pour faire le calcul de ces coefficients nous pouvons admettre dans les expressions (44) et dans le résultat de leur différentiation que $\tau = -\omega$ et nous obtiendrons alors le système suivant des équations:

---

*) Dans l'article présent nous ne parlons pas des substitutions qui correspondent aux suppléments de la période imaginaire $2\omega'$; ces substitutions peuvent avoir une signification grave dans la théorie genérale de l'équation (42), mais elles n'ont pas de rapport immédiat avec le problème mécanique.

$$(45)\begin{cases} w_1\,\omega = \varkappa w_1\,(-\omega) + \lambda w_2\,(-\omega), & w_2\,\omega = \mu w_1\,(-\omega) + \nu w_2\,(-\omega), \\ w_1'\,\omega = \varkappa w_1'(-\omega) + \lambda w_2'(-\omega), & w_2'\,\omega = \mu w_1'(-\omega) + \nu w_2'(-\omega). \end{cases}$$

Puisque les développements des fonctions $w_1\tau$ et $w_2\tau$ par les degrés de τ doivent se converger avec $\tau = \pm\,\omega$, les quantités $w_1(\pm\,\omega)$, $w_1'(\pm\,\omega)$, $w_2(\pm\omega)$ et $w_2'(\pm\omega)$, faisant partie des équations (45), peuvent être calculées à l'aide de ces développements; puis les coefficients $\varkappa$, λ, μ et ν peuvent être déterminés d'après les équations (45).

Plus bas nous aurons lieu d'éxaminer de différents côtés les propriétés des coefficients $\varkappa, \lambda, \mu$ et ν de la substitution, déterminée par les expressions (44) et qui donne la possibilité de calculer les fonctions $w_1(\tau + 2m\omega)$ et $w_2(\tau + 2m\omega)$ avec un nombre m entier quelconque, si les fonctions $w_1\tau$ et $w_2\tau$ avec le changement de τ depuis $-\,\omega$ jusqu'à $+\,\omega$ sont connues.

Terminons ce paragraphe par l'explication d'une propriété analytique des intégrales *générales* des équations (2) d'après les conditions (1), laquelle propriété se trouve liée au développement des intégrales de l'équation (42) en séries infinies, convergente dans le domaine des points singuliers que nous avons nommés plus haut.

Ayant remarqué que

$$\wp T = \frac{1}{T^2} + \frac{g_2}{20}T^2 + \frac{g_3}{28}T^4 + \frac{g_2^2}{2^4.\,3\,.5^2}T^6 + \frac{3g_2g_3}{2^4.5.7.11}T^8 + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\wp' T - \wp' T_0}{\wp T - \wp T_0}\right) = \zeta(T + T_0) - \zeta T_0 - \zeta T,$$

$$\zeta T = \frac{1}{T} + \int_0^T \left(\frac{1}{T^2} - \wp T\right) dT$$

(**Halphen**, «Traité des fonctions elliptiques» t. I, p. 136—138), nous obtenons dans le domaine du point singulier $\tau = -\,\omega - \omega'$ les développements suivants de deux intégrales indépendantes particulières de l'équation (42):

$$(46)\qquad \begin{cases} w_1 = T^{+ai}(1 + c_1\,T + c_2\,T^2 + c_3\,T^3 + \cdots), \\ w_2 = T^{-ai}(1 + c_1'\,T + c_2'T^2 + c_3'T^3 + \cdots), \end{cases}$$

où

$$T = \tau + \omega + \omega',$$

$$c_1 = 0,\; c_2 = \frac{-ai\wp T_0}{4},\quad c_3 = \frac{-ai\wp' T_0}{6(3+2ai)} + \cdots,$$

$$c_1' = 0,\; c_2' = \frac{+ai\wp T_0}{4},\quad c_3' = \frac{+ai\wp' T_0}{6(3-2ai)} + \cdots.$$

On obtient les développements qui sont convergents dans le domaine du point singulier $\tau = 2m\omega + 2m'\omega' - \omega - \omega'$, en remplaçant la quantité T dans les formules (46) par la quantité

$$T - 2m\omega - 2m'\omega'.$$

Comme a est une quantité réelle, différente de zéro, nous voyons des expressions (46) que les intégrales de l'équation (42) doivent être des fonctions *multiformes* du variable τ. D'ailleurs d'après l'expression (41), dans laquelle on doit supposer que:

$$w = w_1 + l_4 w_2,$$

où l_4 est une constante, nous voyons que la fonction v et, par conséquent, les fonctions p, q, r, γ, γ' et γ'', ayant l'arbitraire l_4, sont aussi des fonctions multiformes du variable τ ou du temps t.

Si partant de l'intégrale particulière (4) nous sommes parvenus à des fonctions multiformes, les intégrales *générales* des équations (2) suivant les conditions (1) conduiront à plus forte raison aux fonctions multiformes p, q, r, γ, γ' et γ'' du temps t. Ce résultat est conforme au résultat de Mme. Kovalevsky, qui affirme que les cas examinés par Euler, par Lagrange et par elle même sont les *uniques*, dans lesquels les quantités p, q, r, γ, γ' et γ'', déterminées au moyen des intégrales *générales* des équations (2), sont exprimées par des fonctions de temps uniformes, n'ayant, dans l'étendue finie du variable t, d'autres points singuliers que les pôles.

La forme (5) des intégrales générales des équations (2) suivant les conditions (1) montre que les fonctions multiformes p, q, r, γ, γ' et γ'' ont aussi, entre autre, en qualité de points singuliers, les pôles. Il reste à savoir ces pôles quand l'intégrale (4) a lieu. Il est facile de voir que ces pôles coïncident avec les points de la forme: $\tau \equiv -\tau_0$, où τ_0 est déterminé par l'expression (43'). Effectivement ces points sont les pôles de l'expression

$$\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0},$$

qui est le multiplicateur de la seconde partie de l'expression (41). Cette expression détermine la quantité $v = \xi + i\eta$. En plus, les pôles de la fonction v correspondent au zéro de la fonction w.

§ 5.

Intégrales fondamentales particulières de l'équation (42). Intégrales canoniques et propriétés caractéristiques de la quantité h. Trois cas de rotation du solide.

Nous nommerons intégrales fondamentales particulières de l'équation (42) les résolutions $w_1\tau$ et $w_2\tau$, qui satisfont les conditions:

$$\text{(47)} \qquad \begin{cases} w_1 0 = 1, \; w_1' 0 = 0, \\ w_2 0 = 0, \; w_2' 0 = i, \end{cases}$$

considérant $\tau = 0$. Fixons notre attention sur la forme de ces résolutions.

Si nous exprimons l'intégrale *générale* des équations (42) par la forme

$$w = f\tau + iF\tau, \tag{48}$$

où $f\tau$ et $F\tau$ sont des fonctions *réelles*, l'expression imaginaire conjuguée

$$w = f\tau - iF\tau \tag{48'}$$

sera l'intégrale *générale* d'une autre équation

$$\frac{d^2 w}{d\tau^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' T + e_0'}{\wp T - e_0}\right)\frac{dw}{d\tau} + a'(\wp T - e_0)w = 0, \tag{49}$$

obtenue par l'équation (42) si nous remplaçons le coefficient imaginaire e_0' par une quantité conjuguée $-e_0'$. Mais l'équation (49) se transforme en équation (42) après le remplacement de τ par $-\tau$; c'est pourquoi, après avoir subi le même changement, l'expression (48') se transforme de la façon suivante:

$$w = f(-\tau) - iF(-\tau), \tag{48''}$$

qui présente sous une autre forme l'intégrale générale de l'équation (42). En combinant les expressions (48) et (48''), nous pouvons aussi présenter l'intégrale générale de l'équation (42) sous la forme suivante:

$$w = f\tau + f(-\tau) + i\{F\tau - F(-\tau)\}. \tag{50}$$

Cette dernière forme de l'intégrale générale de l'équation (42) montre qu'il doit exister *deux* intégrales semblables particulières indépendantes de la même forme (50), c. à. d. qu'elles ont dans leurs parties réelle et imaginaire les fonctions correspondantes *paire* et *impaire*. Si nous imposons à ces deux intégrales particulières les conditions (47), elles coïncideront avec les résolutions fondamentales. Par conséquent les intégrales fondamentales particulières de l'équation (42) se développent en séries suivantes:

$$\begin{cases} w_1\tau = 1 + \alpha_2\tau^2 + \alpha_4\tau^4 + \alpha_6\tau^6 + \cdots \\ \qquad\qquad + i(\alpha_3\tau^3 + \alpha_5\tau^5 + \alpha_7\tau^7 + \cdots), \\ w_2\tau = \beta_2\tau^2 + \beta_4\tau^4 + \beta_6\tau^6 + \cdots \\ \qquad\qquad + i(\tau + \beta_3\tau^3 + \beta_5\tau^5 + \beta_7\tau^7 + \cdots), \end{cases} \tag{51}$$

où $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \beta_2, \beta_3, \ldots$ sont des quantités *réelles*.

Le calcul successif des coefficients du développement (51) sera montré plus loin (dans le § 10).

Constituons les expressions des coefficients $\varkappa$, λ, μ et ν de la substitution (44), en supposant que $w_1\tau$ et $w_2\tau$ sont des résolutions fondamentales, c. à. d. les résolutions, déterminées par les expressions (51). Avec cette supposition nous aurons:

$$w_1(-\omega) = \overline{w}_1\omega, \quad w_1'(-\omega) = -\overline{w}_1'\omega,$$
$$w_2(-\omega) = \overline{w}_2\omega, \quad w_2'(-\omega) = -\overline{w}_2'\omega,$$

où on sousentend en général par $\overline{w}$ une quantité conjuguée à w. Il s'ensuit de ceci et des équations (45) que:

$$(52)\quad \begin{cases} \varkappa = \frac{1}{\delta}(w_1\omega.\overline{w}_2'\omega + \overline{w}_2\omega.w_1'\omega), & \lambda = -\frac{1}{\delta}(\overline{w}_1\omega.w_1'\omega + w_1\omega.\overline{w}_1'\omega), \\ \mu = \frac{1}{\delta}(w_2\omega.\overline{w}_2'\omega + \overline{w}_2\omega.w_2'\omega), & \nu = -\frac{1}{\delta}(\overline{w}_1\omega.w_2'\omega + w_2\omega.\overline{w}_2'\omega), \end{cases}$$

où

$$(52')\qquad \delta = \overline{w}_1\omega\,\overline{w}_2'\omega - \overline{w}_2\omega\,\overline{w}_1'\omega.$$

Il est facile de voir au moyen des expressions (52) et (52') que les quantités $\varkappa$, λ, μ et ν et celles, qui y sont conjuguées, satisfont aux corrélations:

$$(53)\qquad \overline{\varkappa}\overline{\delta} = -\nu\delta,\quad \overline{\nu}\overline{\delta} = -\varkappa\delta,\quad \overline{\mu}\overline{\delta} = \mu\delta,\quad \overline{\lambda}\overline{\delta} = \lambda\delta.$$

La quantité δ, qui se trouve dans les expressions précédentes et déterminée par l'expression (52'), a une expression plus simple que l'on obtient de la manière suivante. Les résolutions particulières $w_1\tau$ et $w_2\tau$, déterminées par l'expression (51), doivent d'après Liouville satisfaire à la condition:

$$(53')\qquad w_1\tau.w_2'\tau - w_2\tau.w_1'\tau = i\sqrt{\frac{e_0-\wp T}{e_0-e_2}}\,e^{i\chi\tau},$$

où $\chi\tau$ est une fonction réelle, déterminée par l'expression:

$$(53'')\qquad \chi\tau = \frac{e_0'}{2i}\int_0^\tau \frac{d\tau}{e_0-\wp T}.$$

En supposant dans l'expression (53') $\tau = \omega$, nous obtiendrons, en passant aux quantités conjuguées, l'expression cherchée de la quantité δ:

$$(53''')\qquad \delta = -i\sqrt{\frac{e_0-e_3}{e_0-e_2}}\cdot e^{-i\chi\omega}.$$

En même temps nous pouvons représenter les relations (53) ainsi:

$$(53^{IV})\qquad \begin{cases} \overline{\varkappa}\,.\,e^{2i\chi\omega} = \nu, & \overline{\nu}\,.\,e^{2i\chi\omega} = \varkappa, \\ \overline{\mu}\,.\,e^{2i\chi\omega} = -\mu, & \overline{\lambda}\,.\,e^{2i\chi\omega} = -\lambda. \end{cases}$$

Connaissant les quantités $\varkappa$, λ, μ et ν, nous pouvons passer des résolutions fondamentales particulières de l'équation (42) à ses intégrales *canoniques*, qui sont souvent employées dans la théorie des équations linéaires aux coefficients uniformes périodiques*) et qui mènent notre probléme à des conclusions importantes.

---

*) Voir Floquet, «Sur les équations différentielles linéaires à coefficients périodiques» (Annales de l'Ecole normale supérieure, t. 13. 1883).

En définissant les résolutions canoniques $W\tau$ de l'équation (42), pour lesquelles la condition

$$W(\tau+2\omega) = sW\tau \tag{54}$$

a lieu, nous présenterons ce genre de résolution ainsi:

$$W\tau = p'w_1\tau + q'w_2\tau. \tag{55}$$

Ayant introduit cette expression $W\tau$ dans l'expression (54) et ayant recours au remplacement (44), nous obtenons une relation, d'où il s'ensuit que p' et q' satisfont aux équations

$$\begin{cases}(\varkappa-s)p' + \mu q' = 0,\\ \lambda p' + (\nu-s)q' = 0.\end{cases} \tag{56}$$

Pour la compatibilité de ces équations la quantité s doit satisfaire à l'équation carrée:

$$s^2 - (\varkappa+\nu)s + \varkappa\nu - \lambda\mu = 0, \tag{57}$$

qui a en général deux racines. Ainsi il existe en général *deux* résolutions de l'équation (42), satisfaisant la condition (54). Dans un cas particulier, quand les deux racines de l'équation (57) deviennent égales, ces deux résolutions de l'équation (42) deviennent coïncidentes. Si nous rejetons pour le moment ce dernier cas et si nous désignons par s_1 et s_2 les racines de l'équation (57) et par $W_1\tau$ et $W_2\tau$ les résolutions canoniques correspondantes de l'équation (42), nous avons les équations:

$$\begin{cases}W_1(\tau+2\omega) = s_1 W_1\tau,\\ W_2(\tau+2\omega) = s_2 W_2\tau,\end{cases} \tag{58}$$

$$W_1\tau = p_1w_1\tau + q_1w_2\tau,$$
$$W_2\tau = p_2w_2\tau + q_2w_2\tau,$$

$$q_1 = \frac{-\varkappa}{\mu}p_1 = \frac{\lambda}{s_1-\nu}p_1, \quad q_2 = \frac{s_2-\varkappa}{\mu}p_2 = \frac{\lambda}{s_2-\nu}p_2,$$

dans lesquelles les quantités p_1 et p_2 peuvent être choisies arbitrairement. Nous supposerons que $p_1 = p_2 = 1$; de sorte que nous aurons:

$$\begin{cases}W_1\tau = w_1\tau + q_1w_2\tau,\\ W_2\tau = w_1\tau + q_2w_2\tau,\end{cases} \tag{58'}$$

où

$$q_1 = \frac{s_1-\varkappa}{\mu} = \frac{\lambda}{s_1-\nu}, \quad q_2 = \frac{s_2-\varkappa}{\mu} = \frac{\lambda}{s_2-\nu}. \tag{58''}$$

Ayant remarqué que

$$\varkappa\nu - \lambda\mu = -\frac{\bar{\delta}}{\delta} = e^{2i\chi\omega}, \tag{59}$$

où $\chi\omega$ est déterminé par l'expression (53'') considérant $\tau = \omega$, nous nous convainquons que les racines s_1 et s_2 de l'expression (57) peuvent être exprimées ainsi:

(60) $$s_1 = \frac{\varkappa + \nu}{1 + h^2}, \quad s_2 = \frac{(\varkappa + \nu) h^2}{1 + h^2},$$

où

(61) $$h = \pm N \pm \sqrt{N^2 - 1},$$

(61') $$N = \frac{\varkappa + \nu}{2} \cdot e^{-i\chi\infty}.$$

A l'aide des expressions (53^{IV}) nous nous convainquons que la quantité N, déterminée par l'égalité (61'), et la quantité, qui y est conjuguée, sont égales, c. à. d.

$$\bar{N} = N.$$

Par là il s'ensuit que la quantité N est *réelle*. En même temps la quantité h, déterminée par l'expression (61), doit être ou réelle (si $N^2 > 1$), ou (si $N^2 < 1$) imaginaire avec le module égal à 1.

Par le choix voulu des signes dans la seconde partie de l'expression (61), qui détermine *quatre* significations de h, nous pouvons obtenir qu'avec $N^2 > 1$ l'inégalité

(62) $$h > 1$$

ait lieu et qu'avec $N^2 < 1$ l'expression

$$h = e^{\varphi i}$$

ait lieu à condition que:

(63) $$0 < \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

La quantité h, choisie d'après la condition (62) considérant $N^2 > 1$ et d'après les conditions (63) considérant $N^2 < 1$, sera nommée *caractéristique*.

La quantité caractéristique h, déterminée de cette façon, joue dans la suite un rôle essentiel soit comme constante avec le mouvement donné, soit comme la fonction des quantités l_1, l_2 et a, pendant le changement continu d'un mouvement à l'autre.

Disons dès maintenant, que la quantité caractéristique h, en qualité de fonction des variables l_1, l_2 et a, est continue dans les limites des changements, permis par les conditions du problème de mécanique que nous examinons, à part le cas où $\omega = \infty$, ce qui n'arrive que quand $l_1 = 0$ et $\zeta_0 = -1$. Effectivement les quantités $\varkappa$, λ, μ et ν, déterminées par les expressions (52) et (53'''), sont des fonctions finies et continues des quantités l_1, l_2 et a. De même que la quantité N, déterminée par l'expression (61'), doit être finie et continue; de là la continuité de la quantité caractéristique h suivant les conditions désignées.

Si la quantité caractéristique h est imaginaire, son amplitude φ, en qualité de fonction des quantités l_1, l_2 et a, conserve la continuité ainsi que h.

D'après les conditions (63) elle ne surpasse pas la limite $\frac{\pi}{2}$, de sorte que cette limite est le *maximum* de l'amplitude φ. C'est ce *maximum* qu'atteint successivement l'amplitude φ croissante pendant les changements continus de l_1, l_2 et a, seulement N devient zéro. Avec les changements ultérieurs de l_1, l_2 et a qui occasionnent des changements la quantité h, l'amplitude φ doit diminuer.

Pendant sa décroissance, l'amplitude φ de la quantité imaginaire caractéristique h peut s'approcher autant que l'on veut de zéro; quand φ atteint zéro, la quantité h devient 1, les racines s_1 et s_2 deviennent égales. Avec les changements ultérieurs des quantités l_1, l_2 et a, qui exigent des changements dans h, cette quantité h doit ou passer dans le domaine des significations réelles, croissant à partir d' 1, ou retourner dans le domaine des significations imaginaires. Dans ce dernier cas l'amplitude φ, ayant atteint zéro en décroissant, doit croître sans interruption partant de zéro, comme de son *minimum*.

Nous voyons de précédant, que le passage de la quantité caractéristique h d'une signification réelle à une signification imaginaire (ainsi que d'une signification imaginaire à une réelle) est possible pendant les changements continues des quantités l_1, l_2 et a. L'un ou l'autre des passages est produit toujours par $h = 1$ et est suivi du cas d'égalité des racines s_1 et s_2 que nous examinons plus bas.

Remarquons qu'au moyen des égalités (60) nous obtenons l'égalité

$$h^2 = \frac{s_2}{s_1}. \tag{64}$$

En exprimant l'intégrale générale de l'équation (42) à l'aide des résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$, nous aurons:

$$w = C_1 W_1\tau + C_2 W_2\tau,$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires. Ayant inclus cette expression w dans l'équation (41), nous trouvons:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c W_2'\tau}{W_1\tau + c W_2\tau} \tag{65}$$

où

$$c = C_1 : C_2$$

et

$$P\tau = \frac{-1}{2a}\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}\left(\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0}\right) = \frac{-1}{2a}\sqrt[3]{\frac{4}{B^2\varrho_0^2}}\left(\frac{R + l_1 i}{\zeta - \zeta_0}\right). \tag{66}$$

La constante c est choisie selon la dépendance de la position initiale du point v, qui, suivant $\tau = 0$, doit absolument se trouver sur la circonférence E_2 (voyez le § 4).

Supposons que le temps τ reçoive un accroissement égal au nombre entier m des périodes 2ω et admettons que la fonction v acquière

la signification v_m dans le moment $\tau + 2m\omega$. Comme en vertu des expressions (58)

$$\left\{\begin{array}{l} W_1(\tau+2m\omega) = s_1^m W_1\tau, \\ W_2(\tau+2m\omega) = s_2^m W_2\tau, \end{array}\right. \tag{66'}$$

nous aurons

$$v_m = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + ch^{2m} W_2'\tau}{W_1\tau + ch^{2m} W_2\tau}, \tag{67}$$

où h est la quantité caractéristique qui vient d'être désignée. L'équation (67) détermine le mouvement du point v dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$ et conduit à beaucoup de conséquences importantes.

Avant tout il faut remarquer que l'équation (67) constitue entre les quantités $Z = v_m$ et $z = h^{2m}$ une relation représentée par l'expression

$$Z = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cz W_2'\tau}{W_1\tau + cz W_2\tau} \tag{68}$$

et connue sous le nom de *transformation linéaire.* Cette relation possède beaucoup de propriétés remarquables qui reçoivent une expression géométrique simple, si l'on désigne les quantités Z et z par des points sur le plan des coordonnées angulaires. La propriété géométrique fondamentale de la transformation (68) consiste en ce qui suit: pendant le mouvement d'un des points Z et z sur la circonférence, l'autre point aussi doit se mouvoir sur une circonférence. Quelque fois l'une des deux circonférences peut se développer en ligne droite, qui peut être considérée comme une circonférence dont le centre est éloigné à l'infini.

Choisissons parmi les propriétés de la transformation linéaire (68) celle que nous nommerons *similitude* de la disposition des points Z et z, qui représentent les quantités Z et z, liées par la coordonnance (68). Si le point z décrit la ligne courbe l, le point Z en décrira une autre L. Nous nommerons ces lignes l et L lignes correspondantes. Admettons que les deux lignes courbes L et l sont finies et continues. La similitude de la disposition des points correspondants Z et z s'exprime par la conservation *d'une successivité égale dans la disposition* de ces points sur l'étendue des courbes correspondantes L et l. Ou, autrement dit, si l'on prend sur la courbe l les points $z_1, z_2, z_3, \ldots$, qui se disposent sur son étendue d'après la succession des index, les points correspondants $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots$ se disposeront le long de la courbe L d'après la même succession des index. Cette propriété de la transformation (68) est le résultat d'une autre propriété, qui appartient à cette transformation ainsi qu'à beaucoup d'autres, et elle est connue sous le nom de similitude des parties infiniment petites.

Dans les paragraphes suivants ces propriétés nous serviront de base pour beaucoup de déductions.

Ecrivons l'équation (67) ainsi:

$$v_m(W_1\tau + ch^{2m}W_2\tau) - P\tau(W_1'\tau + ch^{2m}W_2'\tau) = 0$$

et donnons au nombre m quatre significations: m, m', m'' et m'''. Nous aurons quatre relations, qui seront linéaires et homogènes relativement aux quatre quantités:

$$W_1\tau,\ W_2\tau,\ W_1'\tau,\ W_2'\tau.$$

Par conséquent le déterminant de ces correlations linéaires doit être zéro, c. à. d.

$$(68')\qquad \begin{vmatrix} v_m, & v_m\,h^{2m}, & 1, & h^{2m} \\ v_{m'}, & v_{m'}\,h^{2m'}, & 1, & h^{2m'} \\ v_{m''}, & v_{m''}\,h^{2m''}, & 1, & h^{2m''} \\ v_{m'''}, & v_{m'''}\,h^{2m'''}, & 1, & h^{2m'''} \end{vmatrix} = 0.$$

Au moyen de quoi il est facile d'exprimer v_m par les quantités $v_{m'}$, $v_{m''}$, $v_{m'''}$ et h^2. Il est aisé de voir que l'on peut exécuter la construction du point v_m avec une règle et un compas, si ce tableau des quatre quantités: $v_{m'}$, $v_{m''}$, $v_{m'''}$ et h^2 nous est donné.

La relation (68') prend une forme plus simple, si les nombres entiers m, m', m'' et m''' sont successifs. Arrêtons notre attention sur ce cas et supposons que:

$$m''' = m'' + 1 = m' + 2 = m - 1.$$

Suivant ces conditions la corrélation (68') est reduite à la forme

$$(68'')\qquad \frac{(v_m - v_{m-2})\,(v_{m-1} - v_{m-3})}{(v_m - v_{m-1})\,(v_{m-2} - v_{m-3})} = \frac{(1+h^2)^2}{h^2}.$$

Prenant cette relation comme base, si nous connaissons h^2 et trois significations successives de v_m (par exemple v_0, v_1, v_2), nous obtiendrons tous les points successifs

$$\ldots,\ v_{-2},\ v_{-1},\ v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots$$

Si h^2 n'est pas donnée immédiatement, il suffit de savoir quatre positions du point v_m pour l'obtenir. Ainsi s'il nous est donné la position des points v_0, v_1, v_2 et v_3, en supposant dans la corrélation (68'') $m = 3$, nous aurons l'expression

$$\frac{(v_3 - v_1)\,(v_2 - v_0)}{(v_3 - v_2)\,(v_1 - v_0)} = \left(h + \frac{1}{h}\right)^2.$$

par laquelle il est facile d'obtenir h^2. Ainsi ou peut juger de la quantité caractéristique de h, en prenant pour base l'observation d'un mouvement pendant un intervalle égal à 6ω.

Passons maintenant au cas des racines égales de l'équation (57) ($s_1 = s_2 = s$), c. à. d. au cas pour lequel la condition

$$(69)\qquad (\varkappa + \nu)^2 - 4(\varkappa\nu - \lambda\mu) = 0$$

a lieu, ou, autrement dit, quand $N^2 = 1$. *La quantite caractéristique h se change en* 1. Les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ caractérisées par ce qu'elles satisfont aux conditions (54) cessent d'être différentes, c. à. d. que dans le cas que j'examine il n'y a que la seule résolution $W_1\tau = W_2\tau = W\tau$; qui satisfasse la condition (54). La seconde résolution, qui manque, est remplacée dans ce cas par la résolution de $W_3\tau$, qui satisfait la condition

(70) $$W_3(\tau+2m\omega) = s^m[W_3\tau+2m\omega\, W_1\tau],$$

où s est la racine de l'équation (57) et m est un nombre entier. Afin d'obtenir la résolution exigée $W_3\tau$, on peut se servir de son expression faite à l'aide des résolutions fondamentales $w_1\tau$ et $w_2\tau$, justement:

(71) $$W_3\tau = p_3 w_1\tau + q_3 w_2\tau.$$

Ayant introduit cette expression $W_3\tau$ et l'expression $W_1\tau$, déterminée par la première des équations (58'), dans l'expression (70), prise avec $m = 1$, et nous servant ensuite des relations (44), nous obtiendrons une identité, d'où nous pourrons déduire que:

(72) $$\begin{cases}(\varkappa - s)p_3 + \mu q_3 = 2\omega s,\\ \lambda p_3 + (\nu - s)q_3 = 2\omega s q_1,\end{cases}$$

où

(72') $$s = \frac{\varkappa+\nu}{\mu} \quad \text{et} \quad q_1 = \frac{\nu-\varkappa}{\mu}.$$

Les équations (72) ne différent l'une de l'autre que par le multiplicateur commun; c'est pourquoi une des quantités p_3 et q_3 reste arbitraire. Supposons que $p_3 = 0$, de sorte que nous aurons:

(71') $$W_3\tau = q_3 w_2\tau,$$

où

(72'') $$q_3 = \frac{2\omega s}{\mu} = \frac{2\omega s q_1}{\nu - s}.$$

Après avoir choisi ainsi $W_3\tau$, nous obtiendrons pour la détermination de la quantité v l'expression:

(73) $$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cW_3'\tau}{W_1\tau + cW_3\tau},$$

où c est une constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E_2 (dans le moment $\tau = 0$). Si τ reçoit l'accroissement de $2m\omega$, où m est un nombre entier, la quantité v se change en v_m, quantité, qui, suivant l'expression (70) et l'expression

(73') $$W_1(\tau+2m\omega) = s^m W_1\tau,$$

s'exprimera de la façon suivante:

(74) $$v_m = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + 2m\omega W_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + 2m\omega\, W_1\tau)}.$$

Il résulte des remarques précédentes trois cas: 1) quand la quantité caractéristique h est une quantité réelle, satisfaisante à la condition (62), 2) quand h est une quantité imaginaire de la forme: $e^{\varphi i}$, satisfaisante aux conditions (63), et 3) quand $h = 1$. Dans les deux premiers cas le mouvement du point v est déterminé au moyen de l'expression (65) et dans le troisième cas, qu'on doit considérer comme cas transitoire par rapport aux deux premiers, le mouvement du point v se détermine par l'expression (73).

Le tableau de rotation présente dans chacun de ces cas des particularités, qui se trouvent en relation avec la question concernant la possibilité ou l'impossibilité de l'existence des mouvements périodiques, produits par le point v, avec la période 2ω; mouvements, déterminés par la formule (65), l'un d'après $c = 0$ et l'autre d'après $c = \infty$. Nous avons pour le premier de ces mouvements périodiques:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}, \tag{75}$$

pour le second mouvement nous avons:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_2'\tau}{W_2\tau}. \tag{76}$$

Examinons les trois cas que nous avons énoncés précédemment.

§ 6.

Rotation du solide dans le cas, où le corps pesant est capable de produire deux mouvements asymptotiques périodiques avec la période 2ω.

Arrêtons notre attention sur le cas où les racines s_1 et s_2 de l'équation (57) ne sont pas égales et où h est une quantité *réelle*, qui satisfait la condition (62).

Supposons que la constante c de l'expression (65), déterminée par la position initiale du point v, soit une quantité finie et différente de zéro. En examinant le mouvement du point v dans la phase du temps, pendant lequel τ change en $\tau + 2m\omega$, nous devons avoir recours à la formule (67), qui détermine la position correspondante v_m du point v. Cette formule nous démontre ce qui suit.

Si le nombre entier m tend à $-\infty$, la quantité h^{2m} tend à zéro et le point v_m tend à la position, pour laquelle nous avons

$$v_{-\infty} = P\tau \, \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}. \tag{77}$$

Par conséquent le mouvement du point v, n'étant pas périodique pour le temps fini τ, tend avec *la décroissance* infinie du temps τ au *mouvement périodique avec la période* 2ω, *lequel mouvement est déterminé au*

moyen de l'expression (75). Nommons ce mouvement périodique du point v et du point V correspondant sur la sphère O mouvement *asymptotique* périodique de *premier* genre.

Si le nombre m tend à $+\infty$, la quantité h^{2m} tend à $+\infty$ et le point v_m tend à la position, pour laquelle nous avons

$$(78) \qquad v_{+\infty} = P\tau \frac{W_2'\tau}{W_2\tau}.$$

Par conséquent le mouvement du point v, n'étant pas périodique pour le temps fini τ, tend avec *la croissance* infinie du temps τ au *mouvement périodique avec la période* 2ω, *lequel mouvement est déterminé au moyen de l'expression* (76). Nommons ce mouvement périodique du point v et du point correspondant V sur la sphère O mouvement *asymptotique* périodique de *second* genre.

Ainsi, quand le temps τ tend à $\pm\infty$, l'impériodicité du mouvement des points v et V se perd successivement et ce mouvement devient périodique de tel ou tel genre dans les limites.

Il s'ensuit, en outre, que les rotations périodiques (75) et (76) sont possibles avec h réelle et qu'on peut choisir les circonstances initiales de façon que chacune de ces rotations puisse se réaliser immédiatement.

Il est facile de découvrir que le mouvement périodique du point v, déterminé par l'expression (75), n'est pas stable par rapport au temps τ *croissant* infiniment, et que le mouvement périodique du point v, déterminé par l'expression (76), n'est pas stable par rapport au temps τ *décroissant* infiniment. Effectivement, par exemple, le mouvement périodique de *premier* genre, déterminé par l'expression (65) avec $c = 0$, devient, prenant c aussi petite que l'on veut, un mouvement agité impériodique, qui se développe en un mouvement périodique de *deuxième* genre avec le temps τ croissant sans limites, et par conséquent s'éloigne beaucoup de la rotation périodique de premier genre.

La relation entre les quantités:

$$(79) \qquad z = h^{2m} \quad \text{et} \quad Z = v_m,$$

représentée par l'expression (67), appartient évidemment à la transformation linéaire (68). En même temps les quantités correspondantes z et Z, déterminées par les expressions (79), sont disposées l'une sur l'axe $O\xi$, l'autre sur la circonférence E (voyez § 4). Pour cette raison et en vue de la propriété générale de la transformation (68), le point Z doit se mouvoir sans interruption sur la circonférence E, pendant que le point z change sa place sans interruption sur l'axe $O\xi$ des abscisses ou, pour mieux dire, la quantité z change en gardant ses significations *réelles*.

Par là on remarque, en outre, que les mouvements mécaniques

possibles du solide, que nous éxaminons, ne différant que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2 (dans le moment $\tau = 0$), se déterminent, ayant les autres circonstances initiales pareilles, par l'expression de la forme:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cz W_2'\tau}{W_1\tau + cz W_2\tau}, \tag{80}$$

où z est une quantité arbitraire constante *réelle*. Effectivement, si la quantité z de la formule (80) n'était pas réelle, les positions du point correspondant v ne se seraient pas placés sur la circonférence E dans les phases du temps $\tau + 2m\omega$, ce qui aurait contredit les propriétés du module v, montrées au commencement du § 4.

Si dans l'expression (68) z change sans interruption de 0 à $+\infty$, le point Z ne décrit sans interruption qu'une partie de la circonférence E, représentée par l'arc $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$. Comme on le voit d'après la similitude de la disposition des points Z et z, déterminés par les expressions (79), les points v_m doivent être disposés sur cet arc et ils doivent y être disposés successivement dans l'ordre de la croissance de l'index m (car les points correspondants, qui représentent les quantités h^{2m}, se disposent sur l'axe $O\xi$ dans l'ordre de la croissance de l'exposant m). Les points correspondants V_m de la sphère O se disposent de la même façon sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F.

Le point v ne se serait engagé sur l'arc, qui complète $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$ jusqu'à la circonférence entière E, qu'après avoir eu une autre position initiale, avec laquelle le signe de la constante arbitraire c aurait changé (car le point Z décrit cet arc complémentaire, quand z change de 0 jusqu'à $-\infty$, c. à. d. quand z a une signification négative).

Il n'est pas difficile de remarquer ce qui suit; quand le nombre m tend à $-\infty$, le point v_m tend au point $v_{-\infty}$ de sorte, que ses positions successives v_m et v_{m+1} se rapprochent de plus en plus, formant dans la limite sur l'arc $v_{-\infty} v_0 v_{+\infty}$, près de $v_{-\infty}$, une ligne pointillée, composée d'une rangée de points infiniment rapprochés les uns des autres. Il y a le même rapprochement des points v_m près des points $v_{+\infty}$ dans le cas où la quantité m tend à $+\infty$. Les points V_m forment des lignes pointillées auprès des points $V_{-\infty}$ et $V_{+\infty}$ sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F.

Si nous supposons que le temps τ change sans interruption depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$, les points v_m décriront dans le plan $\xi O \eta$ des courbes S_m, et les points correspondants V_m de la sphère O décriront les courbes Σ_m. Nous n'arrêterons principalement notre attention que sur les courbes Σ_m, d'après lesquelles il est facile de se représenter la position et les propriétés des courbes S_m.

Chaque courbe Σ_m commence au point U_m de le circonférence F_3, où

se trouve le point V_m au moment $\tau = -\omega$; puis la courbe Σ_m, allant en haut, passe par l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3, en atteignant les circonférences F_2 dans le point, où se trouve le point mobile V_m au moment $\tau = 0$; puis la courbe Σ_m retourne dans le domaine de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 et, baissant successivement, atteint au moment $\tau = +\omega$ la circonférence F_3 au point U_{m+1}, qui sert de commencement à la courbe Σ_{m+1}.

Les Σ_m représentent, avec différentes valeurs de m, des morceaux d'une seule et même courbe sans interruption et ouverte Σ. Ces morceaux se relient sur la circonférence F_3 de sorte, que la fin du morceau Σ_m soit le commencement du morceau Σ_{m+1}.

Sousentendons par K_m et L_m les parties de la courbe Σ_m, décrites par le point V_m, l'une d'elles dans l'intervalle τ de $-\omega$ jusqu'à 0 et l'autre de 0 jusqu'à $+\omega$. Comme les points V_m de la circonférence F ne peuvent pas coïncider les uns avec les autres, les courbes

$$\ldots, K_{-2}, K_{-1}, K_0, K_1, K_2, \ldots$$

ne peuvent pas s'entrecroiser. De même que

$$\ldots, L_{-2}, L_{-1}, L_0, L_1, L_2, \ldots$$

ne peuvent pas s'entrecroiser. Mais les courbes K peuvent se croiser avec quelques unes des courbes L.

Si les courbes L_m et $K_{m'}$ se croisent au point α, les points V_m et $V_{m'}$ doivent prendre la position α dans des moments égaux par leur quantité absolue et contraire par leur signe (car les points V_m et $V_{m'}$ peuvent entrer sur la même circonférence F seulement dans les moments $\pm\tau$, pendant le changement de τ de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$). C'est pourquoi le temps de l'introduction du point V_m dans la position α est déterminé par l'équation:

$$(80') \qquad v_m\tau = v_{m'}(-\tau), \quad 0 < \tau < +\omega,$$

où, en général, $v_m\tau$ est la désignation abrégée de la fonction, qui se trouve dans la deuxième partie de l'expression (67).

Les courbes des limites $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$ partagent la zone sphérique, renfermée entre les circonférences F_2 et F_3, en deux parties; dans l'une de ces parties se placent toutes les courbes K_m, se suivant dans l'ordre de l'accroissement de l'index m. L'autre partie de cette zone sphérique ne renferme pas de courbes K_m. Ces conclusions dérivent de la disposition des points V_m sur l'arc $V_{-\infty} V_0 V_{+\infty}$ de la circonférence F. Il résulte encore de l'examen de cette disposition, que les courbes successives K_m et K_{m+1} se rapprochent de plus en plus les unes des autres, à mesure qu'elles s'approchent de chacune des positions de la

limite $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$, et forment près des courbes $K_{-\infty}$ et $K_{+\infty}$ une multitude de lignes serrées infiniment.

C'est de la même façon que se disposent successivement les courbes L_m toutes dans une seule partie de la zone sphérique, séparée en deux par les courbes $L_{-\infty}$ et $L_{+\infty}$.

Les lignes L_m et K_m forment un filet par leur croisements réciproques dans les parties de la zone sphérique, qu'elles remplissent; ce filet a différentes épaisseurs dans différents endroits; il sera d'une épaisseur infinie près des points, où les courbes $K_{-\infty}$ et $L_{-\infty}$ et de même où les courbes $K_{+\infty}$ et $L_{+\infty}$ se relient.

La courbe Σ, qui est composée des morceaux Σ_m ou, autrement, des courbes K_m et L_m, est décrite entièrement par le point V de la sphère O avec le changement de τ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Quant aux morceaux de la limite $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ de la courbe Σ, chacun d'eux représente une ligne *fermée* et est décrit d'une manière correspondante par le point V dans la période du temps 2ω, si l'on peut toutefois admettre un des mouvements correspondants asymptotiques périodiques du premier ou du deuxième genre, déterminés par les expressions (75) et (76).

Passons à présent à l'examen d'un nombre remarquable, qui caractérise les trajectoires Σ, $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$; caractérise les accroissements de la longitude Φ du point V, qui s'acquièrent pendant que le point V décrit les arcs donnés.

Représentons sur la sphère O une courbe fermée quelconque σ, qui ne passe pas par les pôles, c. à. d. les points du croisement de cette sphère avec l'axe $O\zeta$. Supposons, que le point mobile V fasse le tour de cette courbe fermée dans la direction donnée jusqu'à son retour au point de sortie. Pendant ce mouvement la longitude Φ du point V ou, autrement, l'amplitude Φ de la quantité v, représentée sur la sphère O par le point V, changera sans interruption. L'accroissement de cette amplitude Φ sera exprimé, après que le point mobile V ait produit le tour, par le nombre entier j des circonférences 2π, c. à. d. que cet accroissement sera égal à $2j\pi$. Ce nombre j exprimera en même temps le *nombre des tours* produits par la courbe fermée σ autour de l'axe $O\zeta$; le signe du nombre j montrera la direction dans laquelle se produisent ces tours. Autrement dit, j exprime le nombre des tours, faits autour de l'axe $O\zeta$ par le segment OV, pendant que le point V fait le tour désigné de la courbe fermée σ.

Montrons dès à présent la propriété fondamentale suivante de ce nombre j. Le nombre j des tours, faits par la courbe fermée σ autour de l'axe $O\zeta$, *ne change pas*, si nous déformons cette courbe en faisant changer la place ses parties sur la surface de la sphère O, admettant, avec cela, le changement de la longueur de cette courbe (l'élasticité),

mais n'admettant pas la rupture de ses parties et son passage par les pôles de la sphère O. On peut, pour plus de clarté, se présenter la courbe σ, pendant ses déplacements, sous la forme d'un fil flexible, élastique et fermé, qui permet un déplacement libre par toute la surface de la sphère O, excepté par ses pôles, où le fil rencontre un obstacle à son déplacement. On peut se représenter cet obstacle sous la forme d'une tige dure cylindrique infinie coïncidant avec l'axe $O\zeta$; cette tige dure ne laisse pas passer un fil flexible par les pôles. Avec ces conditions le déplacement arbitraire sur la sphère O du fil fermé σ, que nous examinons, présente la déformation de la courbe σ, avec laquelle les nombres des tours, qu'elle produits autour de l'axe OZ, *ne peut changer*.

Nous nommerons le déplacement de la courbe σ suivant toutes ces conditions sa *déformation continuelle*. D'après la constance des nombres des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par le fil fermé, qui est déformé continuellement, ou peut déduire, que deux courbes fermées produisent *le même nombre* de tours autour de l'axe $O\zeta$, si elles peuvent être amenées à leur coïncidence par des déformations continuelles ou si elles peuvent être amenées à coïncider chacune séparément avec une troisième courbe fermée, soumise à une déformation continuelle.

Plus loin nous examinerons plusieurs courbes fermées, qui se composent des parties de la trajectoire Σ et des arcs de la circonférence F dans ses différentes positions. Voilà pourquoi il est indispensable d'établir relativement aux arcs de la circonférence F les indications uniformes suivantes.

Considérant les nombres m' et m'' comme des nombres entiers, supposons que τ reste invariable dans la deuxième partie de l'expression (80), et que z change continuellement de $h^{2m'}$ jusqu'à $h^{2m''}$. Sous ces conditions le point v, représentant la quantité déterminée par l'expression (80), décrira l'arc de la circonférence E, enfermée dans les points $v_{m'}$ et $v_{m''}$. Nous désignons justement l'arc correspondant de la circonférence F sur la sphère O par $V_{m'}\,V_{m''}$, et par $U_{m'}\,U_{m''}$ nous désignerons l'arc de la circonférence F_3, avec laquelle coïncide l'arc $V_{m'}\,V_{m''}$ dans le mouvement $\tau = -\omega$.

N'oublions pas ces indications et imaginons nous la courbe Σ_m, formant le morceau nommé de la trajectoire Σ, et l'arc $U_{m+1}\,U_m$ de la circonférence F_3. Ces deux courbes, prises ensemble, forment une courbe fermée que nous désignerons par σ_m. Donnant à m des significations différentes entières, nous obtiendrons un groupe de courbes fermées de ce genre. Ces courbes joueront un rôle important dans notre théorie.

Si l_1 n'est pas un zéro, la zone sphérique, enfermée dans les circonférences F_2 et F_3, ne peut pas s'étendre jusqu'aux pôles de la sphère O (comme il est démontré dans le § 4), et par conséquent les

courbes fermées σ_m ne peuvent pas passer par ces pôles. Au contraire ayant $l_1 = 0$, la zone sphérique désignée s'étend au moins jusqu'à un des pôles de la sphère O et chaque courbe fermée σ_m passe tout au moins par un pôle. A cause de cela nous écarterons le cas $l_1 = 0$, en supposant que l_1 est différent de zéro, de sorte qu'aucune des courbes fermées σ_m ne passera par les pôles de la sphère O.

Démontrons ensuite, que les *courbes fermées*

(81) $$\ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$.

Disposons les courbes σ_m de la déformation continuelle dans l'ordre suivant. Examinons une autre trajectoire, ayant pris, pour déterminer le mouvement du point V, l'expression (80), qui correspond à une autre position initiale du point v sur la circonférence E_2, et non pas l'expression (65). Le caractère de cette trajectoire reste le même et on peut supposer pour cette trajectoire des courbes fermées $\sigma_m(z)$, qui ont leur construction analogique aux courbes σ_m; mais à présent ces courbes $\sigma_m(z)$ dépendent de z; elles se déplaceront pendant le changement continuel de z, satisfaisant à toutes les éxigeances de la déformation continuelle, que nous avons nommée, et elles coïncideront avec les courbes précédentes σ_m ayant $z = 1$. Supposons que z croisse continuellement de 1 jusqu'à h^2. Il est évident qu'avec ce changement la courbe $\sigma_m(z)$, que nous déformons, conservera le nombre des tours autour de l'axe $O\zeta$ et passera avec cela de sa position initiale σ_m (ayant $z = 1$) à la position finale (ayant $z = h^2$), qu'a occupée au commencement la courbe σ_{m+1}. On voit par là que les courbes σ_m et σ_{m+1} font le même nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$.

Après avoir montré ainsi la constance du nombre des tours, produits par chaque courbe fermée σ_m autour de l'axe $O\zeta$, désignons ce nombre constant par J et nommons le le «*index*» du mouvement, que nous examinons.

Quand $m = \pm\infty$ l'arc $U_m U_{m+1}$ tend à zéro. C'est pourquoi la courbe $\sigma_{+\infty}$ change en courbe $\Sigma_{+\infty}$ et la courbe $\sigma_{-\infty}$ en $\Sigma_{-\infty}$. Il s'ensuit que les courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ produisent chacune un nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$ égal à l'index J. Autrement dit, si un des mouvements périodiques, déterminés par les expressions (75) et (76), a lieu, la ligne verticale OV fait pendant ce mouvement et dans le période du temps 2ω le nombre J de tours autour de l'axe $O\zeta$.

Etendons la notion du nombre des tours, produits par la courbe autour de l'axe $O\zeta$, jusqu'aux courbes *ouvertes*, tracées sur la sphère O. Déterminons, pour la courbe donnée de ce genre, le nombre j des tours, qu'elle produit autour de l'axe $O\zeta$, de la manière suivante:

$$j = \frac{\Phi_1 - \Phi}{2\pi},$$

où $(\Phi_1 - \Phi)$ est l'accroissement de l'amplitude Φ de la quantité v; cet accroissement s'acquiert pendant que le point V, représentant la quantité v de la sphère O, décrit la courbe donnée.

Ensuite supposons que le mouvement impériodique du point V, déterminé par l'expression (65), puisse être admis. Examinons le nombre j_k des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la partie de la trajectoire Σ, qui est décrite par le point mobile V dans un nombre entier k de périodes 2ω.

Démontrons que ce nombre j_k peut toujours être représenté ainsi:

(82) $$j_k = J \,.\, k + \alpha,$$

où $-1 < \alpha < +1$. Représentons le moment, à partir duquel commence l'intervalle $2k\omega$, par la forme: $\tau = \tau' + 2m\omega$, où m est un nombre entier et $-\omega \leqq \tau' \leqq +\omega$. Représentons ensuite les morceaux

$$\mathfrak{S}_m,\ \mathfrak{S}_{m+1},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ, décrits par les points

$$V_m,\ V_{m+1},\ \ldots,\ V_{m+k-1}$$

pendant le changement du temps τ depuis τ' jusqu'à $\tau' + 2\omega$. Ce sont juste ces morceaux, qui sont décrits successivement par le point V dans l'intervalle de $2k\omega$, si l'on prend pour commencement le moment $\tau' + 2m\omega$. Nous entendons par

$$V'_m,\ V'_{m+1},\ \ldots,\ V'_{m+k}$$

les positions des points

$$V_m,\ V_{m+1},\ \ldots,\ V_{m+k}$$

dans le moment $\tau = \tau'$; les morceaux désignés

$$\mathfrak{S}_m,\ \mathfrak{S}_{m+1},\ \ldots,\ \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ se transforment en courbes fermées

$$\mathfrak{Z}_m,\ \mathfrak{Z}_{m+1},\ \ldots,\ \mathfrak{Z}_{m+k-1}$$

par la jonction des arcs correspondants

$$V'_m\, V'_{m+1},\ V'_{m+1}\, V'_{m+2},\ \ldots,\ V'_{m+k-1}\, V_{m+k},$$

qui sont décrits dans la direction *opposée*. Ces courbes fermées sont conduites, par la déformation continuelle de leurs parties, à la coïncidence avec les courbes correspondentes

$$\sigma_m,\ \sigma_{m+1},\ \ldots,\ \sigma_{m+k-1}.$$

Telle est la déformation continuelle, que ces courbes subissent pendant le changement continuel de la quantité τ' jusquà $-\omega$. A cause de cela chacune des courbes fermées

$$\mathfrak{Z}_m,\ \mathfrak{Z}_{m+1},\ \ldots,\ \mathfrak{Z}_{m+k-1}$$

fait le nombre J de tours autour de l'axe $O\zeta$; prises ensemble elles

produisent $J.k$ de tours. Pour obtenir à présent le nombre j_k, il ne reste, qu'à ajouter au nombre $J.k$ le nombre α des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la joncion des arcs

$$V'_m V'_{m+1}, \ldots, V'_{m+k-1} V'_{m+k},$$

ou, autrement dit, par l'arc $V'_m V'_{m+k}$. Ainsi nous obtiendrons la formule (82), dans laquelle le nombre α des tour, produits autours de l'axe $O\zeta$ par l'arc $V'_m V'_{m+k}$, doit être plus petit que 1 par sa quantité absolue (car l'arc $V'_m V'_{m+k}$ ne peut faire qu'une partie d'un tour entier autour de l'arc $O\zeta$, puisqu'il ne compose qu'une partie de l'arc $V'_{-\infty} V'_0 V'_{+\infty}$ de la circonférence F'). Le signe du nombre $k.\alpha$ n'est pas changé, quelque soit le k, pour la trajectoire donnée, et ne dépend que de la position initiale du point v.

Le nombre α, que nous venons d'examiner, tend à zéro, quand, le nombre fini k existant, le nombre m tend à $\pm\infty$, car dans ce cas l'arc $V'_m V'_{m+k}$, proportionné au nombre α, tend à zéro.

La formule (82) montre, que l'index J a une signification essentielle dans la détermination de la partie entière du nombre des tours, produits dans l'intervalle $2k\omega$ par le point V. On peut dire la même chose des tours qui sont produits par la ligne verticale OV autour de l'axe $O\zeta$, dirigée vers le centre de gravité G. En plus la détermination de tout un nombre de circonférences entières 2π, qui se trouvent dans l'accroissement relative de l'amplitude de Φ de la quantité v, dépend aussi de l'index J. En vue de cela il est important de pouvoir déterminer le nombre par lequel s'exprime l'index J du mouvement que nous éxaminons.

Répondons à l'instant, que *l'index J du mouvement, que nous éxaminons, égale zéro.* Cependant nous ne pouvons donner la preuve entière de cette thèse que plus loin (voyez le § 9). Pour préparer les bases de la démonstration de cette supposition, remarquons ce qui suit.

On voit par l'examen de la déformation des courbes $\sigma_m(z)$, que nous avons étudiée, que l'index J reste coustant, si nous passons d'un mouvement à un autre en changeant la constante réelle z de la formule (80) qui détermine le mouvement, c. à. d. si nous déplaçons la position initiale du point v sur la circonférence E_2. D'ailleurs il n'est pas difficile de démontrer, que l'index J reste constant encore, quand les quantités constantes l_1, l_2 et a changent continuellement pendant le passage d'un mouvement à un autre, pourvu que la quantité caractéristique h reste réelle, on observeles conditions (17) et l_1 ne devient pas zéro. Effectivement des changements continuels de ce genre occasionnent des changements *continus* dans la quantité h et dans les fonctions, qui déterminent la dosition du point v. Ces changements n'occasionnent que le déplacement de la courbe σ_m sans la rupture de ses parties et sans que ces parties passent par l'axe $O\zeta$.

Ces déformations continuelles ne changent pas le nombre des tours de la courbe σ_m autour de l'axe $O\zeta$ et par conséquent elles ne changent pas l'index J du mouvement.

Plus tard nous nous servirons de ces remarques pour base de la preuve du théorème, par lequel l'index J du mouvement est toujours zéro (voyez le § 9).

Supposons que $J = 0$, et fixons notre attention sur quelques conséquences de cette supposition, lesquelles forment la particularité essentielle du cas, où la quantité caractéristique h est une quantité réelle.

Si $J = 0$, les courbes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ ne font pas de tours autour de l'axe $O\zeta$ et leurs projections $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ se disposent sur le plan $\xi O \eta$ d'une manière, présentée dans la figure 3, où les courbes $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ sont représentées schématiquement par des lignes fermées $u u_1 u_2 u_3$ et $u' u_1' u_2' u_3'$. Pendant le mouvement du point v le long de chacune de ces courbes, l'amplitude de la quantité correspondante v, déterminée par l'angle $\xi O v$, ne peut jamais sortir hors les limites finies. Par conséquent, pendant la croissance illimitée du temps τ, l'amplitude Φ de la quantité v, déterminée par chacune des expressions (75) et (76), *doit toujours varier dans les limites finies et doit garder une valeur finie ayant* $\tau = \infty$.

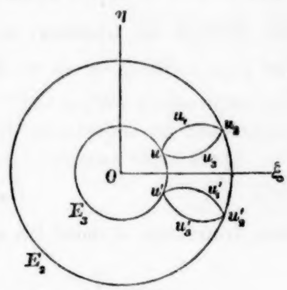


Fig. 3.

Cette conclusion s'étend jusqu'au mouvement impériodique du point v, déterminé par l'expression (65). Effectivement si $J = 0$, le nombre j_k, proportional à l'accroissement de l'amplitude correspondante Φ de la quantité v obtenu dans l'intervalle $2k\omega$, s'exprime, comme l'expression (82) le montre, ainsi:

$$j_k = \alpha, \quad -1 < \alpha < +1.$$

Ce nombre j_k reste fini avec n'importe quelle nombre de k; c'est pourquoi l'amplitude Φ de la quantité v, déterminée par l'expression (65), doit toujours varier dans les limites finies pendant la croissance illimitée du temps τ et doit garder une valeur finie quand $\tau = \infty$.

Nous nous servirons de ces remarques dans le § 9 après avoir démontré le théorème, par lequel $J = 0$. Ces remarques, entre autre, sont essentiellement importantes pour la déduction du postulat de Mr. B. Mlodzeievsky.

Après avoir examiné les positions relatives des trajectoires des points v et V, qui correspondent à différentes positions initiales du point v sur la circonférence E_2, remarquons, qu'avec les conditions, que nous considérons, les racines s_1 et s_2 de l'équation (57), exprimées

par les expressions (60), et les conjuguées $\bar{s}_1$ et $\bar{s}_2$ sont liées par les relations:

$$\bar{s}_1 \bar{\delta} = - s_1 \delta, \quad \bar{s}_2 \bar{\delta} = - s_2 \delta. \tag{83}$$

Au moyen de ces relations et de celles de (53) nous nous convainquons, que les quantités q_1 et q_2, déterminées par les expressions (58″), et les quantités conjuguées remplissent les conditions:

$$\bar{q}_1 = q_2, \quad \bar{q}_2 = q_1, \tag{83'}$$

c. à. d. que les q_1 et q_2 sont des *quantités imaginaires conjuguées.* Les expressions (58′) et (83′) montrent que:

$$W_1(-\tau) = \overline{W}_2 \tau, \quad W_2(-\tau) = \overline{W}_1 \tau. \tag{84}$$

En dérivant ces relations, nous trouvons:

$$W_1'(-\tau) = - \overline{W}_2' \tau, \quad W_2'(-\tau) = - \overline{W}_1' \tau. \tag{84'}$$

Les expressions (84) et (84′) mènent à toute une suite de conclusions, concernant les trajectoires du point v suivant des conditions différentes.

Après avoir remarqué que suivant l'expression (66)

$$\bar{P}\tau = - P(-\tau), \tag{85}$$

nous trouverons d'abord les expressions:

$$\begin{cases} P(-\tau) \cdot \dfrac{W_1'(-\tau)}{W_1(-\tau)} = \bar{P}\tau \cdot \dfrac{\overline{W}_2' \tau}{\overline{W}_2 \tau}, \\[2ex] P(-\tau) \cdot \dfrac{W_2'(-\tau)}{W_2(-\tau)} = \bar{P}\tau \cdot \dfrac{\overline{W}_{1,} \tau}{\overline{W}_1 \tau}. \end{cases} \tag{85'}$$

Ces expressions démontrent que les trajectoires $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$, qui correspondent aux deux mouvements asymptotiques du point v, déterminés par les expressions (75) et (76), sont disposées symétriquement par rapport à $O\xi$; la position du point v dans le moment τ sur la première trajectoire est symétrique avec la position du point v dans le moment $-\tau$ sur la deuxième trajectoire. Les trajectoires correspondantes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ du point V de la sphère O sont disposées symétriquement par rapport au plan $\xi O \zeta$.

Examinons en second lieu les trajectoires du point v, pour lesquelles sa position initiale (dans le moment $\tau = 0$) coïncide avec l'un des deux points du croisement de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$. Nous avons pour ces positions: $v = \pm\sqrt{1 - \zeta_2^2}$. Par conséquent on choisit la constante c pour les deux trajectoires, que nous examinons, à condition que

$$\pm\sqrt{1 - \zeta_2^2} = P0 \cdot \frac{W_1'0 + c W_2'0}{W_1 0 + c W_2 0}.$$

Cette équation est reduite à la forme:

(86) $$\pm \gamma_2 = \frac{q_1 + c q_2}{1 + c},$$

où

(86′) $$\gamma_2 = \frac{\sqrt{1 - \zeta_2^2}}{i P 0} = \frac{2a}{l_1} \cdot \sqrt[3]{\frac{B^2 \varrho_0^2}{4}} \cdot (\zeta_2 - \zeta_0) \cdot \sqrt{1 - \zeta_2^2}.$$

La quantité γ_2 se détermine aussi par

(86″) $$\gamma_2 = a\, \varepsilon' \sqrt{e_0 - e_2},$$

où $\varepsilon' = \pm 1$, $l_1\, \varepsilon' > 0$. L'expression (86) conduit à deux valeurs de c, savoir:

(87) $$c' = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2}, \quad c'' = -\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2}.$$

Au moyen des expression (83′) nous nous convainquons que ces quantités c' et c'', ainsi que celles qui y sont conjuguées, satisfont les conditions $c'\bar{c}' = 1$, $c''\bar{c}'' = 1$. Par conséquent le module de chacune des quantités c' et c'' est 1. Comme en plus les deux rotations, que nous étudions, font partie du cas général exprimé par l'ex pression (80), nous avons: $c' = cz'$, $c'' = cz''$ et de là $c' = c''z$, où z est une quantité réelle, égale à $z' : z''$. Dans le cas donné la quantité z doit coïncider avec -1; car dans le cas contraire les modules des quantités inégales c' et c''ne pourraient pas coïncider chacun séparément avec 1. Ainsi $z = -1$, autrement $c' = -c''$. A cause de quoi

$$\frac{q_1 + \gamma_2}{q_2 + \gamma_2} = -\frac{q_1 - \gamma_2}{q_2 - \gamma_2},$$

d'où il s'ensuit que

(87′) $$q_1 q_2 = \gamma_2^2.$$

Comme d'après les expressions (83′) les quantités q_1 et q_2 sont conjuguées, il en résulte des expressions (87′) que γ_2^2 est le carré du module de chacune d'elles. C'est pourquoi on peut admettre:

(88) $$\begin{cases} q_1 = \gamma_2 e^{\beta i}, \\ q_2 = \gamma_2 e^{-\beta i}. \end{cases}$$

Nous aurons en même temps:

(88′) $$c' = -c'' = e^{\beta i}.$$

Par conséquent les deux mouvements, que nous examinons, se déterminent ainsi:

(89) $$v = P\tau\, \frac{W_1'\tau \pm e^{\beta i} W_2'\tau}{W_1\tau \pm e^{\beta i} W_2\tau}.$$

Au moyen des expressions (84), (84′) et (85) nous nous convainquons que la quantité v, déterminée par l'expression (89), change en une quantité conjuguée $\bar{v}$, en remplaçant τ par $-\tau$. Il s'ensuit que la trajectoire de chacun des mouvements du point v, auquel correspond,

au moment $\tau = 0$, la position du point v sur l'intersection de l'axe $O\xi$ avec la circonférence E_2, présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Le point v occupe des positions symétriques sur cette trajectoire dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (80) nous pouvons admettre $c = e^{\beta i}$, où β est déterminé par (88). Nous aurons

$$(89') \qquad v = P\tau \frac{W_1'\tau + e^{\beta i} z W_2'\tau}{W_1\tau + e^{\beta i} z W_2\tau},$$

où z est une quantité arbitraire réelle. L'équation (89'), coïncidant avec l'équation (65), concerne plus nettement une forme général de la constante arbitraire c dans la formule (65), précisément: $c = e^{\beta i} z$. Ayant désigné la seconde partie de l'expression (89') plus brièvement par $v(\tau, z)$, au moyen des expressions (84), (84') et (85) nous nous convainquons que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité conjuguée à la fonction

$$v\left(\tau, \frac{1}{z}\right)$$

coïncident. Il s'ensuit que la trajectoire du point v, déterminée par l'expression (89'), et la trajectoire du point v, déterminée par l'expression

$$(90) \qquad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + e^{\beta i} \frac{1}{z} W_2'\tau}{W_1\tau + e^{\beta i} \frac{1}{z} W_2\tau},$$

sont symétriques par rapport à $O\xi$. Le point v occupe des positions symétriques sur l'une et l'autre des trajectoires dans les moments τ et $-\tau$.

Nous examinerons deux mouvements particuliers du point v, déterminés par l'équation (89'). Pour ces deux mouvements z prend deux valeurs:

$$+\frac{1}{h} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{h}.$$

Il est facile de se convaincre par les expressions (66'), (84) et (84'), que la quantité v prend pour chacun de ces mouvements des valeurs conjuguées au regard de $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Conséquemment chacune des trajectoires correspondantes du point v présente une courbe pour laquelle l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie, cependant le point v occupe sur cette trajectoire des positions symétriques dans les moments $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Chacune de ces deux trajectoires doit passer par le point correspondant du croisement de la circonférence E_3 avec l'axe $O\xi$; car le point v doit se trouver sur la circonférence E_3 au moment $\tau = \omega$, de plus il doit être symétrique avec lui-même, c. à. d. qu'il doit se trouver sur l'axe $O\xi$ de la symétrie.

Ainsi nous n'avons que *quatre* trajectoires pareilles pour lesquelles l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie. Chacune d'elles passe par le point correspondant du croisement des circonférences E_2 et E_3 avec l'axe $O\xi$.

§ 7.

Rotation du solide dans le cas, où le corps pesant n'est pas capable de reproduire des mouvements asymptotiques periodiques avec la période 2ω.

Supposons à présent que les racines s_1 et s_2 de l'expression (57) ne sont pas égales et que la quantité caractéristique h est une quantité imaginaire de la forme: $h = e^{\varphi i}$. D'après cela l'amplitude φ de la quantité h satisfait les conditions (63).

En examinant le mouvement du point v, déterminé par l'expression (65), dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$, nous devons avoir recours à l'expression (67), qu'on peut présenter ainsi:

$$v_m = P\tau\, \frac{W_1'\tau + c\cdot e^{2m\varphi i}\, W_2'\tau}{W_1\tau + c\cdot e^{2m\varphi i}\, W_2\tau}. \tag{91}$$

La liaison entre les quantités

$$Z = v_m \quad \text{et} \quad z = e^{2m\varphi i}, \tag{92}$$

représentée par l'expression (91), appartient aussi à la transformation linéaire (68). Les points Z et z, déterminées par les expressions (92), sont disposés, avec différentes valeurs entières de m, le premier sur la circonférence E, et l'autre sur la circonférence E_0, décrite, partant du commencement des coordonnées, par le rayon égal à 1. Souvenons-nous de la propriété de la transformation linéaire (68) et concluons, qu'avec le déplacement continuel du point z sur la circonférence E_0 le point correspondant Z, qui représente une quantité, déterminée par la formule (68), doit incessamment décrire la circonférence E*).

Un tour entier du point Z sur la circonférence E doit correspondre à chaque tour entier du point z sur la circonférence E_0. Si le point z se mouve sur la circonférence E_0 dans une direction positive (dans la direction de l'accroissement de l'amplitude z), le point Z se mouvra sur la circonférence E dans une direction déterminée, qui peut être quelquefois positive et quelquefois négative, c'est comment la direction de l'axe $O\xi$ est choisie. Admettons que la direction de l'axe

*) Dans le cas, où $\varphi = \frac{\pi}{2}$, les équations (91) et (92) déterminent *une seule* paire de points $Z = v_m$, m ayant toute espèce de valeurs. Ce moyen n'éclaircit pas entièrement la position de la circonférence, par laquelle se meut le point Z, quand z se déplace le long de la circonférence E_0. Cependant la conclusion, que nous venons de faire par rapport aux changements continuels de Z et qui est juste quand les significations de φ approchent de $\frac{\pi}{2}$, doit garder aussi sa valeur dans la limite quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

$O\xi$ est choisie de façon que le mouvement du point Z sur la circonférence E se fait dans une direction *positive**).

On voit au moyen des propriétés de la transformation linéaire (68) qui relie les quantités (92), que toutes les rotations mécaniques possibles du solide, que nous étudions, ne différant que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2, se déterminent, ayant toutes les autres conditions initiales égales, par l'expression

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c \cdot e^{\vartheta i} W_2'\tau}{W_1\tau + c \cdot e^{\vartheta i} W_2\tau}, \tag{93}$$

où ϑ est une quantité constante arbitraire *réelle*. Effectivement si, dans la formule (93), la quantité ϑ n'était pas réelle, les positions du point v dans les phases du temps $\tau + 2m\omega$, avec des m différentes, ne se disposeraient pas sur la même circonférence E, ce qui contredirait les propriétés du module de v que nous avons démontrées au commencement dans le § 4.

Comme l'expression $ce^{\vartheta i}$ ne peut jamais devenir zéro ou infini pour les valeurs réelles de ϑ, la formule (93) ne peut jamais coïncider avec l'une ou l'autre des formules (75) et (76). C'est qu'avec les conditions présentes (c. à. d. avec h imaginaire) pas un des mouvements periodiques du point v avec la période 2ω, déterminés par les expressions (75) et (76), ne peut être produit dans le solide donné.

En sousentendant par m' et m'' des nombres entiers et par $v_{m'}$ et $v_{m''}$ des quantités correspondantes, déterminées au moyen de l'expression (91), convenons de sousentendre par $v_{m'}v_{m''}$ l'arc de la circonférence E que le point v décrit, pendant le changement continuel de ϑ de $2m'\varphi$ jusqu'à $2m''\varphi$; le point mobile v est déterminé par l'expression (93), dans laquelle τ reste invariable. Nous désignerons l'arc correspondant de la circonférence E sur la sphère O par $V_{m'}V_{m''}$; et nous designerons par $U_{m'}U_{m''}$ l'arc de la circonférence F_3, avec laquelle l'arc $V_{m'}V_{m''}$ coïncide au moment $\tau = -\omega$.

Examinons le nombre j des tours, produits par l'arc $V_m V_{m+k}$ autour de l'axe $O\xi$. Présentons la quantité $2k\varphi$ ainsi

$$2k\varphi = 2k_1\pi + \varphi_0, \tag{93'}$$

où k_1 est un nombre entier et φ_0 est choisi d'après les conditions:

$$0 \leq \varphi_0 < 2\pi. \tag{93''}$$

*) Le changement de la direction de l'axe $O\xi$ est reduit au changement de la direction Ox; avec le changement de la direction positive de l'axe Ox le signe de chacune des quantités x_0, γ, a et p change et, comme le montrent les expressions (6), le signe de la quantité ξ change aussi, c. à. d. que c'est la direction positive de l'axe $O\xi$ qui change. Quant aux signes des quantités η et ζ, ils ne changent pas avec le changement indiqué de la direction de l'axe Ox, comme on le voit au moyen des expressions (6).

L'expression (93′) montre qu'avec le changement de ϑ de $2m\varphi$ jusqu'à $2(m+k)\varphi$ le point $z=e^{\vartheta i}$ fait k_1 de tours complets sur la circonférence E_0 et plus il fait la partie du tour complet qui correspond au changement de ϑ de $2(m\varphi+k_1\pi)$ jusqu'à $2(m\varphi+k_1\pi)+\varphi_0$. Par conséquent, d'après la propriété de la transformation linéaire (68) ou (93), le point correspondant Z ou v doit faire aussi k_1 de tour entiers et la partie α d'un tour entier sur la circonférence E. Le point correspondant V de la sphère pression (93), et décrit l'arc $V_m V_{m+k}$. On voit par là que le nombre cherché j des tours, produits par l'arc $V_m V_{m+k}$ autour de l'axe $O\zeta$, doit être représenté ainsi:

$$j = k_1 + \alpha, \tag{94}$$

où $0 \leq \alpha < 1$ et k_1 et un nombre entier, déterminé par l'expression (93′) suivant les conditions (93″).

Il est évident que quand φ_0 est petit, le nombre α doit être aussi petit. Si $\varphi_0 = 0$, $\alpha = 0$.

Au moyen de (63), (93′) et (93″) il est facile de se convaincre, que chacun des arcs $V_m V_{m+1}$ et $V_m V_{m+2}$ ne fait qu'une partie d'un tour entier autour de l'axe $O\zeta$.

Etablissons ensuite la notion de l'index de la rotation examinée, entièrement analogue à la notion correspondante, que nous avons expliquée dans le paragraphe précédent.

Représentons le morceau Σ_m de la trajectoire Σ, décrit par le point V_m qui représente la quantité v_m, déterminée par l'expression (91), pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Désignons ensuite par σ_m une courbe fermée, composée de la courbe nommée précédemment Σ_m et de l'arc $U_{m+1} U_m$ de la circonférence F_3, avec lequel l'arc $V_{m+1} V_m$ coïncide dans le moment $\tau = -\omega$. Elargissons le cas $l_1 = 0$, car dans ce cas chaque courbe fermée σ_m passe au moins par un des pôles de la sphère O.

Les courbes fermées

$$\ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots \tag{94′}$$

font chacune un nombre *égal* de tours autour de l'axe $O\zeta$. Pour démontrer cette supposition, plaçons les courbes σ_m de la déformation continuelle dans l'ordre suivant. Examinons l'autre trajectoire du point V, après avoir pris, pour déterminer sa rotation, non pas l'équation (65), mais la (93) qui correspond à une autre position initiale du point v sur la circonférence E_2. On peut imaginer pour cette trajectoire des courbes fermées correspondantes $\sigma_m(\vartheta)$, qui ont leur construction analoge aux courbes σ_m. Les courbes $\sigma_m(\vartheta)$ coïncident avec les courbes (94′), quand $\vartheta = 0$, et se déforment continuellement pendant la croissance de ϑ de 0 jusqu'à 2φ. Il est évident, qu'avec

une déformation continuelle pareille la courbe $\sigma_m(\vartheta)$ passera de sa position initiale σ_m (suivant $\vartheta = 0$) à une position finale (quand $\vartheta = 2\varphi$), qui était occupée d'abord par la courbe σ_{m+1}; pendant son déplacement la courbe $\sigma_m(\vartheta)$ gardera invariable le nombre des tours qu'elle produit autour de l'axe $O\zeta$. Il s'ensuit que les courbes (94') font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$.

Désignons ce nombre de tours par J et nommerons le «*index*» du mouvement examiné. Il s'agit d'éclaircir à présent la question de la détermination de ce nombre, qui joue un grand rôle dans le mouvement que nous examinons.

Disons d'abord sans preuve que *l'index J est toujours égal à zéro dans le cas que nous examinons.* Remettons la preuve entière de cette supposition jusqu'au § 9. Maintenant arrêtons notre attention sur la constance de l'index J avec le changement de quelques quantités constantes.

L'examen de la déformation ci-devant désignée des courbes $\sigma_m(\vartheta)$ montre, que l'index J ne change pas, s'il passe d'un mouvement à l'autre, en changeant la constante ϑ dans l'équation (93), qui détermine le mouvement, c. à. d. en déplaçant la position initiale du point v sur la circonférence E_2.

D'ailleurs il est facile de montrer, que la constance de l'index J est gardée aussi pendant le changement de mouvements, pendant lequel les constantes l_1, l_2 et a changent constamment, si seulement la quantité caractéristique h reste imaginaire, on observe les conditions (17) et la quantité l_1 ne devient pas zéro. Effectivement les changements continuels de ce genre produisent des changements continus dans la quantité h et dans les fonctions qui déterminent la position du point v, c. à. d. que ces changements ne font qu'occasionner des déformations continuelles dans les courbes σ_m (sans faire rompre leurs parties et sans les faire passer par l'axe $O\zeta$); ces déformations ne changent pas le nombre des tours, que produit la courbe σ_m autour de l'axe $O\zeta$, et conséquemment ne changent pas l'index J.

Si par conséquent l'index J est un zéro pour la rotation donnée, pour laquelle les conditions (17) doivent être remplies, si la quantité l_1 est différente de zéro et si la quantité h a une valeur imaginaire, l'index J restera aussi zéro aux rotations, pendant lesquelles les constantes l_1, l_2 et a acquièrent des significations contiguëes qui satisfont aux mêmes conditions. Nous nous servirons de cette remarque comme de base pour la preuve, qui montre, que l'index J que nous examinons est toujours égal à zéro (voyez le § 9).

Examinons maintenant le nombre j_k des tours produits autour de l'axe $O\zeta$ par la partie de la trajectoire Σ, décrite par le point V

dans l'intervalle $2k\omega$, égal au nombre entier k des périodes 2ω. Montrons que ce nombre j_k peut toujours être représenté ainsi:

(95) $$j_k = J \cdot k + k_1 + \alpha,$$

où $0 \leqq \alpha < 1$ et k_1 est nombre entier, déterminé par l'expression (93') suivant les conditions (93''). Fixons le moment, à partir duquel commence l'intervalle $2k\omega$, de cette façon: $\tau = \tau' + 2m\omega$, où m est un nombre entier et $-\omega \leqq \tau' \leqq +\omega$. Représentons les morceaux

$$\mathfrak{S}_m,\ \mathfrak{S}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ, décrits par les points

$$V_m,\ V_{m+1}, \ldots, V_{m+k-1}$$

avec le changement de τ de τ' jusqu'à $\tau' + 2\omega$. Ce sont précisément ces morceaux qui sont décrits successivement par le point V dans l'intervalle $2k\omega$ que nous avons examiné. Nous entendons par

$$V'_m,\ V'_{m+1}, \ldots, V'_{m+k}$$

les positions des points

$$V_m,\ V_{m+1}, \ldots, V_{m+k}$$

dans le moment $\tau = \tau'$; les morceaux désignés

$$\mathfrak{S}_m,\ \mathfrak{S}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{S}_{m+k-1}$$

de la trajectoire Σ se transforment en courbes fermées

$$\mathfrak{s}_m,\ \mathfrak{s}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{s}_{m+k-1}$$

par la jonction des arcs correspondantes

$$V'_m V'_{m+1},\ V'_{m+1} V'_{m+2}, \ldots, V'_{m+k-1} V'_{m+k}$$

de la circonférence F'', arcs qui passent dans la direction *opposee*. La déformation, que les courbes

$$\mathfrak{s}_m,\ \mathfrak{s}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{s}_{m+k-1}$$

subissent pendant le changement continuel de τ' jusqu'à $-\omega$, n'occasionne pas la rupture de leurs parties et leur passage par l'axe $O\zeta$ et conduit ces courbes en cas limite, d'après $\tau' = -\omega$, en coïncidence avec les courbes

$$\sigma_m,\ \sigma_{m+1}, \ldots, \sigma_{m+k-1}.$$

A cause de cela chacune des courbes fermées

$$\mathfrak{s}_m,\ \mathfrak{s}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{s}_{m+k-1}$$

fait J de tours autour de l'axe $O\zeta$, et réunies ensemble elles font $J.k$ de tours. Pour obtenir le nombre j_k il ne reste qu'à joindre au nombre $J.k$ le nombre j des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la réunion des arcs

$$V'_m,\ V'_{m+1}, \ldots, V'_{m+k-1},\ V'_{m+k}$$

ou, autrement dit, par un arc $V'_m V'_{m+k}$. Ce dernier nombre j est déterminé par l'expression (94). De sorte que l'expression (95) se trouve entièrement demontrée.

Représentons l'expression (95) ainsi:

$$j_k = \left(J + \frac{k_1}{k}\right) k + \alpha \tag{95'}$$

et examinons la dans la limite, quand k tend à ∞. Par l'expression (93') suivant les conditions (93'') on voit, que le rapport $\frac{k_1}{k}$ tend au nombre positive $\frac{\varphi}{\pi}$, qui d'après les inégalités (63) diffère de zéro et n'est pas plus grand que $\frac{1}{2}$. En même temps la somme

$$J + \frac{k_1}{k}$$

tend dans la limite à la quantité

$$J + \frac{\varphi}{\pi},$$

qui par sa quantité absolue ne peut pas être plus petite que $\frac{\varphi}{\pi}$.

Avec ces conditions la seconde partie de l'expression (95') doit tendre, par sa valeur, à l'infini. Par conséquent le nombre absolu des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la ligne OV, grandit indéfiniment dans l'intervalle croissant sans limites. Cette conclusion a lieu aussi quand $J = 0$.

Cette déduction montre que *l'amplitude Φ de la quantité v, déterminée par l'expression* (65), *doit atteindre, pendant la croissance illimitée du temps τ, la limite* $\Phi = \infty$. Cette propriété des changements continuels de l'amplitude Φ forme la particularité essentielle du cas de rotation d'un solide que nous examinons, c. à. d. du cas où la quantité caractéristique h est une quantité imaginaire. L'existence de cette propriété, J étant zéro, est nécessaire et suffit pour que la quantité caractéristique h soit imaginaire.

Les circonstances examinées existant, le solide n'admet pas, comme il a été demontré, les mouvements asymptotiques périodiques (75) et (76); cependant dans le cas que nous examinons le point v peut avoir quelquefois des mouvements périodiques d'un autre caractère. Le mouvement des points v et V sera périodique, si l'amplitude φ de la quantité caractéristique h est commensurable avec le nombre π. Effectivement nous pouvons dans ce cas représenter l'amplitude φ ainsi:

$$\varphi = \frac{n'}{n}\pi, \tag{96}$$

où n' et n sont des nombres entiers positifs premiers entre eux, satisfaisants l'inégalité: $n' < 2n$ d'après les conditions (63). Quand φ a cette valeur, nous voyons d'après les expressions (65) et (91) que $v_n = v$, c. à. d. que la fonction v, déterminée par l'expression (65), est

périodique avec la période $2n\omega$. En même temps le mouvement des points correspondants v et V doit être périodique avec la même période. Cette périodicité de mouvement a lieu avec toute position initiale du point v sur la circonférence E_2. La trajectoire Σ présente dans ce mouvement une courbe fermée, décrite entièrement par le point V dans l'intervalle $2n\omega$. Le nombre des tours, faits autour de l'axe $O\zeta$ par la trajectoire Σ, ou, autrement, le nombre des tours, produits dans l'intervalle $2n\omega$ par la ligne OV autour de la ligne $O\zeta$, est déterminé au moyen des expressions (95) et (93'), dans lesquelles on doit admettre: $k = n$ et où on doit attribuer à la quantité φ la signification (96). Nous obtiendrons par là: $k_1 = n'$, $\varphi_0 = 0$ et $\alpha = 0$. Ainsi le nombre j_n des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la courbe fermée Σ, sera donnée par

$$j_n = Jn + n'. \tag{97}$$

Passons à présent à la question du nombre et de la position des points du croisement mutuel des parties de la trajectoire Σ. Si l'amplitude φ est incommensurable avec π, le nombre de ces points est infiniment grand et ils couvrent entièrement par leurs positions la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3. Mais si l'amplitude φ est commensurable avec π, le nombre des points du croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ sera fini. Pour éclaircir les propriétés de la trajectoire Σ, nous examinerons d'abord en détail les croisements mutuels de ces morceaux pour le cas, où φ et π sont commensurables; puis au moyen des limites nous passerons au cas, où φ et π sont incommensurables.

Ainsi supposons que l'amplitude φ est commensurable avec π et peut être présentée par l'expression (96).

Les points v_m de la circonférence E, figurant des quantités qui peuvent être déterminées pour toutes les quantités entières m par l'expression (91), doivent, suivant la condition (96), se répéter périodiquement, en coïncidant avec n de points

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}.$$

Ces points sont disposés sur la circonférence E les uns après les autres non pas dans l'ordre de l'indice (à part le cas $n' = 1$), mais dans celui que nous étudierons plus à fond.

D'après la similitude de la répartition des points Z et z, déterminés par les expressions (92) et liés par la reltion (68), la succession des points

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ \ldots,\ v_{n-1}$$

sur la circonférence E doit être semblable à celle de la succession des points correspondants sur la circonférence E_0, points qui représentent les quantités

$$z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{n-1},$$

où, en général,

$$z_m = e^{\frac{2mn'\pi i}{n}}.$$

Il s'ensuit de l'expression

$$z_{m+1} = z_m e^{\frac{2n'\pi i}{n}},$$

que $n'-1$ points, pris du groupe:

$$z_0,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1},$$

sont répartis sur l'arc $z_m z_{m+1}$, qui est décrite par le point $z = e^{\vartheta i}$ pendant la croissance de ϑ de

$$\frac{2mn'\pi}{\pi} \quad \text{à} \quad \frac{2(m+1)n'\pi}{n}.$$

Admettons que ces $n'-1$ de points, étant disposés dans leur succession sur l'arc $z_m z_{m+1}$, soient présentés de la manière suivante:

$$z',\ z'',\ \ldots,\ z^{(n'-1)}.$$

Il est évident que ces points représentent les quantités de la forme:

$$z^{(k)} = z_m e^{\frac{2k\pi i}{n}},$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, n'-1.$$

Admettons ensuite que les correspondants des points

$$v_0,\ v_1,\ \ldots,\ v_{n+1}$$

seront:

$$v',\ v'',\ \ldots,\ v^{(n'-1)},$$

de sorte que

$$v^{(k)} = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + cz^{(k)}\,W_2'\tau}{W_1'\tau + cz^{(k)}\,W_2\tau}.$$

En se basant sur l'analogie de la répartition des points $Z = v^{(k)}$ et des points $z = z^{(k)}$, les points

$$v',\ v'',\ \ldots,\ v^{(n'-1)}$$

doivent être répartis sur l'arc $v_m v_{m+1}$ de la circonférence E dans la succession des index. La répartition des points

$$V_0,\ V_1,\ \ldots,\ V_{n-1}$$

sur la circonférence F se soumet à la même loi, c. à. d. que les points

$$V',\ V'',\ \ldots,\ V^{(n'-1)},$$

correspondant aux points

$$v', v'', \ldots, v^{(n'-1)},$$

se répartissent sur l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F dans l'ordre de la croissance des index.

Après avoir fixé la répartition des points V_m sur la circonférence F, passons à l'examen des morceaux

$$\Sigma_0, \Sigma_1, \ldots, \Sigma_{n-1}$$

de la trajectoire Σ, décrits par les points

$$V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$$

avec le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Ces morceaux se composent d'une manière conforme premièrement des parties

$$K_0, K_1, \ldots, K_{n-1},$$

décrites par les points

$$V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$$

pendant le changement du temps τ depuis $-\omega$ jusqu'à 0, et puis des parties

$$L_0, L_1, \ldots, L_{n-1},$$

décrites par les mêmes points pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à $+\omega$. Comme les points

$$V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$$

ne peuvent aucunement coïncider les uns avec les autres, les courbes

$$K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$$

ne peuvent évidemment pas se croiser; il en est de même des courbes

$$L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}.$$

Cependant les courbes

$$K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$$

peuvent se croiser avec les courbes

$$L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}.$$

Suivant la succession des points V_m sur la circonférence F, les courbes K_m se disposent dans l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3 non pas dans l'ordre des index, mais dans un autre (excepté le cas $n' = 1$). D'après cet ordre les courbes

$$K', K'', \ldots, K^{(n'-1)},$$

se disposent successivement entre les courbes K_m et K_{m+1}. Les courbes

$$K', K'', \ldots, K^{(n'-1)}$$

sont décrites pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à O par les points

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)},$$

qui sont disposés sur l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F.

Les courbes L_m se disposent dans la zone sphérique de la même manière, de sorte que les courbes

$$L', L'', \ldots, L^{(n'-1)},$$

décrites pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω par les points

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)},$$

se disposent entre les courbes L_m et L_{m+1}.

Les courbes L_m et K_m forment par leurs croisements mutuels dans l'intérieur de la zone sphérique un filet, dont l'épaisseur déprend du nombre j_n des tours, produits par la courbe fermée Σ autour de l'axe $O\zeta$; le nombre j_n est déterminé, comme nous l'avons vu, par l'expression (97). Si nous sousentendons par j_n' la valeur absolue du nombre j_n désigné et par M le nombre des points des croisements mutuels des morceaux de la trajectoire Σ, l'inégalité

$$M \geqq n(j_n' - 1) \tag{98}$$

doit avoir lieu. On peut démontrer cette supposition comme il suit. Faisons passer par l'intérieur de la zone sphérique, que nous examinons, la courbe l partant de la circonférence F_2 jusqu'àla circonférence F_3. Admettons que la circonférence mobile F, sur laquelle les points V_m sont disposés, croise, dans toutes ses positions, la courbe l une seule fois. Nommons la courbe l, qui satisfait à toutes ces exigences, *transversale* de la zone sphérique. Distinguons par rapport à cette transversale deux rives, comme on distingue les rives sur le globe terrestre en dessinant la place de la rivière par une ligne courbe. Supposons ensuite, que le point V décrive la trajectoire Σ, et examinons les passages du point V par la transversale l, en les partageant en deux catégories, selon que le passage correspondant du point V par la transversale l se produit en partant de la rive droite et en allant à la rive gauche ou vice-versa. Les passages de chaque catégorie sont comptés séparément. La quantité absolue de la différence des deux nombres, que nous avons ainsi obtenus, doit coïncider avec le nombre absolu j_n' des tours, produits par la courbe Σ autour de l'axe $O\zeta$. En même temps il est évident que la courbe Σ doit croiser la transversale l moins de j_n' de fois. Supposons que la transversale l est tracée de façon qu'elle n'ait avec la courbe L_m qu'*un* seul point commun. Si avec cela nous excluons de la courbe Σ la partie L_m, la transversale l doit croiser la courbe Σ dans ses autres parties pas

moins de $j_n' - 1$ de fois. Maintenant il est facile de voir, qu'en conservant toutes les propriétés désignées de la transversale l nous pouvons la faire passer aussi près, que nous voulons, de la coïncidence avec la courbe L_m. Et c'est pourquoi la courbe L_m doit se croiser avec les autres parties de la courbe Σ pas moins de $j_n' - 1$ de fois. Ce qui vient d'être dit, se rapporte à chacune des courbes $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$. Par conséquent le nombre entier M des points de croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ n'est pas plus pétit que le nombre $n(j_n'-1)$. Ainsi l'inégalité (98) est démontrée.

L'inégalité (98) montre, que $n(j_n'-1)$ est le *minimum* du nombre M des points du croisement mutuel des morceaux de la courbe Σ. Dans beaucoup de cas le nombre M coïncide avec le *minimum*, c. à. d. qu'il est déterminé par l'expression:

$$M = n(j_n'-1). \tag{99}$$

Il en est ainsi par exemple dans les cas où l'amplitude Φ de la quantité v, déterminée par l'expression (65), ou diminue constamment ou augmente constamment pendant la croissance du temps τ. Mais dans certains cas l'amplitude désignée Φ balance, admettant avec quelques-unes des positions du point v la croissance et avec d'autres la décroissance. Dans ces cas le nombre M peut surpasser la limite inférieure $(j_n'-1)$.

Si $J = 0$, on a d'après (97) $j_n' = n'$. Par conséquent, ayant $J = 0$, l'inégalité (98) s'exprimera ainsi:

$$M \geq n(n'-1), \tag{99'}$$

et l'expression (99) qui détermine le minimum de M devient:

$$M = n(n'-1). \tag{99''}$$

On voit par l'inégalité (99') ce qui suit: quand le nombre n' est considérable, le nombre M des points de croisement mutuel des morceaux de la trajectoire Σ doit être aussi considérable; donc l'épaisseur du filet formé par les croisements des courbes K_m et L_m doit être considérable.

Pour se faire une idée plus nette du filet, formé par la courbe Σ, fixons notre attention sur un cas plus simple, quand l'amplitude Φ de la quantité v augmente ou diminue incessamment pendant la croissance du temps τ. Ce cas ne peut pas avoir lieu toujours, mais il peut se réaliser. Examinons dans ce cas non seulement le nombre, mais aussi la répartition relative des points du croisement mutuel des parties de la courbe Σ, en supposant que l'index J est zéro, comme cela arrive toujours, et que la direction de l'axe $O\xi$ est choisie de façon que Φ grandisse incessament.

Aux conditions, que nous examinons, les morceaux successifs Σ_m et Σ_{m+1} de la courbe Σ ne peuvent pas se croiser. La courbe Σ_m, représentée schématiquement sur la figure 4 par la ligne $uu'u_1$, et l'arc u_1u de la circonférence F_3, renfermé entre les positions u_1 et u des points V_{m+1} et V_m au moment $\tau = -\omega$, pris ensemble

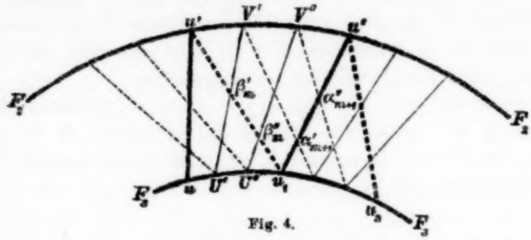


Fig. 4.

forment sur la sphère O une courbe fermée σ_m, qui sépare une partie entière sur la surface de la sphère O*). De même la courbe Σ_{m+1}, représentée sur la figure 4 par la ligne $u_1u''u_2$, et l'arc u_2u_1 de la circonférence F_3, enfermé dans les positions u_2 et u_1 des points V_{m+1} et V_m au moment $\tau = +\omega$, forment sur la sphère O une courbe fermée σ_{m+1}. En outre les parties L_m et K_{m+1} des courbes Σ_m et Σ_{m+1}, représentées sur la figure 4 par les lignes $u'u_1$ et u_1u'', et l'arc $u'u''$ de la circonférence F_2, enfermé dans les positions u' et u'' des points V_m et V_{m+1} au moment $\tau = 0$, forment ensemble sur la sphère O une courbe fermée $u'u''u_1u'$, que nous désignerons par σ'_m.

Les points ci-devant désignés

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)},$$

qui se trouvent sur l'arc V_mV_{m+1} de la circonférence F, se placent au moment $\tau = -\omega$ sur l'arc uu_1 de la circonférence F_3. Puis pendant le changement de τ depuis $-\omega$ jusqu'à 0 les points

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)}$$

décrivent, tout en gardant sur l'arc mobile F la succession dans leur position, les parties

$$K', K'', \ldots, K^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \ldots, \Sigma^{(n'-1)}$$

de la courbe Σ et au moment $\tau = 0$ ils se disposent sur l'arc $u'u''$ de la circonférence F_2. On voit par là que les points

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)}$$

doivent se trouver au commencement de l'intervalle τ de $-\omega$ jusqu'à 0

*) Les points u, u_1 et u_2 ne présentent sur la figure 4 que la désignation plus briève des points U_m, U_{m+1} et U_{m+2} de la circonférence F_3.

dans la surface, limitée par la courbe σ_m, et vers la fin de ce même intervalle ils doivent se trouver en dehors de cette surface et au milieu de celle qui est limitée par la courbe σ'_m; par conséquent ils doivent traverser la courbe σ_m dans l'intervalle du temps τ de $-\omega$ jusqu'à 0. Ce passage ne peut se produire que par l'arc $u'u_1$, c. à. d. par la partie L_m du morceau Σ_m, et non par l'arc uu', parce que les courbes

$$K', K'', \ldots, K^{(n'-1)}$$

ne peuvent pas couper uu', c. à. d. la courbe K_m. Ainsi les parties

$$K', K'', \ldots, K^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \ldots, \Sigma^{(n'-1)}$$

doivent couper la partie L_m du morceaux Σ_m et chacune une seule fois (ce qui dérive de la croissance continuelle de la longitude Φ du point V). Désignons ces croisements successives d'une manière conforme par $\beta'_m, \beta''_m, \ldots, \beta_m^{(n'-1)}$. Ces points doivent être placés d'après les circonstances, que nous examinons, le long de la courbe L_m dans la succession des index supérieurs.

Supposons maintenant, que le temps τ change de 0 jusqu'à $+\omega$. Avec ces conditions les points

$$V', V'', \ldots, V^{(n'-1)}$$

décrivent les parties

$$L', L'', \ldots, L^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \ldots, \Sigma^{(n'-1)}$$

et en même temps ils passent du domaine, limité par la courbe σ'_m, dans celui qui est limité par la courbe σ_{m+1}, en se disposant dans le moment $\tau = \omega$ sur l'arc $u_1 u_2$. De cette façon les parties

$$L', L'', \ldots, L^{(n'-1)}$$

des morceaux

$$\Sigma', \Sigma'', \ldots, \Sigma^{(n'-1)}$$

coupent la courbe $u_1 u''$ ou, autrement, la partie K_{m+1} du morceau Σ_{m+1} dans les points, que nous désignerons d'une manière correspondante $\alpha'_{m+1}, \alpha''_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+1}^{(n'-1)}$. Ces points se disposent le long de la courbe K_{m+1} dans l'ordre de la décroissance des index supérieurs.

Ce qui vient d'être énoncé s'étend, si les conditions que nous étudions existent, sur tous les morceaux de la trajectoire du point V et montre que chaque morceau Σ_m contient sur son étendue $2(n'-1)$ de points, auxquels ce morceau se croise avec ceux de la courbe Σ. La première partie de ces points de croisement se trouve sur la partie K_m, et la seconde partie sur la partie L_m de la courbe Σ_m.

S'il se trouve sur chaque courbe L_m $n'-1$ de points de croisement, produits par cette ligne avec les autres parties de la courbe Σ, le nombre entier M de tous les points de croisement mutuel des morceaux de la courbe Σ s'exprimera, considérant les conditions nommées, de cette manière: $M = n(n'-1)$ ce qui est entièrement conforme à la formule (99'').

Passons à présent au cas où l'amplitude φ de la quantité caractéristique h est incommensurable avec le nombre π, de sorte que le rapport $\varphi:\pi$ est un nombre irrationnel. Pour se faire une idée des points de croisement mutuel de la trajectoire Σ dans ce cas, changeons le nombre incommensurable $\varphi:\pi$ en un nombre rationnel *rapproché* et, tout en examinant ce cas rapproché, nous passerons à la limite, quand ce nombre rationnel tend au nombre irrationnel désigné. Autrement dit, admettons avec un *rapprochement* l'existence de l'expression (96) avec laquelle le mouvement périodique des points v et V avec la période $2n\omega$ aura de la valeur. Les nombres entiers n' et n grandissent d'une manière illimitée par suite du rapprochement de la corrélation $n':n$ de la limite $\varphi:\pi$. Il se produit en même temps la croissance illimitée du période $2n\omega$, ainsi que du nombre des croisements de chaque morceau Σ_m avec les autres parties de la trajectoire Σ du point V. Comme en même temps les points

$$V',\ V'',\ \ldots,\ V^{(n'-1)},$$

pris du nombre des points $V_1, \ldots, V_{n-1}$ et situés successivement sur l'arc $V_m V_{m+1}$, avec la croissance des nombres n' et n vont en se rapprochant et couvrent entièrement, dans la limite, l'arc $V_m V_{m+1}$ de la circonférence F, les morceaux

$$\Sigma_0,\ \Sigma_1,\ \ldots,\ \Sigma_{n-1}$$

de la trajectoire Σ couvrent entièrement, dans la limite, la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3; les points de croisement des morceaux de la trajectoire Σ remplissent aussi totalement cette zone sphérique. Autrement dit dans le cas donné la trajectoire Σ forme par le croisement réciproque de ses morceau un filet infiniment serré, c. à. d. un filet avec un nombre infini de points de sections, qui couvrent entièrement l'intérieur de la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3.

Si dans le cas, que nous examinons, nous limitons la variation du temps τ par des limites finies, le point V décrira dans cet intervalle fini une courbe finie, qui, se coupant elle-même, forme un filet avec un nombre fini de points de section; plus l'intervalle sera grand plus ce filet sera serré.

Nous remarquerons par rapport aux moments du temps τ, pendant lesquels le point mobile V passe par les points de section des morceaux

de la trajectoire, qu'on peut se servir pour les déterminer de la même équation, qui se trouve dans le § précédent, c. à. d. de l'équation (80').

Après avoir étudié la position relative des trajectoires du point v, correspondant à ses positions initiales différentes sur la circonférence E_2, nous remarquerons, qu'avec les conditions que nous examinons les racines s_1 et s_2 de l'équation (57), représentées par les expressions (60), et les quantités conjuguées sont liées par les corrélations:

$$\bar{s}_1\bar{\delta} = -s_2\delta, \quad \bar{s}_2\bar{\delta} = -s_1\delta.$$

A l'aide de ces correlations et des corrélations (53) nous nous convainquons que les quantités q_1 et q_2, déterminées par les expressions (58''), et les quantités conjuguées remplissent les conditions:

$$\bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_2 = q_2, \tag{100}$$

c. à. d. que les quantités q_1 et q_2 sont *réelles*. Par là et d'après les expressions (58'') il s'ensuit que:

$$W_1(-\tau) = \overline{W}_1\tau, \quad W_2(-\tau) = \overline{W}_2\tau. \tag{100'}$$

En différentiant ces correlations nous trouvons:

$$W_1'(-\tau) = -\overline{W}_1'\tau, \quad W_2'(-\tau) = -\overline{W}_2'\tau. \tag{100''}$$

Ayant ces correlations, nous allons examiner deux trajectoires du point v, pour lesquelles la position initiale (au moment $\tau=0$) coïncide avec l'un ou l'autre des points de l'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$. Nous avons pour ces positions initiales: $v = \pm\sqrt{1-\xi_2^2}$. En déterminant par ces positions initiales les significations correspondantes c' et c'' de la constante c, nous obtenons:

$$c' = -\frac{q_1-\gamma_2}{q_2-\gamma_2}, \quad c'' = -\frac{q_1+\gamma_2}{q_2+\gamma_2},$$

où γ_2 est déterminé par l'expression (86'). Comme les deux mouvements que nous examinons se trouvent encore dans le cas général représenté au moyen de l'équation (93), nous avons: $c' = cz'$, $c'' = cz''$ et par là $c' = c''z$, où z', z'' et z sont des quantités dont les modules coïncident avec 1. Dans le cas présent la quantité z doit coïncider avec -1, car les quantités inégales c' et c'' sont réelles. Ainsi $z = -1$, autrement $c' = -c''$. De là:

$$\frac{q_1+\gamma_2}{q_2+\gamma_2} = -\frac{q_1-\gamma_2}{q_2-\gamma_2},$$

d'où il s'ensuit que:

$$q_1 q_2 = \gamma_2^2. \tag{101}$$

C'est pourquoi nous pouvons supposer que:

$$\begin{cases} q_1 = \gamma_2 b, \\ q_2 = \gamma_2 : b. \end{cases} \tag{101'}$$

Il est évident que la quantité b, faisant partie des l'expressions (101′), est réelle. Au moyen des expressions (101′) nous nous convainquons que:

$$c' = -c'' = b. \tag{101''}$$

Par conséquent les deux mouvements, auxquels le point v se dispose sur l'axe $O\xi$ quand $\tau = 0$, se déterminent à l'aide des expressions:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau \pm b W_2'\tau}{W_1\tau \pm b W_2\tau}, \tag{102}$$

où b est une quantité, déterminée par les expressions (101′). Au moyen des expressions (100), (100′) et (100″) nous nous convainquons que la quantité v, déterminée par l'expression (102), devient, avec le remplacement de τ par $-\tau$, la quantité conjuguée. Par conséquent la trajectoire de chacun des deux mouvements, que nous venons d'examiner, représente une courbe pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Le point v occupe sur chaque trajectoire les positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (93) nous pouvons admettre: $c = b$, en sousentendant par b une quantité déterminée par une des expressions (101′). Nous aurons par là:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + bz W_2'\tau}{W_1\tau + bz W_2\tau}, \tag{103}$$

où $z = e^{\vartheta i}$. L'équation (103), coïncidant avec l'équation (65), concerne plus nettement une forme générale de la constante arbitraire c dans la formule (65), précisément: $c = be^{\vartheta i}$, où ϑ est une quantite arbitraire réelle. Après avoir désigné la seconde partie de l'expression (103) par $v(\tau, z)$, nous nous convainquons au moyen des expressions (100′) et (100″) que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité conjuguée à la fonction

$$v\left(\tau, \frac{1}{z}\right),$$

coïncident. On voit par là que la trajectoire du point v, déterminée par l'expression (103), et la trajectoire du point v, déterminée par l'expression:

$$v = P\tau \frac{W_1'\tau + b\,\frac{1}{z}\,W_2'\tau}{W_1\tau + b\,\frac{1}{z}\,W_2\tau}, \tag{104}$$

sont symétrique relativement à l'axe $O\xi$; le point v occupe des positions symétriques sur l'une et l'autre des trajectoires dans les moments τ et $-\tau$.

Examinons parmi les mouvements du point v, déterminés par l'expression (103), deux mouvements, pour lesquels z prend les valeurs suivantes:

$$+e^{-\varphi i} \quad \text{et} \quad -e^{-\varphi i},$$

où φ est l'amplitude de la quantité caractéristique h. Il est facile de

se convaincre au moyen des expressions (66'), (100') et (100''), que la quantité v prend pour chacun de ces mouvements, quand $\tau = \omega + u$ et quand $\tau = \omega - u$, des valeurs conjuguées. Par conséquent chacune des trajectoires, que nous examinons, du point v présente une courbe, pour laquelle $O\xi$ est un axe de symétrie, avec lequel le point v occupe sur la trajectoire des points symétriques aux moments $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$. Chacune de ces deux trajectoires passe, comme il est facile de le voir, par un des points correspondant du croisement de la circonférence E_3 avec l'axe $O\xi$ et le mobile v passe par ce point au moment $\tau = \omega$.

Ainsi dans ce cas comme dans celui, que nous avons examiné dans le paragraphe précédent, nous n'avons que *quatre* trajectoires, pour lesquelles l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie.

Comme conclusion du paragraphe présent il faut dire, que le mouvement du point v, déterminé par l'expression (65), est instable à cause des perturbations qui agissent sur l'amplitude φ de la quantité h. Effectivement, si l'amplitude φ subit la moindre perturbation $\Delta\varphi$, la position du point v_m, déterminée par l'expression (91), et sa position agitée, qui représente la quantité

$$P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + ce^{2m(\varphi+\Delta\varphi)i}\,W_2'\tau}{W_1\tau + ce^{2m(\varphi+\Delta\varphi)i}\,W_2\tau},$$

diffèrent l'une de l'autre par une quantité finie, suivant le nombre entier m, pris à volonté; cette circonstance caractérise le mouvement instable du point v dans le cas que nous examinons.

§ 8.

Mouvement du point v dans le cas, où le solide est capable de reproduire un seul mouvement asymptotique périodique avec la periode 2ω.

Examinons ici le cas de transition, quand les racines des équations (57) sont égales ($s_1 = s_2 = s$); la quantité caractéristique h doit être égale à l'unité.

Dans ce cas le mouvement du point v se détermine par l'expression (73) et sa position v_m dans la phase du temps $\tau + 2m\omega$ est determinée par l'expression (74). Si m tend à $+\infty$ ou à $-\infty$, v_m tend dans les deux cas à la même position limite

$$v_{\pm\infty} = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}. \tag{105}$$

Par conséquent le mouvement du point v, déterminé par l'expression (73), étant impériodique pour les changements finis du temps τ, tend, avec la diminution infinie du temps τ ainsi qu'avec l'augmentation

infinie, à un seul mouvement périodique avec la période 2ω, déterminé au moyen de l'expression

$$(106) \qquad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau}{W_1\tau}.$$

Nommons ce mouvement périodique mouvement *asymptotique*. C'est à ce mouvement unique asymptotique du cas donné qu'aboutissent les deux mouvements *asymptotiques*, déterminés par les expressions (75) et (76).

La liaison qui existe entre les quantités:

$$(107) \qquad Z = v_m \quad \text{et} \quad z = 2m\omega,$$

représentée par l'expression (74), appartient évidemment à la transformation linéaire

$$(108) \qquad Z = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + z W_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + z W_1\tau)}.$$

Comme les tableaux des quantités Z et z, déterminées par les expressions (107), se disposent, ayant l'entière arbitraire m, l'une sur la circonférence E et l'autre sur la droite $O\xi$, le point correspondant Z doit changer constamment de place sur la circonférence E pendant la translation continuelle de z le long de l'axe $O\xi$.

On peut voir par là, en outre, que tous les mouvements mécaniques possibles du solide, que nous examinons, qui ne se diffèrent que par les positions initiales du point v sur la circonférence E_2, sont déterminés, quand les autres circonstances initiales sont égales, par l'expression de la forme:

$$(109) \qquad v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + c(W_3'\tau + z W_1'\tau)}{W_1\tau + c(W_3\tau + z W_1\tau)},$$

où z est une quantité constante *réelle*.

Si z change de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, le point correspondant Z, déterminé par l'expression (108), décrit une seule fois la circonférence entière E depuis le point $v_{\pm\infty}$, représentant la quantité (105), jusqu'au retour à ce point. Par là on voit que les points

$$v_{-\infty}, \ldots, v_{-2}, v_{-1}, v_0, v_1, v_2, \ldots, v_{+\infty},$$

qui représentent les quantités v_m, déterminés par l'expression (74), se disposent le long de la circonférence E dans l'ordre de la croissance des index. Cependant ils forment des deux côtés du point $v_{\pm\infty}$ les lignes pointillées, dont les points contigus v_m et v_{m+1} se rapprochent infiniment à mesure qu'ils approchent de la position $v_{\pm\infty}$. C'est de cette même manière que se disposent les points correspondants V_m de la circonférence F sur la sphère O.

Si nous supposons que le temps τ change de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$, les points V_m décriront sur la sphère O les courbes Σ_m, qui forment ensemble une courbe continuelle Σ, par laquelle se mouve le point V.

Les morceaux Σ_m de cette courbe se disposent successivement les uns après les autres dans la zone sphérique entre les circonférences F_2 et F_3. Dans la limite, quand m tend ou à $-\infty$ ou à $+\infty$, les morceaux Σ_m tendent à une seule et même position de la limite $\Sigma_{\pm\infty}$, qui représente en même temps la trajectoire fermée du point V dans le cas du mouvement asymptotique périodique, déterminé par l'expression (106).

Prenant m' et m'' pour des nombres entiers, convenons de sousentendre par $v_{m'}v_{m''}$ l'arc de la circonférence E, décrit par le point v, qui représente une quantité, déterminée par l'expression (109), pendant le changement de z de $2m'\omega$ jusqu'à $2m''\omega$. Nous désignerons l'arc correspondant de la circonférence F par $V_{m'}V_{m''}$. Cet arc ne forme qu'une partie de la circonférence F.

Désignons par σ_m une courbe fermée, qui se compose de la courbe déjà nommée Σ_m et de l'arc $U_{m+1}U_m$ de la circonférence F_3, avec lequel l'arc $V_{m+1}V_m$ coïncide au moment $\tau = -\omega$. Les courbes fermées

$$\ldots, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$$

doivent faire chacune un nombre *égal* de tours autour de l'axe $O\zeta$, ce qui est démontré par des procédés analogues à ceux, qui ont été employés dans les paragraphes précédents et que pour plus de brièveté nous ne répéterons pas ici.

Nous désignerons par J le nombre des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par chacune des courbes σ_m, et nous le nommerons «index» du mouvement, que nous examinons.

Dans le paragraphe suivant il nous sera démontré, que *cet index est zéro.* Maintenant bornons nous à remarquer: 1) que l'index J garde sa constance avec le changement d'un mouvement à un autre, pendant lequel change d'une manière arbitraire la position initiale du point v sur la circonférence E_2; 2) que l'index J garde sa constance avec le changement continuel des constantes l_1, l_2 et a, pendant lequel la quantité caractéristique h reste toujours égale à 1 et quand les conditions (17) ont toujours lieu et l_1 ne devient jamais zéro. Cette constance est confirmée par des preuves analogues à celles qui se rencontrent dans les paragraphes précédents.

La courbe σ_m, que nous avons indiquée, change dans la limite en trajectoire $\Sigma_{\pm\infty}$ du mouvement asymptotique périodique, déterminé par l'expression (106), quand m tend à $\pm\infty$. C'est pourquoi la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$ fait J de tours autours de l'axe $O\zeta$. Autrement dit, si le mouvement périodique (106) a lieu, la ligne verticale OV fait dans le période du temps 2ω J de tours autour de l'axe $O\zeta$. Comme en réalité $J = 0$, ainsi que nous le verrons plus bas, la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$ ne fait aucun tour autour de l'axe $O\zeta$ et par conséquent la droite OV ne peut pas non plus produire de tours autour du même axe.

Admettons que le mouvement impériodique, déterminé par l'égalité (73), a lieu. Le nombre j_k de tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la partie de la trajectoire Σ, décrite par le point V dans l'intervalle $2k\omega$, égal au nombre entier k des périodes 2ω, se présente ainsi:

$$j_k = J \,.\, k + \alpha, \tag{110}$$

où $-1 < \alpha < +1$. La démonstration de l'expression (110) est analogue aux démonstration des formules (82) et (95) des paragraphes précédents et n'exige d'être répétée. Remarquons ce qui suit: si nous exprimons le moment, d'où commence l'intervalle $2k\omega$, que nous examinons, de la façon suivante: $\tau + 2k\omega$ où $-\omega \leqq \tau \leqq +\infty$, le nombre α, faisant partie de l'expression (110), présente le nombre de tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par l'arc $V_m V_{m+k}$ de la circonférence F. Si k est un nombre fini et si m tend à $\pm\infty$, l'arc $V_m V_{m+k}$ tend à zéro et le nombre correspondant α dans l'expression (110) tend aussi à zéro.

Si $J = 0$, le nombre j_k des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la route, décrite par le point V dans l'intervalle $2k\omega$, est déterminé par l'expression: $j_k = \alpha$ où $-1 < \alpha < +1$. Ce nombre j_k reste fini avec le nombre k aussi grand que l'on veut, et à cause de cela l'amplitude Φ de la quantité v, déterminée par l'expression (73), *doit toujours varier, avec la croissance illimitée du temps* τ, *dans les limites finies et doit rester finie, quand* $\tau = \infty$.

Pour être plus brefs nous ne ferons pas de détails sur les croisements réciproques des morceaux de la trajectoire Σ, croisements qui possèdent des qualités analogues à celles, que nous avons éxaminées dans le § 6. Nous ne remarquerons que ce qui suit. Les morceaux de la trajectoire Σ forment par leurs croisements réciproques dans l'intérieur de la zone sphérique, renfermée entre les circonférences F_2 et F_3, un filet, qui atteint sa plus grande épaisseur près du mourceau $\Sigma_{\pm\infty}$ et surtot près des points de ce morceau, qui se trouvent sur les circonférences F_2 et F_3.

Passons à présent à l'examen de la position relative de la trajectoire Σ avec différentes circonstances.

Au moyen des expressions (72'), (72'') et (53) nous nous convainquons que

$$\bar{q}_1 = q_1, \quad \bar{q}_3 = -q_3, \tag{110'}$$

Il en résulte de là et des expressions (58') et (71') que

$$W_1(-\tau) = \overline{W}_1\tau, \quad W_3(-\tau) = -\overline{W}_3\tau. \tag{111}$$

En différentiant ces expressions, nous trouvons:

$$W_1'(-\tau) = -\overline{W}_1'\tau, \quad W_3'(-\tau) = \overline{W}_3'\tau. \tag{111'}$$

Les corrélations (111) et (111') montrent, que la quantité v, déterminée par l'expression (106), change en une quantité conjuguée

avec le changement de τ en $-\tau$. Par conséquent dans le cas du mouvement asymptotique périodique du point v sa trajectoire $S_{\pm\infty}$ présente une courbe, pour laquelle la droite $O\xi$ est un axe de symétrie, et le point mobile v occupe des positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$ et arrive sur l'axe $O\xi$ dans les moments $\tau = 0$ et $\tau = \omega$. En même temps cette trajectoire doit passer par un des points de l'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$, et aussi par un des points d'intersection de la circonférence E_3 avec le même axe. Pour couper la trajectoire $S_{\pm\infty}$ avec l'axe $O\xi$ qui se trouve sur la circonférence E_2, nous avons: $\tau = 0$ et

$$v = P0 \cdot \frac{W_1'0}{W_10} = P0 \,.\, q_1 i = b\sqrt{1-\xi_2^2}, \tag{112}$$

où $b = \pm 1$. Le signe de la quantité b est déterminé entièrement par l'expression (112), qui est reduite à la forme:

$$q_1 = b\gamma_2, \tag{113}$$

où γ_2 est déterminé par l'expression (86').

Déterminons la trajectoire du point v, qui passe par un autre point d'intersection de la circonférence E_2 avec l'axe $O\xi$, c. à. d. par le point, pour lequel, ayant $\tau = 0$, nous avons:

$$v = -b\sqrt{1-\xi_2^2}. \tag{114}$$

Supposant dans l'expression (73) $\tau = 0$, nous trouvons pour ce point:

$$-b\sqrt{1-\xi_2^2} = P0 \,.\, i(q_1 + cq_3),$$

d'où nous obtenons en considérant l'expression (112):

$$c = -\frac{2q_1}{q_3} = \beta i. \tag{115}$$

Au moyen des expressions (110') nous nous convainquons que la quantité β, déterminée par l'expression (115), est réelle. Le mouvement du point v, pour lequel l'expression (114) a lieu quand $\tau = 0$, est déterminé par l'équation:

$$v = P\tau \cdot \frac{W_1'\tau + \beta i W_3'\tau}{W_1\tau + \beta i W_3\tau}. \tag{116}$$

Cette quantité v devient quantité conjuguée quand τ est remplacé par $-\tau$. Par conséquent la trajectoire, que nous examinons, présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est l'axe de symétrie. Le point mobile v occupe des positions symétriques sur cette trajectoire dans les moments τ et $-\tau$.

Dans l'expression (109) nous pouvons introduire à la place de c une quantité, déterminée par l'expression (115). Nous aurons alors:

$$v = P\tau\, \frac{W'_1\tau + \beta i(W_3'\tau + z\, W_1'\tau)}{W_1\tau + \beta i(W_3\tau + z\, W_1\tau)}, \tag{117}$$

où z est une quantité constante arbitraire réelle. L'équation (117),

coïncidant avec l'équation (73), concerne plus nettement une forme générale de la constante arbitraire c dans la formule (73), précisément: $c = \beta i : (1 + z\beta i)$. Ayant désigné la deuxième partie de l'expression (117) par $v(\tau, z)$, nous nous convainquons au moyen des expressions (111) et (111'), que la fonction $v(-\tau, z)$ et la quantité, conjuguée à la fonction $v(\tau, -z)$, coïncident. Il s'ensuit que les trajectoires des deux mouvements du point v, déterminés par l'expression (117) avec deux valeurs de z, égales par la quantité et différentes par les signes, sont disposées symétriequement par rapport à l'axe $O\xi$, pendant quoi le point v occupe sur l'une et l'autre des trajectoires des positions symétriques dans les moments τ et $-\tau$.

Examinons ensuite la trajectoire du mouvement, déterminée par l'expression (117) ayant $z = -\omega$. Il est facile de voir au moyen des expressions (70), (73'), (111) et (111'), que la quantité v, ayant $\tau = \omega + u$ et $\tau = \omega - u$, prend des valeurs conjuguées. Par conséquent la trajectoire, que nous examinons, présente une courbe, pour laquelle l'axe $O\xi$ est un axe de symétrie. Cette trajectoire doit passer par l'un des points d'intersection de l'axe $O\xi$ avec la circonférence E_3, et justement par celui des deux points par lequel ne passe pas la courbe $S_{\pm\infty}$.

Ainsi dans le cas présent il existe non pas quatre trajectoires pour lesquelles l' $O\xi$ est un axe de symétrie (comme dans les cas, examinés dans les deux paragraphes précédents), mais seulement *trois*.

Par le choix de la position initiale du point v on peut obtenir que le mouvement asymptotique périodique (106) se réalise immédiatement. Ce mouvement, obtenu au moyen de celui de (117), quand $z = \pm\infty$, n'est pas évidemment stable si la position initiale du point v sur la circonférence E_2 est agitée et si les autres circonstances initiales du mouvement sont restées sans changements.

§ 9.

Coïncidence de l'index J du mouvement avec zéro. Signes simplifiés de l'existence des mouvements asymtotiques périodiques.

Nous avons établi ci dévant l'idée de l'index J pour tous les cas possibles du mouvement, n'écartant que le cas où $l_1 = 0$. En même temps nous avons préparé dans l'énonciation précédente toutes les bases nécessaires pour la preuve du théorême, par lequel cet index J égale toujours zéro. Passons maintenant à la démonstration même de ce théorême.

Nous avons établi séparément dans chacun des trois cas, qui dépendent des propriétés de la quantité caractéristique h, que le nombre J ne change pas avec les changements continuels des quantités l_1, l_2

et a, si certaines conditions sont observées. Nous unirons cette conclusion, en démontrant, que la constance de l'index J a lieu *indépendamment de la valeur que prend la quantité caractéristique* h, à condition que les inégalités (17) soient remplies et que la quantité l_1 ne se change pas en zéro pendant les changements continuels des quantités l_1, l_2 et a. La démonstration de cette thèse se reduit, en réalisant les conditions ennoncées, à la démonstration des deux propositions suivantes:

I. Si la quantité caractéristique h, qui change continuellement partant de la valeur *réelle*, qui remplit la condition (62), tend en cas limite à 1, l'index J du mouvement limite, ayant $h=1$, garde la valeur qu'il avait avec les valeurs réelles h, contiguës à 1.

II. Si la quantité caractéristique h, qui change continuellement partant de la valeur *imaginaire*, satisfaisante les conditions (63), tend en cas limite à 1, l'index J du mouvement limite, ayant $h=1$, garde la même valeur qu'il avait avec les valeurs imaginaires h, contiguës à 1.

Si la quantité h, étant réelle, tend continuellement à 1, les deux mouvements asymptotiques périodiques (75) et (76) coincident, en cas limite, en un seul mouvement (106), avec quoi les trajectoires fermées correspondantes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$, examinées dans le § 6, en se déformant sans la rupture de leurs parties et sans le passage par l'axe $O\zeta$, coïncident avec la trajectoire fermée $\Sigma_{\pm\infty}$, que nous avons éxaminée dans le § 8 et qui est décrite par le point V dans le mouvement asymptotique périodique (106). Par conséquent les courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$, ayant les valeurs réelles de h contiguës avec 1, et la courbe fermée $\Sigma_{\pm\infty}$, avec $h=1$, font chacune le même nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$ et déterminent ainsi la même valeur de l'index J. La première des deux positions est démontrée.

Si la quantité h est imaginaire, il ne peut pas exister un seul des mouvements (75) et (76) dans le solide. C'est pourquoi nous emploierons un autre procédé, quand h est imaginaire. Prenons un mouvement déterminé par l'équation (65) ou mieux, par l'équation équivalente (103), qui, comme il est facile de s'en convaincre au moyen des expressions (58'), peut être représenté par la forme suivante:

$$v = P\tau \cdot \frac{(1+bz)\,W_1'\tau - bz(q_1-q_2)\,w_2'\tau}{(1+bz)\,W_1\tau - bz(q_1-q_2)\,w_2\tau}, \tag{118}$$

où $z=e^{\vartheta i}$ et où ϑ est une constante arbitraire réelle. Admettons que la quantité z diffère de ± 1 par une quantité finie. Représentons la courbe σ_0 fermée, prise du nombre des courbes (94') et composée de la courbe Σ_0 et de l'arc U_1U_0 de la circonférence F_3. Passons à la limite quand la quantité h tend à 1 et quand, par conséquent, l'amplitude φ tend à zéro. Dans la limite la différence q_1-q_2 tend

à zéro; la quantité b, déterminée par les expressions (101′), tend ou à $+1$ ou à -1; la quantité $1+bz$ tend à la quantité $1\pm z$ finie et différente de zéro; la deuxième partie de l'expression (118) tend, *pour les valeurs finies de* τ, à la coïncidence avec la deuxième partie de l'expression (106); le morceau Σ_0, décrit par le point V de la sphère O dans l'intervalle *fini* du temps (de $\tau=-\omega$ jusqu'à $\tau=+\omega$), tend à la coïncidence avec la trajectoire fermée $\Sigma_{\pm\infty}$ du mouvement asymptotique périodique (106), qui a lieu quand $h=1$; l'arc U_0U_1 de la circonférence F_3, qui fait partie de la courbe fermée σ_0, tend à zéro [nous nous en convainquons, en déterminant par la formule (94) le nombre j des tours, produits par l'arc U_0U_1 autour de l'axe $O\zeta$]. Avec ces circonstances la courbe fermée σ_0 doit tendre à la coïncidence avec la courbe ci-devant désignée $\Sigma_{\pm\infty}$, en même temps cette déformation de la courbe σ_0 s'opère continuellement, c. à. d. sans la rupture de ces parties et sans leur passage par l'axe $O\zeta$. Par conséquent la courbe σ_0 et la courbe $\Sigma_{\pm\infty}$, avec laquelle coïncide σ_0 quand $h=1$, font le même nombre de tours autour de l'axe $O\zeta$, ce nombre détermine une seule et unique valeur de l'index J. Ainsi la deuxième supposition est démontrée.

Si la constance de l'index J se conserve dans la limite, quand h tend d'une manière ou d'une autre à 1, elle doit se conserver avec le passage continuel de h des valeurs réelles aux valeurs imaginaires et vice-versa, puisque ce passage n'est possible pour la quantité caractéristique h que par $h=1$. En plus la constance de l'index J, pendant les autres changements continuels l_1, l_2 et a, est déjà établie dans les paragraphes précédentes. C'est pourquoi la constance de l'index J pendant les changements, que nous examinons, est démontrée en général, indépendamment de la valeur h.

Si, par conséquent, il est possible de produire un passage continuel d'un système des quantités l_1, l_2 et a à un autre en conservant pendant tout le temps du passage les conditions (17) et si en même temps l_1 reste toujours distinct de zéro, nous pouvons affirmer, malgrè la quantité h, que l'index J du mouvement pour l'un et pour l'autre système des quantités constantes l_1, l_2 et a est le même.

Supposons que le système donné des quantités l_1, l_2 et a satisfasse les conditions (17) *) et admettons que l_1 est différent de zéro. Changeons continuellement la quantité a jusqu'à zéro, en laissant intact les quantités l_1 et l_2. On obtient ce changement de la quantité a, comme on le voit d'après l'expression (13′), par le rapprochement d'une des quantités A et C, qui n'entrent nullement dans les conditions (17), à la

*) La quantité a ne rentre pas immédiatement dans les conditions (17); mais il y entre le moment B dont depend la quantité a.

quantité B. Ce changement ne peut pas enfreindre les conditions (17) et ne peut pas non plus rompre la constance de l'index J. Si, par conséquent, l'index J est zéro avec $a=0$, il est en général zéro. Arretons donc notre attention sur la détermination de l'index J dans le cas où $a=0$.

Dans ce cas l'équation (42) prend la forme:

$$(119)\qquad \frac{d^2w}{d\tau^2}-\frac{1}{2}\left(\frac{\wp' T-e_0'}{\wp T-e_0}\right)\frac{dw}{d\tau}=0.$$

Les résolutions fondamentales particulières de ces équations seront

$$(119')\qquad w_1\tau=1,\quad w_2\tau=i\int_0^\tau\sqrt{\frac{e_0-\wp T}{e_0-e_2}}\cdot e^{i\chi\tau}d\tau,$$

où $\chi\tau$ est une fonction, déterminée par l'expression (53″). Les coefficients $\varkappa$, λ, μ et ν, déterminés par les expressions (52) et (53‴), seront exprimés ainsi:

$$(119'')\qquad \varkappa=1,\quad \lambda=0,\quad \mu=2ie^{i\chi\omega}\mu_1,\quad \nu=e^{2i\chi\omega},$$

où

$$\mu_1=\int_0^\omega\sqrt{\frac{e_0-\wp T}{e_0-e_2}}\cdot\cos(\chi\omega-\chi\tau)\,d\tau.$$

La quantité N, déterminée par l'expression (61′), sera représentée ainsi:

$$N=\cos\chi\omega.$$

En même temps la quantité caractéristique h sera *imaginaire* et sera exprimée par l'une des quatre quantités:

$$\pm e^{\pm i\chi\omega}.$$

On doit choisir parmi ces quatre quantités celle dont l'amplitude φ satisfait les conditions (63). Prenant la quantité l_1 pour positive [ce qui ne borne pas la généralité du raisonnement, car le remplacement de τ par $-\tau$, qui occasionne dans l'équation (42) le remplacement de l_1 par $-l_1$, est toujours possible], nous ferons remarquer qu'en même temps $\chi\omega$ sera aussi positive. Puis démontrons que l'amplitude φ, que nous cherchons, de la quantité caractéristique h sera:

$$(120)\qquad \varphi=\chi\omega,$$

de sorte que

$$(120')\qquad h=e^{i\chi\omega}.$$

Pour se convaincre de l'exactitude de cette conclusion, il suffit de montrer que la quantité positive $\chi\omega$ satisfait l'inégalité:

$$(121)\qquad \chi\omega<\frac{\pi}{2}\cdot$$

Nous avons:

$$\chi\omega = \frac{l_1}{2}\int_0^{\omega}\frac{d\tau}{e_0 - \wp T} = \frac{l_1}{2}\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}\int_0^{\omega}\frac{d\tau}{\zeta - \zeta_0}.$$

Après avoir remarqué, que:

$$\frac{d\zeta}{d\tau} = \sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}\cdot R = \sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}\sqrt{2B\varrho_0(1-\zeta^2)(\zeta-\zeta_0) - l_1^2},$$

et en remplaçant dans l'intégrale précédent le variable τ par ζ, nous trouvons:

$$\chi\omega = \frac{l_1}{2}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)R}$$

$$= \frac{l_1}{2\sqrt{2B\varrho_0}}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta)}}.$$

Sousentendant par $\mathfrak{z}$ une valeur moyenne de la variable ζ, qui varie entre les limites de l'intégration:

(121′) $$\zeta_2 < \mathfrak{z} < \zeta_3,$$

nous avons

$$\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)\sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{z}-\zeta_1}}\int_{\zeta_2}^{\zeta_3}\frac{d\zeta}{(\zeta-\zeta_0)\sqrt{(\zeta-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(\mathfrak{z}-\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_0)(\zeta_3-\zeta_0)}}.$$

On voit par cette expression et par l'expression

$$\frac{l_1}{\sqrt{2B\varrho_0}} = \sqrt{(1-\zeta_2^2)(\zeta_2-\zeta_0)}$$

que la quantité $\chi\omega$ peut être exprimée ainsi:

(122) $$\chi\omega = \frac{\pi}{2}\sqrt{\left(\frac{1+\zeta_2}{\mathfrak{z}-\zeta_1}\right)\cdot\left(\frac{1-\zeta_2}{\zeta_3-\zeta_0}\right)}.$$

En même temps la première des inégalités (19) et la première des inégalités (121′) démontrent que

(122′) $$0 < \frac{1+\zeta_2}{\mathfrak{z}-\zeta_1} < 1.$$

En même temps la première des inégalités (19) et l'équation

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 = \zeta_0$$

démontrent, que

(122″) $$0 < \frac{1-\zeta_2}{\zeta_3-\zeta_0} < 1.$$

L'équation (122) et les inégalités (122') et (122'') affirment entièrement l'exactitude des inégalités (121). Par conséquent l'amplitude φ de la quantité caractéristique h, satisfaisant les conditions (63), se détermine par l'équation (120).

Après avoir déterminé la quantité caractéristique h et son amplitude φ, nous trouvons au moyen de (119''), (60) et (58'')

$$s_1 = 1, \quad s_2 = e^{2i\chi\omega}, \quad q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{\sin\chi\omega}{\mu_1},$$

avec quoi les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ doivent être exprimées ainsi:

$$W_1\tau = 1, \quad W_2\tau = 1 + q_2 i\int_0^\tau \sqrt{\frac{e_0 - \wp T}{e_0 - e_2}}\, e^{i\chi\tau} d\tau. \tag{123}$$

En déterminant ensuite v, nous remarquons que les expressions (65) et (93) exigent pour passer à la limite, quand a devient zéro, des préparations préliminaires. La constante c, qui se trouve dans l'expression (65) et qui est déterminée d'après la position initiale de v sur la circonférence E_2, dépend de a. Il est nécessaire d'examiner cette dépendance. Les résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$ de l'expression (42) peuvent être développées, avant de passer à la limite, par les degrés a^2, avec quoi les deuxièmes parties des équations (123) ne présenteront que les premiers membres de ces développements. Par conséquent, avant de passer à la limite, les résolutions $W_1\tau$ et $W_2\tau$ seront exprimées ainsi:

$$\left\{\begin{aligned} W_1\tau &= 1 + a^2 i f_1\tau, \\ W_2\tau &= 1 + q_2 i\left[\int_0^\tau \sqrt{\frac{e_0 - \wp T}{e_0 - e_2}}\cdot e^{i\chi\tau} d\tau + a^2 f_2\tau\right], \end{aligned}\right. \tag{123'}$$

où $f_1\tau$ et $f_2\tau$ sont des fonctions qui gardent des valeurs finies ayant $a = 0$ et qui changent en zéro quand $\tau = 0$. Supposant qu'avec $\tau = 0$ le point v occupe la position initiale, déterminée par l'expression

$$v = \sqrt{1 - \zeta_2^2}\cdot e^{\beta i},$$

introduisons les expressions (123') dans l'équation (65) et examinons cette équation ayant $\tau = 0$. Nous trouverons

$$a\sqrt{e_0 - e_2}\cdot e^{\beta i} = \frac{a^2 f_1{}'0 + c q_2(1 + a^2 f_2{}'0)}{1 + c}.$$

Il s'ensuit que

$$c = \frac{a\sqrt{e_0 - e_2}\cdot e^{\beta i}}{q_2}(1 + a\varepsilon), \tag{124}$$

où ε est une quantité qui garde une valeur finie avec $a = 0$.

Après avoir introduit dans l'équation (65) les quantités $W_1\tau$, $W_2\tau$ et c, déterminées par les expressions (123') et (124), puis en abrégeant dans l'expression v, que nous avons obtenue, le multiplicateur a dans le nominateur et dans le dénominateur et en passant enfin à la limite, quand $a = 0$, nous trouvons:

$$(125) \qquad v = c_1 \cdot \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}} \cdot e^{i\chi\tau},$$

où

$$c_1 = \frac{i e^{\beta i}}{2} \sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}.$$

De même l'expression (93) prend, en passant à la limite quand $a = 0$, la forme:

$$(125') \qquad v = c_1 \cdot \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}} e^{i(\vartheta + \chi\tau)}.$$

Maintenant nous passons à l'examen du nombre J des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la courbe fermée σ_0, composée du morceau Σ_0 de la trajectoire Σ et de l'arc $U_1 U_0$ de la circonférence F_3 (supposant $a = 0$).

Le morceau Σ_0 est décrit par le point V, représentant la quantité v, déterminée par l'expression (125), pendant que τ change de $-\omega$ jusqu'à $+\omega$. Dans cet intervalle l'amplitude de la quantité:

$$c_1 \frac{\wp' T - e_0'}{\sqrt{e_0 - \wp T}}$$

recevra un accroissement égal à zéro; tandis que l'amplitude de la quantité $e^{i\chi\tau}$ recevra un accroissement égal à

$$\chi\omega - \chi(-\omega) = 2\chi\omega.$$

Cet accroissement coïncide à celui de l'amplitude Φ de la quantité v qui est obtenu pendant que le point correspondant V décrit l'arc Σ_0.

L'arc $V_0 V_1$ de la circonférence F est décrit, avec la constante τ et avec la croissance de ϑ de 0 jusqu'à $2\varphi = 2\chi\omega$, par le point V qui représente la quantité v, déterminée par l'expression (125'). Pendant ce déplacement du point V, l'amplitude Φ de la quantité correspondante v reçoit l'accroissement de $2\chi\omega$. Cet accroissement de l'amplitude Φ correspond aussi à l'arc $U_0 U_1$, avec lequel coïncide l'arc $V_0 V_1$ au moment $\tau = -\omega$. Quant à l'accroissement, qui correspond à l'arc $U_0 U_1$ passé en sens invers, c. à. d. à l'arc $U_1 U_0$, il s'exprimera ainsi:

$$-2\chi\omega.$$

En additionnant les accroissement ci-devant nommés de l'amplitude Φ, lesquels correspondent au passage des arcs Σ_0 et $U_1 U_0$, nous obtenons *zéro*. Ce zéro représentera l'accroissement de l'amplitude Φ de la quantité v, obtenue pendant que le point correspondant V décrit

la courbe fermée σ_0. Par conséquent le nombre J des tours, produits par cette courbe autour de l'axe $O\zeta$ est zéro. En même temps l'index J de rotation est zéro.

Ainsi le théorème de la coïncidence de l'index J de la rotation avec zéro peut être regardé pour démontré sur tous les points.

On peut changer la forme de la démonstration de ce théorème de différentes façons. Dans la preuve que nous venons d'énoncer, nous n'avons changé que la dernière des quantités l_1, l_2 et a. Mais il est possible de fonder la preuve sur le changement de la quantité l_1, en ajoutant, s'il devient nécessaire, les changements des quantités l_2 et a. Montrons d'une manière brève le plan de cette preuve. Avant tout remarquons que les conditions (17) équivalent aux suivantes:

(126) $$\zeta_0 < 1, \quad l_1^2 < g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}},$$

où

$$g_0 = \frac{2 l_2 B}{3} - \frac{l_2^3 B}{54 \varrho_0^2}.$$

Admettons que ces conditions soient satisfaites par le système donné des quantités l_1, l_2 et a et admettons que l_1 diffère de zéro. Puis augmentons continuellement la quantité l_1^2 depuis sa valeur initiale jusqu'à la limite:

$$g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}},$$

en l'approchant infiniment de cette limite. Les conditions (17) seront toujours remplies, en même temps la quantité $\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$ décroîtra en approchant infiniment de zéro, les racines ζ_2 et ζ_3 de l'équation $R^2 = 0$ se rapprocheront et deviendront égales dans la limite, avec quoi ζ coïncide avec chacune d'elles ($\zeta = \zeta_2 = \zeta_3$). Ce cas de la limite est examiné en détails dans le § 12, où il est démontré que d'après la condition:

(126′) $$\zeta^2 < a^2 (1 - \zeta^2)$$

les mouvements asymptotiques existent et les courbes fermées $S_{-\infty}$ et $S_{+\infty}$ se transforment en points b' et b''. En même temps chacune des courbes fermées $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ se transforme aussi en le point correspondant de la sphère O et fait le nombre J de tours autour de l'axe $O\zeta$ égal évidemment à zéro. Cependant si le changement continu désigné de l_1^2 jusqu'à

$$g_0 + \sqrt{\frac{g_2^3}{27}}$$

conduit non pas à la condition (126′) mais à la condition inverse, il faut augmenter a^2 et atteindre par ce moyen la satisfaction de la condition (126′). Si avec cela on rencontrait un obstacle dans ce que la différence $1 - \zeta^2$ serait zéro, on pourrait éloigner cet obstacle en changeant l_2 de façon que $1 - \zeta^2$ ne fût pas zéro. C'est par des changements continuels

pareils qu'on obtient toujours l'exécution de la condition (126'), avec laquelle les trajectoires $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ deviennent des points et font chacune zéro de tours autour de l'axe $O\zeta$. Par conséquent l'index J doit être aussi zéro pour ce mouvement ci et pour le mouvement qui correspond aux valeurs initiales des quantitées l_1, l_2 et a.

Passons à présent à l'examen des conséquences du théorème de la coïncidence de l'index J avec zéro. Nous concernerons les signes, qui permettent parfois de juger sans calculer la quantité caractéristique h, si les mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω sont possibles ou non, suivant les circonstances présentes.

Si l'index J est un zéro, nous nous convainquons par les explications données dans les paragraphes précédents, que le principe suivant doit avoir lieu.

Si la longitude Φ du point V (qui représente aussi l'amplitude de la quantité $v = \xi + i\eta$) tend, avec la croissance illimitée du temps τ, en cas limite à $\pm\infty$, il n'existe pas de rotations asymptotiques périodiques; mais si pendant la croissance illimitée du temps τ la longitude Φ dans la limite garde une valeur finie, les mouvements asymptotiques périodiques doivent exister. On sousentend ici le changement continuel de la longitude Φ du point V depuis la valeur initiale donnée.

Ce principe, exprimé pour la première fois par Mr. B. C. Mlodzeievsky sans démonstration complète, peut être compté pour démontré dans toute sa pleinitude, comme une conséquence des formules (82), (95) et (110) et du théorème concernant la coïncidence de l'index J avec zéro. Nous nous baserons sur ce principe pour la déduction des signes ou des règles, désignés plus bas, qui montrent la possibilité ou l'impossibilité des mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω.

En introduisant dans l'expression (14) à la place de v l'expression:

$$v = \sqrt{1-\zeta^2} \cdot e^{\Phi i}$$

et supposant pour brièveté

$$(127) \qquad \operatorname{tg}\Theta = \frac{-R}{l_1}, \quad \gamma = \sqrt{2B\varrho_0}\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}}, \quad \varrho_1 = \frac{1}{2\sqrt{2B\varrho_0}},$$

nous avons

$$(128) \qquad \frac{d(\Phi-\Theta)}{d\tau} = a\gamma\sqrt{\zeta-\zeta_0}\left\{\frac{l_1\varrho_1}{a\sqrt{(\zeta-\zeta_0)^3}} - \cos(\Phi-\Theta)\right\}.$$

Remarquons que l'angle Θ, déterminé par la première des expressions (127), est une fonction périodique du temps τ, variable toujours entre deux limites finies. D'ailleurs la fonction

$$(129) \qquad f\tau = \frac{l_1\varrho_1}{a\sqrt{(\zeta-\zeta_0)^3}}$$

ne change pas de signe pendant le changement de τ et varie

toujours entre les limites b_2 et b_3, correspondantes aux valeurs de cette fonction pour $\tau = 0$ et $\tau = \omega$ et déterminées par les expressions:

$$b_2 = \frac{l_1 \varrho_1}{a\sqrt{(\zeta_2 - \zeta_0)^3}} \quad \text{et} \quad b_3 = \frac{l_1 \varrho_1}{a\sqrt{(\zeta_3 - \zeta_0)^3}}. \tag{130}$$

Au moyen des inégalités (20) et (21) nous nous convainquons que

$$b_2^2 > b_3^2. \tag{131}$$

N'oublions pas cela et supposons, que pendant tous les changements du temps τ la fonction $f\tau$ ne devient jamais par sa quantité absolue plus petite que 1. Cela se réalise avec les conditions: $b_3^2 \geqq 1$ et dans ce cas la deuxième partie de l'équation (128) conserve toujours le même signe. Par conséquent la quantité absolue de la différence $\Phi - \Theta$ grandit indéfiniment pendant la croissance du temps τ. Cependant l'amplitude Φ doit tendre à l'infini pendant la croissance illimitée de τ. Voilà pourquoi il ne peut pas exister de mouvements asymptotiques périodiques, quand $b_3^2 \geqq 1$.

Si nous supposons, qu' avec tous les changements du temps τ la fonction $f\tau$, déterminée par l'expression (129), ne devient jamais plus grande que 1 par sa quantité absolue, ce qui se réalise avec la condition $b_2^2 \leqq 1$, on peut se convaincre au moyen de l'équation (128), que la différence $\Phi - \Theta$ doit toujours varier entre deux limites finies pendant la croissance illimitée de τ. Effectivement la croissance continuelle de la quantité $\Phi - \Theta$ doit toujours, suivant ces conditions, venir prendre la valeur de zéro de la deuxième partie de l'équation (128) et ensuite changer son signe, c. à. d. que la croissance de la quantité $\Phi - \Theta$ doit se changer en décroissance; cette décroissance de la quantité $\Phi - \Theta$ doit conduire à ce que la dérivée $\Phi - \Theta$ vienne prendre la valeur de zéro, puis changer le signe de la deuxième partie de l'équation (128), c. à. d. que $\Phi - \Theta$ doit commencer à croître, et ainsi de suite. Pour représenter ces variations avec plus de clarté, déterminons l'angle Ψ des conditions

$$\cos\Psi = f\tau, \quad 0 < \Psi < \pi, \tag{132}$$

puis imaginons nous sur la sphère O deux courbes, décrites, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω, par des points qui représentent deux quantités:

$$\sqrt{1 - \zeta^2} \cdot e^{\pm \Psi i}.$$

Ces courbes présenteront deux transversales l' et l'' de la zone sphérique incernée entre les circonférences F_2 et F_3; ces courbes seront disposées symétriquement par rapport au plan $\xi O \zeta$. Ces transversales partagent la zone désignée en deux domaines, pour lesquels la seconde partie de l'équation (128) garde l'un ou l'autre signe, selon le domaine dans lequel se trouve le point $\mathfrak{V}$, qui représente la quantité:

$$\mathfrak{v} = \sqrt{1 - \zeta^2} \cdot e^{(\Phi - \Theta)i}; \tag{133}$$

la seconde partie de l'équation (128) devient zéro avec la position du point $\mathfrak{V}$ sur l'une ou l'autre des transversales. Pendant la croissance du temps τ l'amplitude $\Phi - \Theta$ augmente ou diminue, selon la position du point $\mathfrak{V}$ dans l'un ou dans l'autre des deux domaines désignés. Il est facile de voir en plus que le point $\mathfrak{V}$ avec l'une et l'autre de ces positions se mouve pendant la croissance de τ dans la direction *d'une seule et même transversale* que nous désignerons par l'. Le point $\mathfrak{V}$, représentant la quantité $\mathfrak{v}$, déterminée par l'expression (133), balance près de cette transversale l' pendant le temps τ, exprimant de grandes valeurs positives. Effectivement il est facile de se convaincre au moyen de l'équation (128) et de l'expression (133), que si dans le moment donné le point $\mathfrak{V}$ est passé du côte du plan $\xi O \zeta$, où se trouve la transversale l', ce point ne peut pas traverse de nouveau le plan $\xi O \zeta$ pendant la croissance de τ commençant de ce moment. Par conséquent les passages du point $\mathfrak{V}$ par la transversale l'' sont impossibles à partir de ce moment, ce ne sont que les passages de la transversale l' qui sont possibles. Ces passages du point $\mathfrak{V}$ d'une rive de la transversale l' à l'autre se repetent infiniment beuucoup de fois. La comparaison des dérivées

$$\frac{d\Psi}{d\tau} \quad \text{et} \quad \frac{d(\Phi - \Theta)}{d\tau}$$

montre le suivant. Les intersections de la trajectoire du point $\mathfrak{V}$ avec la transversale l' sont telles que les passages du point mobile $\mathfrak{V}$ allant de la première rive de la transversale l' à l'autre s'accomplissent dans les phases $\tau + 2m\omega$, $-\omega < \tau < 0$ et les passages inverses dans les phases $\tau + 2m\omega$, $0 < \tau < \omega$. Le point $\mathfrak{V}$ peut aussi faire une infinité de passages à travers l'autre transversale l'', mais cela se produira avec la décroissance de τ jusqu'à $-\infty$. Avec les mouvements désignés du point $\mathfrak{V}$ l'amplitude $\Phi - \Theta$ de la quantité $\mathfrak{v}$ correspondante, ainsi que l'amplitude Φ de la quantité v, ayant $\tau = +\infty$, restent finies. Par conséquent, quand $b_2^2 \leqq 1$ nous devons avoir deux mouvements asymptotiques périodiques du point v avec la période 2ω.

Ainsi nous pouvons exprimer la règle suivante.

I. Règle. *Si* $b_3^2 \geqq 1$, *il n'existe pas de mouvements asymptotiques dériodiques du point* v (la quantité caractéristique h doit être imaginaire). *Si* $b_2^2 \leqq 1$, *il doit exister des mouvements asymptotiques périodiques du point* v *avec le periode* 2ω (la quantité caractéristique h doit être réelle).

Cette règle ne résoud pas la question dans le cas où

$$(134) \qquad b_3^2 < 1 < b_2^2.$$

On peut rapetisser le domaine, où la règle n'est pas réelle, en compliquant un peu les calculs. Introduisons l'angle Γ auxiliaire en le désignant ainsi:

(135) $$\frac{d\Gamma}{d\tau} = a\gamma\sqrt{\zeta-\zeta_0}\left\{b_4 - \frac{l_1\varrho_1}{a\sqrt{(\zeta-\zeta_0)^3}}\right\},$$

où b_4 est une quantité constante. Choisissons la quantité b_4 à condition, que l'angle Γ reste toujours fini pendant la croissance illimitée de τ. Pour avoir les circonstances, qui permettront la réalisation de cette condition, il faut remarquer, que la deuxième partie de l'expression (135) est une fonction périodique paire avec le période 2ω et par conséquent elle doit se développer suivant les cosinus d'arcs multiples en série de la forme:

$$\frac{d\Gamma}{d\tau} = A_0 + A_1 \cos\frac{\pi\tau}{\omega} + A_2 \cos\frac{2\pi\tau}{\omega} + \cdots.$$

En même temps l'angle Γ sera représenté ainsi:

$$\Gamma = \text{Const.} + A_0\tau + \frac{\omega}{\pi}\left[A_1 \sin\frac{\pi\tau}{\omega} + \frac{1}{2}A_2 \sin\frac{2\pi\tau}{\omega} + \cdots\right].$$

Cet angle ne restera fini pendant toutes espèces de changements de τ que dans le cas où

$$A_0 = 0.$$

Après avoir écrit cette condition sous une forme plus étendue, nous en obtiendrons la quantité b_4, exprimée ainsi:

(135′) $$b_4 = \frac{l_1\varrho_1\int_0^\omega \frac{d\tau}{\zeta-\zeta_0}}{\int_0^\omega \sqrt{\zeta-\zeta_0}\,d\tau}.$$

Au moyen de cette expression et de l'expression:

$$\int^\omega \sqrt{\zeta-\zeta_0}\,d\tau = \sqrt{(\mathfrak{z}-\zeta_0)^3}\int_0^\omega \frac{d\tau}{\zeta-\zeta_0},$$

où $\mathfrak{z}$ a une valeur moyenne entre ζ_2 et ζ_3, nous nous convainquons, que la quantité b_4 occupe aussi une valeur moyenne entre les quantités b_2 et b_3, c. à. d. que

(136) $$b_3^2 < b_4^2 < b_2^2.$$

Après avoir additionné les expressions (135) et (128) nous trouvons:

(137) $$\frac{d(\Phi-\Theta+\Gamma)}{d\tau} = a\gamma\sqrt{\zeta-\zeta_0}\,\{b_4 - \cos(\Phi-\Theta)\}.$$

Cette équation montre, que la fonction dérivée $\Phi - \Theta + \Gamma$ garde toujours son signe ayant $b_4^2 \geqq 1$ et que par conséquent l'angle $\Phi - \Theta + \Gamma$ de même que l'angle Φ grandissent indéfiniment pendant la croissance du temps τ. Cependant il n'existe pas de mouvements asymptotiques périodiques. Ainsi à la place de la règle I nous pouvons exprimer la règle suivante.

II. Règle. *Si $b_4^2 \geqq 1$, il n'existe pas de mouvements asymptotiques périodiques du point v* (la quantité caractéristique h doit être imaginaire).

Si $b_2^2 \leq 1$, *il doit exister des mouvements asymptotiques périodiques du point* v (la quantité caractéristique h doit être reelle).

Cette règle ne résoud pas la question dans le cas où $b_4^2 < 1 < b_2^2$, inégalités, qui correspondent moins au large domaine que les inégalités (134), puisque $b_3^2 < b_4^2$.

Il est évident qu'il est possible de composer une quantité inombrable de signes pour résoudre la question de l'existence ou de la non-existence des mouvements asymptotiques périodiques. Rappelons nous du signe, proposé par Mr. B. C. Mlodzeievsky, signe, qui se distingue par sa simplicité.

Il est à regretter, que tous les signes connus de cette espèce laissent toujours un certain domaine, où ils ne résolvent pas la question. Si l'on parvient à étraicir ce domaine, ce n'est qu'en compliquant le calcul, et ce n'est pas désirable. Il reste à savoir, si ce défaut est la conséquence de conditions accidentelles, ou si elle provient de l'essence du problème.

§ 10.

Correlations, qui existent entre les résolutions de l'équation (42) et leur quantités conjuguées. Formules pour le calcul des coefficients dans le développement des résolutions particulières fondamentales en séries τ.

Bornons nous à examiner les corrélations pour les résolutions particulières *fondamentales* $w_1\tau$ et $w_2\tau$, résolutions qui se développent en séries (51). On obtient facilement ensuite au moyen de ces corrélations d'autres qui correspondent à deux résolutions particulières quelconque de l'équation (42), par exemple aux résolutions canoniques $W_1\tau$ et $W_2\tau$.

La fonction v, déterminée par l'expression (41) est présentée au moyen des résolutions particulières fondamentales $w_1\tau$ et $w_2\tau$ de la façon suivante:

$$v = P\tau \cdot \frac{w_1'\tau + cw_2'\tau}{u_1\tau + cw_2\tau}, \tag{138}$$

où $P\tau$ est déterminée au moyen de l'expression (66), et la constante c est déterminée d'après la position initiale du point v sur la circonférence E_2 (au moment $\tau = 0$). On peut représenter la valeur initiale correspondante de la quantité v ainsi:

$$v = \sqrt{1 - \zeta_2^2} \,.\, e^{\mathfrak{b} i},$$

où $\mathfrak{b}$ est une quantité réelle. En même temps, quand $\tau = 0$, l'équation (138) prend la forme:

$$c = \gamma_2 e^{\mathfrak{b} i}, \tag{139}$$

où γ_2 est une quantité réelle, déterminée par l'expression (86'). C'est pourquoi la fonction v est exprimée ainsi:

$$(140) \qquad v = P\tau \cdot \frac{w_1'\tau + \gamma_2 e^{bi} w_2'\tau}{w_1\tau + \gamma_2 e^{bi} w_2\tau},$$

et la fonction conjuguée de la façon suivante

$$(140') \qquad \bar{v} = \overline{P\tau} \cdot \frac{\bar{w}_1'\tau + \gamma_2 e^{-bi} \bar{w}_2'\tau}{\bar{w}_1\tau + \gamma_2 e^{-bi} \bar{w}_2\tau}.$$

En multipliant les expressions (140) et (140') et ayant en vue que

$$v\bar{v} = 1 - \zeta^2 = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{4}{B^2\varrho_0}} \cdot \frac{\wp' T^2 - e_0'^2}{e_0 - \wp T},$$

$$P\tau \cdot \overline{P\tau} = \frac{1}{4a^2}\sqrt[3]{\frac{4}{B^2\varrho_0^2}} \cdot \frac{\wp' T^2 - e_0'^2}{(e_0 - \wp T)^2},$$

nous trouvons après les simplifications:

$$(w_1\tau + \gamma_2 e^{bi} w_2\tau)(\gamma_2 \bar{w}_2\tau + e^{bi}\bar{w}_1\tau) = \\ = \frac{(w_1'\tau + \gamma_2 e^{bi} w_2'\tau)(\gamma_2 \bar{w}_2'\tau + e^{bi}\bar{w}_1'\tau)}{a^2(e_0 - \wp T)}.$$

En disposant les deux parties de cette identitée par les degrés de la quantité arbitraire $z = e^{bi}$ et en composant les coefficients avec les mêmes degrés, nous obtenons les corrélations suivantes:

$$(141)\begin{cases} w_1'\tau . \bar{w}_2'\tau = a^2(e_0 - \wp T) w_1\tau . \bar{w}_2\tau, \\ \bar{w}_1'\tau . w_2'\tau = a^2(e_0 - \wp T)\bar{w}_1\tau . w_2\tau, \\ w_1'\tau . \bar{w}_1'\tau + \gamma_2^2 w_2'\tau . \bar{w}_2'\tau = a^2(e_0 - \wp T)(w_1\tau . \bar{w}_1\tau + \gamma_2^2 w_2\tau . \bar{w}_2\tau). \end{cases}$$

Ces expressions déterminent deux quantités:

$$w_1'\tau . \bar{w}_1'\tau \quad \text{et} \quad \gamma_2^2 w_2'\tau . \bar{w}_2'\tau$$

au moyen des quantités $w_1\tau$, $\bar{w}_2\tau$, $\bar{w}_1\tau$, $w_2\tau$ et justement:

$$w_1'\tau . \bar{w}_1'\tau = \gamma_2^2 a^2(e_0 - \wp T)\bar{w}_2\tau . w_2\tau,$$
$$\gamma_2^2 w_2'\tau . \bar{w}_2'\tau = a^2(e_0 - \wp T) w_1\tau\, \bar{w}_1\tau.$$

Ces deux expressions et la première des expressions (141) réduisent les trois corrélations (141) à une forme plus simple:

$$(142)\begin{cases} w_1'\tau . \bar{w}_1\tau = \gamma_2^2 w_2'\tau . \bar{w}_2\tau, \quad \bar{w}_1'\tau . w_1\tau = \gamma_2^2 \bar{w}_2'\tau . w_2\tau, \\ w_1'\tau . \bar{w}_1'\tau = \gamma_2^2 a^2(e_0 - \wp T) w_2\tau . \bar{w}_2\tau. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations (142), nous trouvons:

$$\frac{d}{d\tau}(w_1\tau . \bar{w}_1\tau - \gamma_2^2 \bar{w}_2\tau . w_2\tau) = 0,$$

d'où

$$w_1\tau . \bar{w}_1\tau - \gamma_2^2 w_2\tau . \bar{w}_2\tau = \text{Const.}$$

Après avoir déterminé *Const* avec $\tau = 0$, nous obtenons:

$$w_1\tau \,.\, \overline{w}_1\tau - \gamma_2^2 w_2\tau \,.\, \overline{w}_2\tau = 1. \tag{143}$$

En joignant aux corrélations (142) et (143) la corrélation (53') et si nous en déduisons les expressions $w_1'\tau$, $w_2'\tau$, $\overline{w}_1'\tau$ et $\overline{w}_2'\tau$, nous aboutissons seulement à *cinq* corrélations différentes que nous représentons ainsi:

$$(144)\quad \begin{cases} w_1'\tau = \gamma_2^2 . i . \overline{w}_2\tau . \psi_1\tau . e^{i\chi\tau}, & \overline{w}_1'\tau = -\gamma_2^2 . i . w_2\tau . \psi_1\tau . e^{-i\chi\tau}, \\ w_2'\tau = i . \overline{w}_1\tau . \psi_1\tau . e^{i\chi\tau}, & \overline{w}_2'\tau = -i w_1\tau . \psi_1\tau . e^{-i\chi\tau}, \\ \qquad w_1\tau . \overline{w}_1\tau - \gamma_2^2 w_2\tau . \overline{w}_2\tau = 1, & \end{cases}$$

où $\chi\tau$ est déterminée par l'expression (53'') et

$$\psi_1\tau = \sqrt{\frac{e_0 - \wp T}{e_0 - e_2}}. \tag{144'}$$

Passons à présent à la formation des formules pour les calculs des coefficients $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \beta_2, \beta_3, \ldots$ dans les développements (51) des résolutions fondamentales particulières $w_1\tau$ et $w_2\tau$ en séries par les degrès τ. Représentons avant tout les développements par les degrès τ des fonctions suivantes:

$$\frac{\wp' T}{2(\wp T - e_0)}, \quad \frac{i e_0'}{2(\wp T - e_0)}, \quad (\wp T - e_0),$$

dont la première est impaire et les deux dernières sont paires. Ces développements doivent avoir la forme

$$\frac{\wp' T}{2(\wp T - e_0)} = A_0\tau + A_1\tau^3 + \cdots + A_n\tau^{2n+1} + \cdots, \tag{145}$$

$$\frac{i e_0'}{2(\wp T - e_0)} = B_0 + B_1\tau^2 + \cdots + B_n\tau^{2n} + \cdots, \tag{146}$$

$$\wp T - e_0 = C_0 + C_1\tau^2 + \cdots + C_n\tau^{2n} + \cdots, \tag{147}$$

où les coefficients $A_0, A_1, \ldots, B_0, B_1, \ldots, C_0, C_1, \ldots$ sont des quantités réelles, calculées d'après les formules citées ci-dessous, empruntées à la théorie des fonctions elliptiques.

Il s'ensuit des séries (145) et (146) que

$$(148)\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\wp' T - e_0'}{\wp T - e_0}\right) = A_0\tau + A_1\tau^3 + \cdots + A_n\tau^{2n+1} \cdots$$
$$+ i(B_0 + B_1\tau^2 + \cdots + B_n\tau^{2n} + \cdots).$$

Nous obtiendrons en introduisant cette série et celle de (147) dans l'équation (42), puis en remplaçant dans cette équation la fonction w par l'une ou l'autre des fonctions $w_1\tau$ et $w_2\tau$, déterminées par les expressions (51), nous obtiendrons, par le moyen des coefficients indéterminés, des équations pour la détermination des quantités

$$\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \beta_2, \beta_3, \ldots.$$

Ainsi nous nous convainquons que les quantités $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ se déterminent successivement par les équations suivantes:

$$(149)\quad \begin{cases} 2(n+1)(2n+1)\alpha_{2n+2} \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \{(2kA_{n-k} - a^2C_{n-k})\alpha_{2k} - (2k+1)B_{n-k}\alpha_{2k+1}\}, \\ 2(n+1)(2n+3)\alpha_{2n+3} \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \{[(2k+1)A_{n-k} - a^2C_{n-k}]\alpha_{2k+1} + 2(k+1)B_{n-k}\alpha_{2k+2}\}, \end{cases}$$

où l'on doit supposer: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 0$, en donnant au nombre n les significations $0, 1, 2, \ldots$. Nous trouvons de la même manière que les quantités $\beta_2, \beta_3, \ldots$ se déterminent succéssivement par les équations

$$(150)\quad \begin{cases} 2(n+1)(2n+1)\beta_{2n+2} \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \{(2kA_{n-k} - a^2C_{n-k})\beta_{2k} - (2k+1)B_{n-k}\beta_{2k+1}\}, \\ 2(n+1)(2n+3)\beta_{2n+3} \\ = \sum_{k=0}^{k=n} \{[(2k+1)A_{n-k} - a^2C_{n-k}]\beta_{2k+1} + 2(k+1)B_{n-k}\beta_{2k+2}\}, \end{cases}$$

où l'on doit supposer: $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$, en donnant au nombre n les significations $0, 1, 2, \ldots$.

En différentiant l'expression (148) d'après τ, nous obtiendrons*):

$$(151)\quad \begin{cases} \wp T - \wp(T+T_0) = A_0 + 3A_1\tau^2 + \cdots + (2n+1)A_n\tau^{2n} + \cdots \\ \qquad \cdots + 2i(B_1\tau + \cdots + nB_n\tau^{2n-1} + \cdots), \end{cases}$$

où T_0 est une quantité, déterminée par l'expression (43') ou, autrement, par les expressions (43). Il s'ensuit des expressions (151) et (147), que

$$(152)\quad \begin{cases} A_n = \dfrac{\wp^{(2n)}(\omega+\omega') - \wp^{(2n)}(\omega+\omega'+T_0)}{1.2.3\ldots(2n+1)}, \\ B_n = \dfrac{i\wp^{(2n)}(\omega+\omega'+T_0)}{1.2.3\ldots 2n}, \\ C_n = \dfrac{\wp^{(2n)}(\omega+\omega')}{1.2.3\ldots 2n}, \end{cases}$$

où $n = 1, 2, 3, \ldots$ Il faut ajouter aux expressions (152) encore les suivantes:

$$(152')\quad A_0 = \frac{(e_2-e_1)(e_1-e_3)}{e_2-e_0},\quad B_0 = \frac{ie_0'}{2(e_2-e_0)},\quad C_0 = e_2 - e_0.$$

*) Halphen, t. I, p. 137.

Par le calcul successif des dérivées

$$\wp^{(m)}(\omega+\omega') \quad \text{et} \quad \wp^{(m)}(\omega+\omega'+T_0),$$

qui font partie des formules (152), on doit, en vue des expressions:

$$\wp(\omega+\omega') = e_1, \quad \wp'(\omega+\omega') = 0,$$

$$\wp\,(\omega+\omega'+T_0) = e_2 + \frac{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}{e_0-e_2},$$

$$\wp'(\omega+\omega'+T_0) = \frac{-(e_2-e_1)(e_2-e_3)e_0'}{(e_0-e_2)^2},$$

se servir des corrélations:

$$\wp''u = 6(\wp u)^2 - \frac{1}{2}g_2,$$

$$\wp^{(n+2)}u = 12\sum_{k=0}^{k=n-1}(n-1)_k\wp^{(k)}u\,.\,\wp^{(n-k)}u, \quad (n=1,2,\ldots).$$

Dans la dernière corrélation, que l'on obtient par la formule de Leibnitz, adoptée à l'équation:

$$\wp'''u = 12\wp u\,.\,\wp'u,$$

l'expression $(n-1)_k$ est un coefficient binominal.

§ 11.

Cas où $l_1 = 0$.

Ce cas appartient au nombre des plus simples. Mr. Hess a déjà montré que la question dans ce cas se résolvait jusqu'à la fin au seul moyen des fonctions elliptiques.

Dans ce cas on obtient facilement l'expression de l'amplitude Φ de la quantité v. Cette amplitude satisfait l'équation:

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{a\sin\Phi}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

d'où nous trouvons

$$(153) \qquad \operatorname{tg}\frac{\Phi}{2} = c\,.\,e^{-a\cdot\operatorname{arc\,cos}\zeta},$$

où c est une constante, déterminée par la valeur initiale de la quantité Φ. L'angle ψ, déterminé par l'expression (40), ne change pas dans ce cas.

Le cas, que nous examinons, par rapport à la question de l'index J a été séparé dans la théorie énoncée ci-devant; car la trajectoire du point V passe dans ce cas au moins par un des pôles de la sphère O. Mais dans les autres rapports ce cas peut servir d'explication pour la théorie générale. Afin de rapprocher ce cas de la théorie générale, examinons le en combinaison avec l'équation (42).

Dans le cas, que nous examinons, $e_0' = 0$ et l'équation (42) admet les deux résolutions particulières suivantes:

$$(154)\qquad \begin{cases} w_1 u = e^{-\frac{1}{2}ai\log(\zeta + i\sqrt{1-\zeta^2})}, \\ w_2 u = e^{-\frac{1}{2}ai\log(\zeta - i\sqrt{1-\zeta^2})}. \end{cases}$$

Si d'après la désignation déjà établie nous sousentendons par θ l'angle de l'axe $O\zeta$ (Fig. 1) avec la direction de la gravité, nous aurons:

$$(155)\qquad \zeta = \cos\theta, \quad \sqrt{1-\zeta^2} = \sin\theta,$$

et l'expression (154) prend la forme:

$$(155')\qquad w_1\tau = e^{+\frac{1}{2}a\theta}, \quad w_2\tau = e^{-\frac{1}{2}a\theta}.$$

Dans la suite nous distinguerons deux cas: 1) quand $\zeta_0 < 1$ et 2) quand $-1 < \zeta_0 < +1$. En plus nous examinerons deux cas limite: 1) quand $\zeta_0 = -1$ et 2) quand $\zeta_0 = +1$.

Cas où $l_1 = 0$, $\zeta_0 < -1$.

Avec ces conditions les racines ζ_1, ζ_2 et ζ_3 du polynome R^2, qui sera présenté sous la forme:

$$R^2 = 2B\varrho_0(1-\zeta^2)(\zeta-\zeta_0),$$

seront:

$$(156)\qquad \zeta_1 = \zeta_0, \; \zeta_2 = -1, \; \zeta_3 = +1.$$

Les rayons des circonférences E_2 et E_3 sont des zéros. Avec le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω le point v doit d'abord se mouvoir sur un côté du plan $\xi O\eta$ depuis le point O jusqu'à la circonférence E_0, décrite du centre O par le rayon 1 (circonférence que le point v atteint au moment où $\zeta = 0$); puis avec le changement de τ depuis ω jusqu'à 2ω le point v doit passer de l'autre côté du plan $\xi O\eta$ (voyez le § 4) et doit aller jusqu'au point O. Les rayons des circonférences F_2 et F_3 sont aussi des zéros, et les sections de la sphère O, auxquelles se disposent ces circonférences, se changent en tangentes de la sphère. Ces tangentes passent par les pôles (points d'intersection de la sphère O avec l'axe $O\zeta$). Par conséquent le point V de la sphère O passe, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω, d'un pôle de la sphère O à l'autre, en passant par l'équateur E_0 au moment où $\zeta = 0$.

Quand le temps τ passe par chacun des moments $2m\omega$ et $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier, la quantité $\sin\theta$, qui d'après les expressions (155) et (156) se présente ainsi:

$$\sin\theta = \sqrt{(\zeta-\zeta_2)(\zeta_3-\zeta)} = \frac{R}{\sqrt{2B\varrho_0(\zeta-\zeta_1)}},$$

est annullée *en changeant de signe**). Avec ces conditions l'angle θ, déterminé par les expressions (155), doit recevoir l'accroissement 2π, quand le temps τ, augmentant continuellement, reçoit l'accroissement de 2ω. En même temps les quantités $w_1\tau$ et $w_2\tau$, déterminées par les expressions (155'), doivent satisfaire les conditions

$$w_1(\tau+2\omega)=s_1 w_1\tau,$$
$$w_2(\tau+2\omega)=s_2 w_2\tau,$$

où

$$s_1=e^{a\pi} \quad \text{et} \quad s_2=e^{-a\pi}.$$

Par conséquent les résolutions, que nous examinons, $w_1\tau$ et $w_2\tau$ sont elles-mêmes canoniques, et la quantité caractéristique h sera dans le cas donné:

(157) $$h=\sqrt{\frac{s_2}{s_1}}=e^{-a\pi}.$$

Afin que cette quantité satisfasse la condition (62), prenons la quantité a pour une quantité négative (ce qui s'obtient par le choix de la direction approchante de l'axe Ox).

Comme la quantité caractéristique h est réelle et différente de 1, il doit exister sous les conditions, que nous examinons, des mouvements asymptotiques périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω; le mouvement impériodique doit tendre à l'un ou à l'autre des mouvements périodiques, quand le temps τ tend à $\pm\infty$.

Le mouvement impériodique du point v se détermine au moyen de l'expression:

(158) $$v=\sin\theta\cdot\frac{e^{+\frac{1}{2}a\theta}-ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}{e^{+\frac{1}{2}a\theta}+ce^{-\frac{1}{2}a\theta}},$$

où l'on peut déterminer la constante c par la position du point v au moment, où $\theta=\frac{\pi}{2}$ et par conséquent $\zeta=0$; à ce moment le point v doit se trouver sur la circonférence E_0, en représentant la quantité de la forme: $v=e^{\beta i}$, et par conséquent nous aurons:

$$c=-i\,.\,e^{\frac{1}{2}a\pi}\,.\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\beta.$$

La trajectoire du point v passe par l'origine O, et la trajectoire du point V passe par les deux pôles de la sphère O.

Si le temps τ reçoit un accroissement, égal au nombre entier m des périodes 2ω, le point v se dispose au point v_m, représentant la quantité

(158') $$v_m=\sin\theta\cdot\frac{e^{+\frac{1}{2}a\theta}-e^{-2m\pi a}\,ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}{e^{+\frac{1}{2}a\theta}+e^{-2m\pi a}\,ce^{-\frac{1}{2}a\theta}}.$$

---

*) Cela s'explique par ce que ζ_2 et ζ_3 sont le *minimum* et le *maximum* des fonctions ζ et par conséquent la quantité R, proportionelle à $\frac{d\zeta}{d\tau}$, s'annule aux moments désignés en changeant de signe.

Quant à ce qui concerne les mouvements périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω, l'un d'eux se détermine au moyen des expressions:

(159) $$v = \sin\theta, \quad \eta = 0, \quad \xi = \sin\theta,$$

et l'autre au moyen des expressions

(160) $$v = -\sin\theta, \quad \eta = 0, \quad \xi = -\sin\theta.$$

Ces deux mouvements sont des *mouvements de rotation autour de l'axe* $O\eta$ (Fig. 1) *et ils ne diffèrent que par la direction des rotations.*

Le mouvement impériodique, déterminé au moyen de l'expression (158), tend au mouvement périodique (159) avec la croissance du produit $a.\tau$ jusqu'à $+\infty$ et au mouvement périodique (160) avec la décroissance du produit $a.\tau$ jusqu'à $-\infty$.

Remarquons enfin, que le cas donné, caractérisé, entre autre, par l'inégalité $\zeta_0 < -1$ ou autrement par l'inégalité $l_2 > 2\varrho_0$, a lieu, quand la constante l_2 est suffisamment grande, c. à. d. quand le *solide a reçu une force vive suffisamment grande.*

Cas où $l_1 = 0, \; -1 < \zeta_0 < +1$.

Avec ces conditions les racines ζ_1, ζ_2 et ζ_3 du polynome R^2 seront:

(161) $$\zeta_1 = -1, \quad \zeta_2 = \zeta_0, \quad \zeta_3 = +1.$$

Le rayon de la circonférence E_3 devient zéro; mais le rayon de la circonférence E_2 est différente de zéro. Si $\zeta_2 < 0$, le point v se mouve, pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω, d'abord d'un côté du plan $\xi O\eta$ partant de la circonférence E_2 jusqu'à la circonférence E_0 (qu'il atteint au moment où $\zeta = 0$) et puis sur l'autre côté du plan $\xi O\eta$ partant de la circonférence E_0 jusqu'au point O. Le point correspondant V de la sphère O se mouve pendant le changement de τ depuis 0 jusqu'à ω, entre la circonférence F_2 et le pôle inférieur de la sphère O, en passant par l'équateur E_0 au moment où $\zeta = 0$. Si $\zeta_2 > 0$ le caractère du mouvement ne diffère du précédent que par ce que le point v n'accomplit pas le passage d'un côté du plan $\xi O\eta$ à l'autre, et que le point V de la sphère O ne fait pas de passage par l'équateur E_0.

Avec le changement du temps τ depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ la quantité $\sin\theta$ qui, d'après les expressions (155) et (161), se présente ainsi:

$$\sin\theta = \sqrt{(\zeta-\zeta_1)(\zeta_3-\zeta)},$$

s'annule et change de signe aux moments $(2m+1)\omega$, où m est un nombre entier. A cause de cela, quand le temps τ, augmentant continuellement, reçoit l'accroissement de 2ω, l'angle θ se transforme en $-\theta$ et les résolutions (155') $w_1\tau$ et $w_2\tau$ passent mutuellement l'une dans l'autre, c. à. d. qu'il se forme une substitution linéaire, déterminée par les expressions:

$$\left\{\begin{aligned}w_1(\tau+2\omega)&=w_2\tau,\\ w_2(\tau+2\omega)&=w_1\tau.\end{aligned}\right.\tag{162}$$

Ayant cette substitution nous obtenons les résolutions canoniques:

$$\left\{\begin{aligned}W_1\tau&=\tfrac{1}{2}(e^{+\frac{1}{2}a\theta}+e^{-\frac{1}{2}a\theta})=\operatorname{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right),\\ W_2\tau&=\tfrac{1}{2}(e^{+\frac{1}{2}a\theta}-e^{-\frac{1}{2}a\theta})=\operatorname{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right),\end{aligned}\right.\tag{163}$$

où $\operatorname{Sin} z$ et $\operatorname{Cos} z$ sont le sinus et le cosinus *hyperboliques* de l'argument z. Ces résolutions canoniques satisfont les conditions:

$$W_1(\tau+2\omega)=s_1\,W_1\tau,\quad W_2(\tau+2\omega)=s_2\,W_2\tau,$$

où $s_1=+1$ et $s_2=-1$. Par conséquent la quantité caractéristique h sera imaginaire et s'exprimera ainsi:

$$h=i=e^{\frac{\pi i}{2}}.$$

C'est pourquoi il n'existe pas dans le cas présent de mouvements asymptotiques périodiques du premier et du second genre avec la période 2ω. Comme l'amplitude φ de la quantité caractéristique h, égale à $\frac{\pi}{2}$, est commensurable avec π, le mouvement du point v, avec n'importe laquelle de ses positions initiales sur la circonférence E_2, sera périodique avec *la période* 4ω. Ce mouvement se détermine au moyen de l'expression:

$$v=\sin\theta\cdot\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)+c\cdot\operatorname{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)+c\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}.\tag{164}$$

Ici c est une quantité constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E_2, et elle a la forme: $c=e^{\beta i}$ où β est une quantité réelle. La trajectoire du point V passe dans ce cas par le pôle inférieur de la sphère O.

Quand $\beta=0$, nous avons: $c=1$ et par conséquent $v=\sin\theta$. Quand $\beta=\pi$, nous avons: $c=-1$ et $v=-\sin\theta$. Dans ces deux cas le solide se balance autour de l'axe $O\eta$, qui reste immobile.

Si le temps τ reçoit un accroissement égal au nombre entier m des périodes 2ω, le point v, qui représente la quantité (164), se transporte au point v_m, représentant la quantité

$$v_m=\sin\theta\cdot\frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)+(-1)^m c\cdot\operatorname{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}{\operatorname{Sin}\left(\frac{a\theta}{2}\right)+(-1)^m c\cdot\operatorname{Cos}\left(\frac{a\theta}{2}\right)}.\tag{165}$$

Si m est une quantité paire; $v_m = v$, mais m est impaire, $v_m = v_1$.

Le cas, caractérisé par les conditions: $l_1 = 0$, $-1 < \zeta_0 < +1$, a lieu quand le *solide a reçu une force vive pas trop grande* ($l_2 < 2\varrho_0$). Entre autre ce mouvement se produit dans le cas, où l'on a fait partir le solide examiné de n'importe quelle position sans *vitesses initiales.*

Cas où $l_1 = 0$, $\zeta_0 = -1$.

Dans ce cas

$$R^2 = 2B\varrho_0(1-\zeta)(1+\zeta)^2.$$

Les racines ζ_1, ζ_2 et ζ_3 se présentent ainsi:

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_0 = -1, \quad \zeta_3 = +1.$$

La seconde des conditions (17) est remplacée par la condition de la limite $\Delta = 0$. Le semipériode ω change en ∞, c. à. d. que la fonction ζ n'a pas de période réelle dans le cas que nous examinons.

En intégrant l'équation (10) nous trouvons:

$$\zeta = \left\{\frac{2}{e^{\alpha(t-t_0)} + e^{-\alpha(t-t_0)}}\right\} - 1, \tag{166}$$

où t_0 est une quantité constante et

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varrho_0}{B}}.$$

La position du point v sera déterminée dans ce cas au moyen de l'amplitude Φ, que l'on trouve par l'expression (153).

Cas où $l_1 = 0$, $\zeta_0 = +1$.

Dans ce cas limite

$$R^2 = 2B\varrho_0(1-\zeta)(1-\zeta^2).$$

Les racines ζ_1, ζ_2, ζ_3 sont représentées à ce moment de la manière suivante:

$$\zeta_1 = -1, \quad \zeta_2 = \zeta_3 = \zeta_0 = +1.$$

Les conditions (17) se remplacent par les conditions de la limite: $\zeta_0 = 1$ et $\Delta = 0$. La fonction ζ change en constante égale à 1. Le module de la quantité v, égal à $\sqrt{1-\zeta^2}$, est toujours zéro. Le solide tourne également autour de l'axe $O\zeta$, qui coïncide avec la ligne verticale OV.

§ 12.

Cas où les racines ζ_2 et ζ_3 sont égales.

Ce cas limite qui est un cas *singulier*, sur lequel Mr. N. E. Joukovsky a arrêté son attention, appartient aussi au nombre des plus simples. Ce cas est caractérisé par les conditions:

$$\zeta_0 < 1, \quad \Delta = 0, \tag{167}$$

remplaçant les conditions (17), qui ont servi de base aux déductions précédentes.

Sous les conditions (167) les racines ζ_2 et ζ_3 deviennent égales, La quantité ζ, qui, en général, doit varier entre ζ_2 et ζ_3, devient dans ce cas particulier la constante:

$$\zeta = \zeta_2 \text{*)}. \tag{168}$$

Les circonférences E_2 et E_3 coïncident dans la même circonférence E, par laquelle le point v doit se mouvoir. La droite $O\zeta$ doit se mouvoir par la surface d'un cone à base circulaire, dont l'axe coïncide avec la ligne verticale OV (Fig. 1). L'équation (14) prend la forme:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{l_1 i(av - 2\zeta)v}{2B(1-\zeta^2)} + \frac{al_1 i}{2B} = 0. \tag{169}$$

L'équation (169) peut être intégrée immédiatement, par la séparation des variables. En sousentendant par b' et b'' les racines des équations

$$av^2 - 2\zeta v + a(1-\zeta^2) = 0, \tag{170}$$

résolue par rapport à v, et supposant

$$\gamma = \frac{al_1(b'-b'')}{2B(1-\zeta^2)}, \tag{171}$$

nous trouvons:

$$v = \frac{b'' - b'ce^{i\gamma t}}{1 - ce^{i\gamma t}}, \tag{172}$$

où c est une constante, déterminée par la position initiale du point v sur la circonférence E.

Le caractère du mouvement que nous examinons dépend de celui des racines b' et b''. Ainsi il nous faut distinguer ici trois cas:

---

*) L'équation (10) est satisfaite par des solutions singulières $\zeta = \zeta_2$ et $\zeta = \zeta_3$ même avec $\Delta > 0$. Mais ces résolutions particulières, quand $\Delta > 0$, n'amènent pas la solution du problème concernant le mouvement, car avec ces solutions quelques unes des équations (2) ne peuvent pas être satisfaites.

1) quand les racines b' et b'' sont des imaginaires conjuguées, 2) quand les racines b' et b'' sont réelles et inégales et 3) quand les racines b' et b'' sont réelles et égales. Le troisième cas est un cas intermédiaire par rapport aux deux premiers.

Premier cas. Supposons que

$$\zeta^2 < a^2(1-\zeta^2), \tag{173}$$

c. à. d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont imaginaires et inégales. La quantité γ, déterminée par l'expression (171), est aussi dans ce cas une imaginaire de la forme:

$$\gamma = i\gamma_1,$$

où γ_1 est une quantité réelle, que nous compterons aussi comme *positive* (ce qui s'obtient par le choix du signe du radical dans les expressions des racines b' et b''). Avec ces conditions et avec l'exigence de placer le point v sur la circonférence E, l'expression (162) prendra la forme:

$$v = b'' \cdot \frac{1 - b' z e^{-\gamma_1 t}}{1 - b'' z e^{-\gamma_1 t}}, \tag{174}$$

où z est une quantité *réelle* arbitraire constante.

En examinant l'expression (174) dans deux cas particuliers: 1) quand $z = 0$ et 2) quand $z = \infty$, nous nous convainquons que dans ces cas le solide se mouve de façon à ce que le point v reste en repos, occupant soit la position b'' (si $z = 0$), soit la position b' (si $z = \infty$). Par conséquent le solide doit tourner dans chacun de ces deux cas autour de l'axe OV [avec une vitesse constante, comme le montre l'expression (40)]. Les positions immobiles b' et b'' du point v seront nommées pans ces deux cas positions *asymptotiques* du premier et du second genre. Ces positions du point v sont symétriques par rapport à l'axe $O\xi$, puisque les quantités b' et b'' sont conjuguées.

Examinons ensuite l'équation (174), admettant que la quantité z soit finie et différente de zéro. Dans ce cas le point v se déplace continuellement sur l'un des deux arcs de la circonférence E, partagée en deux parties par les points b' et b'', et s'approche sans limite ou de la position asymptotique b'' (si t augmente jusqu'à $+\infty$), ou de la position asymptotique b' (si t diminue jusqu'à $-\infty$).

Il est évident que le cas, que nous examinons, présente un cas limite (quand $\zeta_3 - \zeta_2$ tend à zéro) du mouvement, exploré dans le § 6. Aux deux mouvements asymptotiques périodiques désignés du point v correspondent en cas limite les deux positions asymtotiques b' et b'' du point v, c. à. d. les trajectoires fermées $S_{+\infty}$ et $S_{-\infty}$ dans la limite (quand $\zeta_3 - \zeta_2$ tend à zéro) se transforment d'une manière correspondante en

points b'' et b'. En même temps les courbes $\Sigma_{-\infty}$ et $\Sigma_{+\infty}$ changent aussi en points; ainsi on voit immédiatement que le nombre J des tours, produits par chacune de ces courbes autour de l'axe $O\zeta$, doit être zéro. Cette remarque de même que la constance de l'index J avec le changement de l_1, l_2 et a a servi plus haut (§ 9) de base à une des preuves du théorème qui démontre que $J = 0$.

La quantité caractéristique h (désignée plus bas) doit être réelle dans ce cas.

Second cas. Supposons que

$$\zeta^2 > a^2(1-\zeta^2), \tag{175}$$

c. à. d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont réelles inégales. Au moyen de cette condition et avec l'exigence que le point v reste sur la circonférence E, l'expression (172) se présentera ainsi:

$$v = \sqrt{1-\zeta^2}\cdot\frac{b''+\sqrt{1-\zeta^2}\cdot e^{i(\gamma t+\vartheta)}}{\sqrt{1-\zeta^2}+b''\cdot e^{i(\gamma t+\vartheta)}}, \tag{176}$$

où ϑ est une quantité constante arbitraire réelle.

Avec le changement du temps t le point v se déplace sur la circonférence E sans tendre à aucune position asymptotique et en décrivant la circonférence entière E dans la période de temps représenté par la quantité*)

$$\frac{2\pi}{\gamma}.$$

Il est évident que ce mouvement présente un cas limite (quand $\zeta_3 - \zeta_2$ tend à zéro) du mouvement qui a été examiné dans le § 7. La quantité caractéristique h (désignée plus bas) doit être imaginaire dans ce cas.

Troisième cas. Supposons que

$$\zeta^2 = a^2(1-\zeta^2), \tag{177}$$

c. à. d. que les racines b' et b'' de l'équation (170) sont égales $\left(b' = b'' = \frac{\zeta}{a}\right)$. Dans ce cas l'intégrale de l'équation (169) peut être exprimé ainsi:

$$v = \frac{\zeta}{a}\left\{1 + \frac{2\gamma'}{i(t+\varepsilon)-\gamma'}\right\}, \tag{178}$$

où

$$\gamma' = \frac{B\zeta}{a^2 l_1},$$

*) Cette période a une valeur singulière qui n'appartient qu'au cas limite que nous examinons. Cette période existe même quand la quantité caractéristique h, étant imaginaire, a l'amplitude φ incommensurable avec π.

et z est une constante arbitraire, à laquelle on doit donner une valeur réelle pour que le point v puisse se poser sur la circonférence E.

Quand $z = \pm \infty$, l'expression (178) se réduit à la forme:

$$v = \frac{\xi}{a} = b_0. \tag{178'}$$

Dans ce cas le solide se mouve de façon que le point v reste toujours en repos en occupant une position b_0 que nous nommerons *asymptotique*. Le solide tourne dans ce cas régulièrement autour de la verticale OV.

Supposons maintenant que la quantité z de l'équation (178) soit finie. Dans ce cas le point v se déplace, pendant le changement continuel du temps t, sans interruption sur la circonférence E, en approchant sans limite de la position asymptotique b_0, (178') quand le temps t croît jusqu'à $+\infty$ ou quand il décroît jusqu'à $-\infty$.

Il est évident que le mouvement que nous examinons présente le cas limite du mouvement qui a été examiné dans le § 8.

Remarque.

Dans le cas que nous examinons la demi-période ω, déterminée par l'expression (29), se présente, pour le variable τ, de cette façon:

$$\omega = \frac{1}{2}\int_{e_1}^{\infty} \frac{dy}{(y-e_2)\sqrt{y-e_1}} = \frac{\pi}{2\sqrt{e_1-e_2}}. \tag{179}$$

Si nous passons au moyen de la deuxième des expressions (23) au variable t, la demi-période Ω s'exprimera pour ce variable de la façon suivante:

$$\Omega = \frac{B\pi}{2\sqrt{e_1-e_2}}\sqrt[3]{\frac{2}{B\varrho_0}} = \pi\sqrt{\frac{B\xi}{\varrho_0(1+3\xi^2)}}. \tag{179'}$$

La quantité caractéristique h se présentera [comme il est facile de le voir au moyen de l'expression (172)] comme l'une des quatre quantités:

$$\pm e^{\pm i\gamma\Omega},$$

où γ est déterminé par l'expression (171) et

$$\gamma\Omega = \pi\sqrt{\frac{\xi^2 - a^2(1-\xi^2)}{1+3\xi^2}}. \tag{180}$$

Sous les conditions (173) la quantité h sera représentée ainsi:

$$h = e^{\gamma_1\Omega}, \tag{181}$$

par quoi la condition (62) sera remplie.

Sous la condition (175) l'amplitude φ de la quantité caractéristique h sera:

$$\varphi = \gamma\Omega, \tag{182}$$

par quoi, comme le montre l'expression (180), les conditions (63) seront satisfaites. Donc

$$h = e^{i\gamma\Omega}. \tag{183}$$

Nous avons consideré dans les §§ 6—8 les courbes fermées de la forme σ_m. Dans le cas limite quand $\zeta_2 = \zeta_3$, la courbe fermée σ_m représente l'arc $U_m U_{m+1}$ passé deux fois en sens inverses. Le nombre J des tours, produits autour de l'axe $O\zeta$ par la courbe σ_m, est évidemment égal à zéro. Ainsi nous trouvons la démonstration nouvelle du théorème sur l'index J.

Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen.

Von

A. Wiman in Lund.

§ 1.

Die ebenen projectiven Gruppen von endlichem Grade.

Die Gruppe, welche wir hier betrachten wollen, ist *mit den geraden Vertauschungen von 6 Dingen* holoedrisch isomorph. Da es mir aber scheint, dass die Existenz einer solchen ebenen Gruppe bisher nicht bekannt geworden ist, glaube ich die folgenden allgemeinen Erörterungen voranschicken zu dürfen.

Die Aufgabe, alle möglichen endlichen Gruppen linearer Substitutionen im *binären* Gebiete zu bestimmen, wurde bekanntlich zuerst von Herrn Klein durch geometrische Betrachtungen, dann von Herrn Gordan rein algebraisch erledigt. Sodann hat Herr C. Jordan die entsprechende Aufgabe im *ternären* Gebiete behandelt*). Die Schwierigkeit der Aufgabe bei mehr als zwei homogenen Veränderlichen erwies sich schon daraus, dass Herr Jordan in seiner ersteren Arbeit eine Gruppe von 168 Collineationen der Ebene übersehen hatte, welche inzwischen von Herrn Klein durch Betrachtung der Transformationen 7. Ordnung der elliptischen Functionen abgeleitet wurde.

Indessen vermisst man bei Herrn Jordan auch diejenige Gruppe, welche den Gegenstand der vorliegenden Abhandlung bilden soll. Dieselbe ist erst späterhin von Herrn Valentiner aufgestellt worden**). In der citirten Arbeit wird gezeigt, dass die fragliche Gruppe aus 45 symmetrischen Collineationen, 80 von der Periode 3, 90 von der Periode 4 und 144 von der Periode 5 besteht. Man findet nun leicht,

*) *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique*, Journal für Mathematik Bd. 84 (1878), sowie: *Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire*, Atti della Reale Accademia di Napoli (1880).

**) *De endelige Transformations-Gruppers Theori*, avec un résumé en français (1889) in den Abhandlungen der Dänischen Akademie 6. Reihe V.

dass innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen die gleiche Zahl Operationen von den bezüglichen Periodenzahlen auftreten. Doch hat Herr Valentiner nicht den Schluss gezogen, dass letztere Gruppe mit der von ihm gefundenen ebenen Gruppe holoedrisch isomorph sei. Er begnügt sich statt dessen mit der Bemerkung, dass seine Gruppe die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthalte. Diese Ausdrucksweise ist nicht glücklich gewählt, weil dieselbe zu der irrthümlichen Ansicht Anlass geben kann, es handle sich hier um eine *ausgezeichnete* Ikosaedergruppe. Das wirkliche Verhältniss ist aber, wie wir weiterhin finden werden, dieses, dass die zu besprechende Gruppe *zwei Systeme von je sechs gleichberechtigten* Ikosaedergruppen enthält.

Da eine Zusammenstellung *aller möglichen endlichen Collineationsgruppen der Ebene* wohl niemals gegeben worden ist*), möge eine solche hier ihren Platz finden. Diese glauben wir durch die gleichzeitige Benutzung der Resultate der Herren Jordan und Valentiner erhalten zu können. Dass keine Gruppe der Aufmerksamkeit dieser beiden Verfasser entgangen ist, scheint nämlich um so weniger zweifelhaft, als ihre Arbeiten völlig unabhängig von einander entstanden sind. Herr Valentiner kennt nämlich die Arbeiten von C. Jordan offenbar nicht, was daraus ersichtlich ist, dass er nirgends Herrn C. Jordan citirt, und überdies einen anderenfalls leicht zu vermeidenden Fehler begeht; auf Grund einer irrigen Voraussetzung verneint er nämlich die Existenz der von geometrischer Seite her schon lange bekannten Hesse'schen Gruppe vom Grade 216**).

Bezeichnen wir nun solche Gruppen als *trivial*, bei denen entweder *eine Gerade stets in sich übergeht*, oder auch *drei Punkte sich geschlossen permutiren*, so bleiben nur noch *sechs Fälle* zu erwähnen übrig. Von diesen braucht man aber *in letzter Instanz nur drei von den Gradzahlen* 216, 168, 360 zu berücksichtigen, weil die drei übrigen bereits in ihnen als Untergruppen enthalten sind; zudem ist von den Letzteren, deren Gradzahlen $= 72, 36, 60$ sind, die G_{60} keine andere als die *ternäre* Ikosaedergruppe. Die drei Hauptfälle seien hier nun angeführt.

1) *Die Hesse'sche Gruppe von* 216 *Collineationen.*

Diese Gruppe gehört zu einem Büschel:

$$\lambda_1 F + \lambda_2 H = 0,$$

wo F eine cubische ternäre Form, H ihre Hesse'sche Covariante be-

*) Herr Franz Meyer giebt zwar eine solche in seinem *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung I). Dort ist aber offenbar die wahre Bedeutung der von Herrn Valentiner gefundenen G_{360} nicht erkannt.

**) S. 151, 222 der citirten Arbeit.

zeichnet. F und H erfahren nämlich bei der G_{216} die linearen Substitutionen einer *Tetraedergruppe*, durch welche je 12 Curven des Büschels mit derselben absoluten Invariante in einander übergeführt werden. Von den fundamentalen Formen der Tetraedergruppe sind bekanntlich zwei von der Ordnung 4 und eine von der Ordnung 6; letzterer entspricht das System der 6 *harmonischen* Curven des Büschels, den ersteren die Systeme der 4 *äquianharmonischen* Curven und der 4 *Wendepunktsdreiecke. Die Hesse'sche Gruppe besitzt eine ausgezeichnete G_{72}, welche der innerhalb der Tetraedergruppe ausgezeichneten Vierergruppe zugeordnet ist.* Den symmetrischen Operationen innerhalb der Vierergruppe entsprechen *drei* G_{36}, von denen jede 2 harmonische C_3 in sich überführt; der Identität aber eine innerhalb der G_{216} *ausgezeichnete* G_{18}, bei welcher jede Curve des Büschels in sich übergeht. *Die Untergruppen G_{72} und G_{36} sind oben als nicht trivial angeführt**).

2) *Eine Gruppe von* 168 *Collineationen.* Als ein einfaches invariantes geometrisches Gebilde tritt hier eine C_4 auf:

$$x^3y + y^3z + z^3x = 0^{**}).$$

3) Die hier zu untersuchende *Gruppe von* 360 *Collineationen.* Als Eigenschaften derselben seien im voraus die folgenden mitgetheilt. Die G_{360} ist, gleichwie die G_{168}, *einfach*, und man erkennt leicht manche Analogien zwischen diesen beiden Gruppen; namentlich lassen sich ihre *vollständigen Formensysteme* in völlig übereinstimmender Weise ableiten. Die einfachste zur G_{360} gehörige Form kann man auf die folgende Gestalt bringen:

$$F_6 = 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45x^2y^2z^2 - 135xyz^4 + 27z^6.$$

Das Formensystem besteht nun aus F_6, ihrer Hesse'schen Determinante H, der durch die Derivirten H_1, H_2, H_3 geränderten Hesse'schen Determinante Φ und der Functionaldeterminante Ψ von F, H und Φ, welche letztere, gleich Null gesetzt, 45 *Symmetrieaxen darstellt.*

Innerhalb der G_{260} treten zwei Systeme von je 15 *gleichberechtigten Oktaedergruppen und zwei Systeme von je* 6 *gleichberechtigten Ikosaedergruppen auf. Durch die geraden Vertauschungen der zu den einzelnen Ikosaedergruppen eines solchen Systems gehörenden Gebilde entsteht die* G_{360}. Von anderen Untergruppen innerhalb der G_{360} erwähnen wir 10 G_{36}, *welche alle gleichberechtigt sind.* Diese G_{36} sind Collineationsgruppen von harmonischen C_3 und sind folglich schon als Untergruppen der Hesse'schen Gruppe bekannt.

---

*) Eine eingehende Behandlung der Hesse'schen Gruppe findet man in einer Abhandlung von Herrn Maschke, *Aufstellung des vollen Formensystems einer quaternären Gruppe von* 51840 *linearen Substitutionen,* Math. Ann., Bd. 33.

**) Diese Gruppe ist wiederholt und erschöpfend in Klein-Fricke's „*Modulfunctionen*“ besprochen.

§ 2.

Die Oktaedergruppen innerhalb der G_{360}. Aufstellung der Substitutionen.

Die Frage, ob es in der Ebene eine umfassendere projective endliche Gruppe giebt, welche die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthält, wollen wir späterhin direct erledigen; zu dem Ende brauchen wir ja nur zu untersuchen, ob irgend welche bei der Ikosaedergruppe invariante geometrische Gebilde noch weitere Collineationen in sich gestatten. Hier sei nur vorab das Resultat mitgetheilt, dass man auf diese Weise in der That eine Gruppe von 360 Collineationen erhält, bei welcher der bei der ursprünglichen Ikosaedergruppe invariante Kegelschnitt in 5 andere übergeführt wird, und dass diese 6 Kegelschnitte bei der G_{360} alle möglichen geraden Vertauschungen erfahren. Wenn A und B die bei der Ikosaedergruppe invarianten Formen 2. bez. 6. Grades darstellen, so hat man in $A^3 + kB$ eine bei der ganzen G_{360} invariante Form, wobei k eine gewisse Constante bedeutet.

Nun lässt sich leicht beweisen, dass innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen 2 Systeme von je 15 gleichberechtigten Oktaedergruppen auftreten. Wir erhalten eine Oktaedergruppe des einen Systems, wenn wir 4 beliebige Dinge, etwa (1234), allen möglichen Vertauschungen unterwerfen, doch so dass bei den ungeraden Vertauschungen dieser 4 Dinge auch 5 und 6 permutirt werden. Eine analoge Bildungsweise hat man aber auch für die Oktaedergruppen des anderen Systems, weil bei der G_{360} auch 6 andere Kegelschnitte alle mögliche gerade Vertauschungen erfahren, so dass die beiden Systeme von Oktaedergruppen auf 2 Systeme von je 6 Kegelschnitten oder Ikosaedergruppen bezogen sind.

Eine Oktaedergruppe besitzt bekanntlich eine ausgezeichnete Vierergruppe. Zu den 3 Operationen von der Periode 2 innerhalb dieser Vierergruppe gehören 3 Perspectivitätsaxen, welche ein bei der Oktaedergruppe ausgezeichnetes Dreieck bilden. Durch die Combination der Vierergruppe mit den Vertauschungen der Seiten dieses Dreiecks entsteht die ternäre Oktaedergruppe. Wählen wir das genannte Dreieck zum Coordinatendreieck, so können wir bewirken, dass jede bei der Oktaedergruppe invariante Form in völliger Symmetrie in Bezug auf x, y und z auftritt; zudem ist xyz die einzige bezügliche Form von ungerader Ordnung. Eine invariante Form von der Ordnung 6 kann man also in der folgenden Weise schreiben:

$$(1) \quad F_6 = x^6 + y^6 + z^6 + a(x^4y^2 + x^2y^4 + x^4z^2 + x^2z^4 + y^4z^2 + y^2z^4) \\ + bx^2y^2z^2.$$

Man soll nun a und b so bestimmen, dass die Form F_6 nicht nur bei der Oktaedergruppe sondern auch bei einer G_{360} der fraglichen Art in sich übergeht. Zu dem Ende bemerken wir, dass bei der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen 45 Operationen von der Periode 2 auftreten, z. B. diejenige, bei welcher (1,2) und (3,4) vertauscht werden, 5 und 6 je in sich übergehen. Die Curve $F_6 = 0$ soll also 45 Symmetrieaxen besitzen. Weil aber die Curve durch 2 Systeme von je 15 Oktaedergruppen in sich übergeführt wird, muss jede Symmetrieaxe dem ausgezeichneten Coordinatendreieck von 2 Oktaedergruppen angehören; anderenfalls wären ja 90 Symmetrieaxen erforderlich.

Nun gehen durch die Coordinatendreiecke $x = y = 0$ zwei andere Symmetrieaxen: $x + y = 0$ und $x - y = 0$. Damit die obige Bedingung befriedigt werde, muss die Curve $F_6 = 0$ auch durch eine andere Oktaedergruppe in sich übergehen, bei welcher das zur ausgezeichneten Vierergruppe gehörige Dreieck aus den Geraden $z = 0$ und $x \pm y = 0$ besteht. Es soll somit möglich sein die Form F_6, auch wenn dieses Dreieck zum Grunde gelegt wird, in der Gestalt (1) zu schreiben. Wir wollen das erreichen durch die Coordinatentransformation:

$$x' = \varrho(x+y), \quad y' = \varrho(x-y), \quad z' = \varrho\sigma z^{*}). \tag{2}$$

Auf diese Weise geht, wenn der Factor ϱ^6 weggelassen und $\sigma^2 = \delta$ gesetzt wird, die Form F_6 in die folgende über:

$$\begin{aligned} F_6' = {} & 2(a+1)(x^6+y^6) + \delta^3 z^6 + (30-2a)(x^4y^2+x^2y^4) \\ & + (2a+b)\delta(x^4z^2+y^4z^2) + 2a\delta^2(x^2z^4+y^2z^4) \\ & + (12a-2b)\delta x^2y^2z^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Mithin können a, b und δ durch das Gleichungssystem:

$$\begin{gathered} 2(a+1) = \delta^3; \\ 30 - 2a = (2a+b)\delta = 2a\delta^2 \end{gathered} \tag{4}$$

bestimmt werden. Sehr leicht ergiebt sich nun

$$\delta^5 + \delta^3 - 2\delta^2 - 32 = (\delta-2)(\delta^2-\delta+4)(\delta^2+3\delta+4) = 0. \tag{5}$$

Wir haben also drei Fälle zu berücksichtigen.

1) $\delta = 2$. Man erhält $F_6 = (x^2+y^2+z^2)^3$. Dieser Fall interessirt uns hier nicht.

2) $\delta^2 + 3\delta + 4 = 0$. Das System der Lösungen ist hier:

$$\begin{aligned} \delta &= -\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{i\sqrt{7}}{2}; \\ a &= \tfrac{5}{4}(1 \pm i\sqrt{7}); \\ b &= -5(3 \pm i\sqrt{7}). \end{aligned}$$

---

*) Hier bezeichnen x', y', z' die alten, x, y, z die neuen Coordinaten.

Die Curve $F_6 = 0$ ist aber für diese Werthe von a und b keine andere als die Hesse'sche Curve einer C_4 mit 168 *Collineationen in sich.* Die im vorigen Paragraphen erwähnte G_{168} besitzt ja 2 Systeme von je 7 gleichberechtigten Vierergruppen (und Oktaedergruppen), und jede G_2 innerhalb der G_{168} betheiligt sich an je einer Vierergruppe jedweden Systems*). Die Gleichung der speciellen C_4, welche durch die G_{168} in sich übergeht, kann man auf die Gestalt:

$$x^4 + y^4 + z^4 + a(x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2) = 0$$

bringen, wenn die Coordinatenaxen ein zu einer Vierergruppe gehöriges Perspectivitätsdreieck bilden. Nun findet man in analoger Weise, wie oben die Constanten in F_6 bestimmt wurden,

$$a = -\tfrac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{7}).$$

Von diesen a-Werthen gilt der eine oder der andere, je nachdem die C_4 auf eine Vierergruppe des einen oder anderen Systems bezogen wird. Es ist nun leicht zu bestätigen, dass die obenerwähnte C_6 die Hesse'sche Covariante dieser C_4 bildet.

3) $\delta^2 - \delta + 4 = 0$. Man erhält hier:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta &= \tfrac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{15});\\ a &= -\tfrac{3}{4}(5 \pm i\sqrt{15});\\ b &= 3(5 \mp i\sqrt{15}). \end{aligned}$$

Werden a und b nach (6) *bestimmt, so besitzt die Curve $F_6 = 0$ eine Gruppe von* 360 *Collineationen in sich.*

Die beiden in (6) erhaltenen Werthsysteme bezeichnen wir mit δ_1, a_1, b_1 und δ_2, a_2, b_2. Man findet leicht:

$$(7)\qquad \frac{15 - a_1}{a_1 + 1} = a_2; \qquad \frac{(6a_1 - b_1)\delta_1}{a_1 + 1} = b_2.$$

Aus den Gleichungen (3), (4) und (7) erschliesst man, dass das eine Werthsystem gilt, falls die Curve auf die ursprüngliche Oktaedergruppe bezogen ist, das andere aber nach der Transformation auf das zur neuen Oktaedergruppe gehörige Coordinatendreieck. *Die beiden Oktaedergruppen sind folglich nicht gleichberechtigt innerhalb der Collineationsgruppe, welche die Curve $F_6 = 0$ in sich überführt.* Den Oktaedergruppen ist eine diedrische G_8 gemein, bei welcher $z = 0$ in sich übergeht, und folglich auch die cyklische Untergruppe G_4. Die Gleichung der C_6 muss *ohne doppelte Zeichen* gegeben werden können, falls man die Fixpunkte bei dieser G_4 als Coordinatenecken wählt, da

*) Man sehe Klein-Fricke, *Modulfunctionen* I, S. 710.

ja alle G_4 innerhalb der Oktaedergruppen mit einander gleichberechtigt sind. Die neuen Coordinatenaxen sind folglich $z=0$ und $x \pm yi = 0$. Setzen wir nach (6)

$$a = -\tfrac{3}{4}(5 \pm i\sqrt{15}),$$

so erhalten wir die bezweckte Transformation etwa durch die Substitutionen:

$$\xi = (x+yi)\sqrt{\frac{a}{30}}\sqrt[4]{\pm i};$$

$$\eta = (x-yi)\sqrt{\frac{a}{30}}\sqrt[4]{\mp i};$$

$$\zeta = z,$$

wobei die Wurzeln in der Weise gewählt sind, dass $\sqrt[4]{\pm i}\sqrt[4]{\mp i} = 1$. Als resultirende Normalgleichung der C_6 erhalten wir:

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\zeta^6 + 30\zeta^4\xi\eta - 150\zeta^2\xi^2\eta^2 + 100\xi^3\eta^3 \\ &+ 15\sqrt{15}(\zeta^2+2\xi\eta)(\xi^4-\eta^4) = 0.\end{aligned}$$

Dass diese C_6 360 Collineationen in sich besitzt, folgt schon daraus, dass 15 Oktaedergruppen jeder Art existiren; eine Oktaederconfiguration kann ja durch 24 Collineationen in eine beliebige andere gleichberechtigte übergeführt werden. Es erübrigt also noch jene geschlossenen Systeme von je 15 Oktaedergruppen aufzusuchen. Nun kommt man immer nach (2) von je einer Oktaedergruppe des einen Systems zu dreien des anderen Systems, welche je eine Operation der ausgezeichneten Vierergruppe mit derselben gemein haben. Geht man folglich von einer bestimmten Oktaedergruppe des Systems S_1 aus, so kommt man zunächst zu drei Gruppen des Systems S_2; von diesen gelangt man zu 6 neuen Gruppen des Systems S_1 und von hier zu 12 neuen Gruppen des Systems S_2; geht man so fort, so könnte es scheinen, als ob man von den 12 letzterwähnten Gruppen noch zu 24 Gruppen des Systems S_1 gelangen würde. Es erweist sich aber, dass diese 24 Gruppen *zu je dreien zusammenfallen.* Daraus folgt unmittelbar, dass die Systeme S_1 und S_2 geschlossen sind und aus je 15 Oktaedergruppen bestehen.

Wir haben bereits erwähnt, dass innerhalb der G_{360} auch 2 Systeme von je 6 Ikosaedergruppen existiren. Diese Systeme sind den beiden Oktaedersystemen in der folgenden Weise zugeordnet:

Je 2 Ikosaedergruppen desselben Systems haben mit einander eine Tetraedergruppe gemein. Auf diese Weise erhält man 15 Tetraedergruppen, welche Untergruppen eines entsprechenden Systems von Oktaedergruppen sind.

Bezeichnen wir desshalb die Ikosaedergruppen des Systems S_1 mit $1_1, \ldots, 6_1$, so ergeben sich für das entsprechende System Oktaedergruppen die Bezeichnungen $(1, 2)_1, \ldots, (5, 6)_1$. Ein Analoges gilt natürlich für das System S_2.

Von der Ausgangsgruppe mit den Axen x, y, z kommen wir nach (2) zu einer Gruppe mit den Axen $\frac{x \pm y}{\sigma_1}$, z, und von dieser zu zwei neuen mit der ersten gleichberechtigten Gruppen mit den Axen:

$$\frac{z \pm \frac{x+y}{\sigma_1}}{\sigma_2}, \quad \frac{x-y}{\sigma_1}; \qquad \frac{z \pm \frac{x-y}{\sigma_1}}{\sigma_2}, \quad \frac{x+y}{\sigma_1}$$

und so fort. Nun hat man $\sigma_1^2 = \delta_1$, und wir nehmen in (6)

$$\delta_1 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{15}),$$

so dass man

$$\frac{1}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{5} - i\sqrt{3}}{4}$$

und in gleicher Weise

$$\frac{1}{\sigma_2} = \frac{\sqrt{5} + i\sqrt{3}}{4}$$

setzen kann.

Gleichwie man die Oktaedergruppe durch die Substitutionen erhält, welche aus der Combination der Zeichenwechsel und Vertauschungen von x, y und z hervorgehen, so erhält man die ganze G_{360}, wenn man x, y und z in analoger Weise durch die Axen der mit der Ausgangsgruppe gleichberechtigten Oktaedergruppen ersetzt.

Es ist aber nicht möglich eine mit der Collineationsgruppe G_{360} holoedrisch isomorphe Gruppe von 360 ternären homogenen Substitutionen herzustellen. Dies folgt schon daraus, dass nach Herrn C. Jordan die entsprechende Möglichkeit schon für die Untergruppe G_{36}, welche die Collineationsgruppe der harmonischen C_3 bildet, nicht besteht. Auch findet man, dass es bei der obigen Aufsuchung der Axen der Oktaedergruppen nicht möglich ist, das System so zu schliessen, dass man für die Axen einer Oktaedergruppe blos eine Ausdrucksweise (abgesehen von den Zeichenwechseln) erhält; es kommt nämlich die Multiplication mit den dritten Einheitswurzeln hinzu.

Die G_{360} ist aber mit einer homogenen G_{1080} meriedrisch isomorph; der Identität innerhalb der G_{360} entspricht eine ausgezeichnete G_3, welche durch die Operation

$$x' = jx, \quad y' = jy, \quad z' = jz \qquad (j = e^{\frac{2\pi i}{3}})$$

erzeugt wird.

Jetzt wollen wir die Mittel liefern, um die verschiedenen Oktaedergruppen und mithin die ganze G_{360} herzustellen. Zu dem Zwecke brauchen wir nur diejenigen Ausdrücke anzugeben, welche gleich Null gesetzt, die Axendreiecke der bezüglichen Gruppen definiren. Es ist natürlich nicht nöthig, die bei der homogenen Substitutionsgruppe auftretende Multiplication dieser Ausdrücke mit j, bez. j^2 besonders hinzuzuschreiben.

$$(1,2)_1:\quad x,\ y,\ z,$$

$$(1,2)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x\pm y),\ z,$$

$$(3,4)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z\pm x),\ y,$$

$$(5,6)_2:\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y\pm z),\ x,$$

$$(3,4)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z\pm\frac{1}{2}(x+y),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x-y),$$

$$(5,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z\pm\frac{1}{2}(x-y),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(x+y),$$

$$(3,5)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y\pm\frac{1}{2}(z+x),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z-x),$$

$$(4,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y\pm\frac{1}{2}(z-x),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(z+x),$$

$$(3,6)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x\pm\frac{1}{2}(y+z),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y-z),$$

$$(4,5)_1:\quad \frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x\pm\frac{1}{2}(y-z),\quad \frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{4}(y+z),$$

$$(3,5)_2:\quad \frac{z}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x+y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x-y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z-\frac{1}{2}(x+y),$$

$$(4,6)_2:\quad \frac{z}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x+y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x-y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1}{2}(x+y),$$

$$(3,6)_2:\quad \frac{z}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x-y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x+y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z-\frac{1}{2}(x-y),$$

$$(4,5)_2:\quad \frac{z}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(x-y)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(x+y),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}z+\frac{1}{2}(x-y),$$

$$(1,5)_2:\quad \frac{y}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z+x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z-x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{2}(z+x),$$

$$(2,6)_2:\quad \frac{y}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z+x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z-x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{2}(z+x),$$

$$(2,5)_2:\quad \frac{y}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z-x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z+x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{2}(z-x),$$

$$(1,6)_2:\quad \frac{y}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(z-x)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(z+x),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}y+\frac{1}{2}(z-x).$$

$$(1,3)_2:\quad \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y+z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y-z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}(y+z),$$

$$(2,4)_2:\quad \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y+z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y-z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}(y+z),$$

$$(1,4)_2:\quad \frac{x}{2}+\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y-z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y+z),$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x-\frac{1}{2}(y-z),$$

$$(2,3)_2:\quad \frac{x}{2}-\frac{\sqrt{5}-i\sqrt{3}}{8}(y-z)\pm\frac{1-i\sqrt{15}}{8}(y+z).$$
$$\frac{\sqrt{5}+i\sqrt{3}}{4}x+\frac{1}{2}(y-z),$$

$$(1,5)_1:\quad -\frac{1+\sqrt{5}}{4}j^2z-j\frac{x}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}y,\ -\frac{1-\sqrt{5}}{4}jz-\frac{1+\sqrt{5}}{4}x+\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1-\sqrt{5}}{4}j^2x-\frac{1+\sqrt{5}}{4}jy,$$

$$(2,6)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{1-\sqrt5}{4}x-\frac{jy}{2},\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{j^2x}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}jx+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y.$$

$$(2,5)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{1-\sqrt5}{4}x+\frac{jy}{2},\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{j^2x}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}jx-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y.$$

$$(1,6)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2x+\frac{jx}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}y,\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{1+\sqrt5}{4}x-\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x+\frac{1+\sqrt5}{4}jy,$$

$$(1,3)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{jx}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}y,\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{1+\sqrt5}{4}x-\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x+\frac{1+\sqrt5}{4}jy,$$

$$(2,4)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{1-\sqrt5}{4}x+\frac{jy}{2},\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{j^2x}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}jx-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y,$$

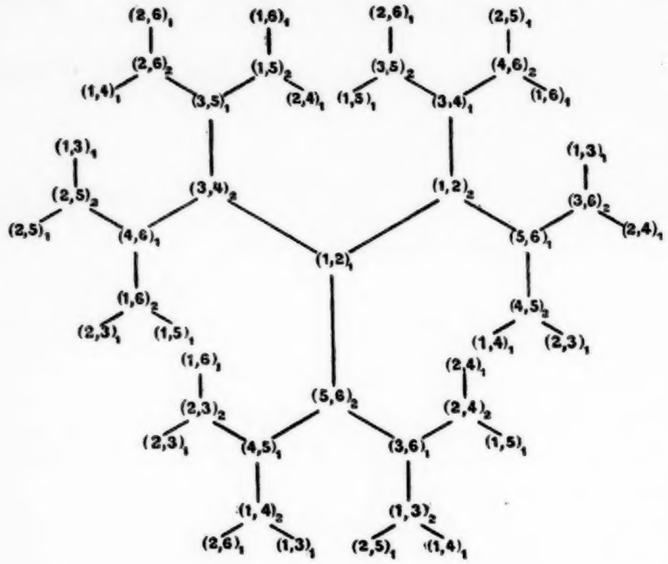
$$(2,3)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z-\frac{1-\sqrt5}{4}x-\frac{jy}{2},\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz-\frac{j^2x}{2}-\frac{1+\sqrt5}{4}y,$$
$$\frac{z}{2}+\frac{1+\sqrt5}{4}jx+\frac{1-\sqrt5}{4}j^2y,$$

$$(1,4)_1:\quad -\frac{1+\sqrt5}{4}j^2z+\frac{jx}{2}+\frac{1-\sqrt5}{4}y,\quad -\frac{1-\sqrt5}{4}jz+\frac{1+\sqrt5}{4}x+\frac{j^2y}{2},$$
$$\frac{z}{2}-\frac{1-\sqrt5}{4}j^2x-\frac{1+\sqrt5}{4}jy.$$

Hier ist jede Oktaedergruppe nach den beiden Ikosaedergruppen bezeichnet, denen ihre ausgezeichnete Tetraedergruppe angehört. Dabei stand es natürlich von vornherein völlig frei, unter den Ikosaedergruppen jedes Systems die Reihenfolge 1, 2, ... 6 in beliebiger Weise zu vertheilen. Ausserdem haben wir noch verschiedene einfache Hülfsmittel angewandt, um die den einzelnen Oktaedergruppen zugehörigen Bezeichnungen (i, k), wo $i < k \leq 6$, zu ermitteln.

Es wäre nun nicht schwer sowohl die Ikosaedergruppen als auch andere Untergruppen innerhalb der G_{360} aufzustellen. Wir verweilen aber hierbei nicht weiter. Hier wollen wir nur noch durch das folgende Schema den Zusammenhang der verschiedenen Oktaedergruppen mit

einander veranschaulichen. Je 2 Gruppen, welche durch einen Strich verbunden sind, haben eine diedrische G_8 gemein.



§ 3.

Die in der G_{360} enthaltenen Untergruppen G_{36}.

Innerhalb der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen befinden sich 10 Untergruppen von der Ordnung 18. Als Beispiel einer solchen nehmen wir diejenige, bei welcher (1, 2, 3) und (4, 5, 6) als zwei geschlossene Systeme von 3 Dingen permutirt werden. Diese G_{18} hat dieselbe Structur wie die Collineationsgruppe der allgemeinen C_3. Betrachten wir nun die umfassendere Untergruppe, bei welcher jene Systeme (1, 2, 3) und (4, 5, 6) auch mit einander vertauscht werden, so erhält man $10\,G_{36}$, welche sich mit der Collineationsgruppe der harmonischen C_3 holoedrisch isomorph erweisen. Bei letzterer Gruppe werden nämlich die vier Wendepunktsdreiecke zu je zweien mit einander vertauscht, und in den Ecken zweier solcher Dreiecke erhält man 6 Dinge, welche Vertauschungen der erwähnten Art erleiden.

Wir wollen jetzt die C_6 mit 360 Collineationen in sich als *Covariante der harmonischen* C_3 darstellen. Die Gleichung der C_3 sei

$$F_3 = 3z^2y + 3xy^2 + x^3 = 0. \tag{1}$$

wir bilden so die Gleichung der Hesse'schen Curve*)

$$(2)\qquad H_3 = \begin{vmatrix} x, & y, & 0 \\ y, & x, & z \\ 0, & z, & y \end{vmatrix} = -z^2x + x^2y - y^3 = 0.$$

Die Invariante 6. Grades T verschwindet, und für die Invariante 4. Grades hat man

$$(3)\qquad S = 1.$$

Ferner giebt es eine unabhängige Covariante 6. Ordnung, welche nicht durch F_3 und H_3 zusammengesetzt werden kann. Als solche wählen wir die durch die Differentialquotienten von H_3 geränderte Hesse'sche Determinante. Wir schreiben also

$$(4)\qquad \Theta_6 = \begin{vmatrix} x & , & y & , & 0 & , & 2xy - z^2 \\ y & , & x & , & z & , & x^2 - 3y^2 \\ 0 & , & z & , & y & , & -2zx \\ 2xy - z^2, & & x^2 - 3y^2, & & -2zx, & & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -z^6 + 9z^4xy + z^2(8x^4 - 30x^2y^2 - 6y^4) + xy(x^4 - 6x^2y^2 + 21y^4).$$

Unter den Covarianten 6. Ordnung in den Veränderlichen hat man nun einen Büschel

$$(5)\qquad \Theta_6 + \lambda S F_3 H_3$$

vom 8. Grade in den Coefficienten. Man soll den Parameter λ so bestimmen, dass man für die Form mit 360 Collineationen in sich

$$F_6 = \Theta_6 + \lambda S F_3 H_3$$

erhält. Zu dem Ende bemerken wir gleich, dass die Eckpunkte des Coordinatendreiecks Fixpunkte bei einer cyklischen G_4 innerhalb der G_{36} sind. Bei der Gleichung (8) des vorigen Paragraphen bleiben auch die Eckpunkte fest bei einer cyklischen G_4. Man hat somit das linke Glied dieser Gleichung mit der oben geschriebenen Form (5) zu identificiren. Nun hat man

$$\begin{aligned} -(\Theta_6 + \lambda S F_3 H_3) = {} & z^6 + (3\lambda - 9)z^4xy + 30z^2x^2y^2 + (6 - 2\lambda)x^3y^3 \\ & + z^2[x^4(\lambda - 8) + y^4(3\lambda + 6)] \\ & - xy[x^4(1 + \lambda) + y^4(21 - 3\lambda)]. \end{aligned}$$

Diese Form soll vermittelst einer Substitution

$$\zeta = z, \quad \xi = \alpha x, \quad \eta = \beta y$$

in die Form

$$\zeta^6 + 30\zeta^4\xi\eta - 150\zeta^2\xi^2\eta^2 + 100\xi^3\eta^3 + 15\sqrt{15}\,(\zeta^2 + 2\xi\eta)(\xi^4 - \eta^4)$$

---

*) Was die Normirung der folgenden Ausdrücke anbetrifft, vergleiche man Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven*, 2. Aufl., S. 243.

übergehen. Man erhält daher unmittelbar die Bedingung

$$(\lambda-8)(21-3\lambda)-(3\lambda+6)(1+\lambda)=0,$$

woraus

$$\lambda = 3 \pm 2i\sqrt{5}. \tag{6}$$

Für α und β ergiebt sich dann

$$15\sqrt{15}\alpha^4 = -5 \pm 2i\sqrt{5}, \quad 5\sqrt{15}\beta^4 = -5 \mp 2i\sqrt{5}$$

unter der hinzutretenden Bedingung, dass

$$\alpha\beta = \pm\frac{i}{\sqrt{5}}.$$

Damit sind aber auch alle erforderlichen Bedingungen erfüllt.

Die Gleichung

$$\Theta_6 + (3\pm 2i\sqrt{5})\,SF_3H_3 = 0 \tag{7}$$

definirt demnach zwei covariante Gebilde der harmonischen C_3 *mit* 360 *Collineationen in sich*. Dieselben sind nach der Terminologie des Hrn. Klein symmetrisch, ob zwar aus der C_3 zunächst unter imaginärer Form hergeleitet.

Dass wir in (6) zwei λ-Werthe gefunden haben, könnte uns leicht zur Ansicht veranlassen, es existiren innerhalb der G_{360} 2 Systeme gleichberechtigter G_{36}. Dem ist aber nicht so, wie durch die folgende Ueberlegung auseinandergesetzt wird. F_3 und H_3 sind Hesse'sche Covarianten zu einander. Nun kann man natürlich, statt von F_3, auch von H_3 ausgehen. Dann kommen wir zunächst zur Hesse'schen Covariante F_3 und darauf zu einer Covariante 6. Ordnung Θ_6', welche eine andere als Θ_6 ist. Man muss ersichtlich auch von diesem Ausgangspunkte die 2 λ-Werthe (6) erhalten. Man findet aber, dass *die* λ-*Werthe, welche derselben Curve* (7) *zugetheilt sind, verschieden sind, jenachdem man von* F_3 *oder* H_3 *ausgeht.*

Von diesem Resultate sei noch die folgende Anwendung gegeben. Die harmonische C_3 hat in Bezug auf zwei Wendepunktsdreiecke, welche bei ihrer G_{36} vertauscht werden, dieselbe Gleichung wie ihre Hesse'sche Curve in Bezug auf die zwei anderen Wendepunktsdreiecke. Daraus folgt aber nach dem obigen Satz, dass, wenn die C_6 mit 360 Collineationen in sich auf ein solches Dreieck bezogen wird, ihre Gleichung für die zwei ersteren und die zwei letzteren verschieden ausfällt. Nun giebt es innerhalb der G_{36} für jedes der vier Dreiecke eine G_3, bei welcher ihre Eckpunkte fest bleiben. Was soeben entwickelt wurde, bedeutet offenbar für diese G_3, dass dieselben auch in der umfassenderen Gruppe G_{360} nicht alle gleichberechtigt sind. Hiermit haben wir bestätigt, dass *es innerhalb der* G_{360} 2 *Systeme* G_3 *giebt, welche nicht mit einander gleichberechtigt sind.*

§ 4.

Die in der G_{360} auftretenden Ikosaedergruppen oder zehnfach Brianchon'schen Sechsecke.

Bei der ternären Ikosaedergruppe bleibt bekanntlich ein Kegelschnitt invariant*). Da es keine höhere endliche *lineare* Gruppe giebt, welche die Ikosaedergruppe als Untergruppe enthält, so muss jener Kegelschnitt, falls die Ikosaedergruppe als Untergruppe einer ebenen Collineationsgruppe G_{360} auftritt, mit fünf anderen vertauschbar sein. Diese 5 C_2 schneiden den ersterwähnten Kegelschnitt in 20 Punkten, welche eine bei der Ikosaedergruppe invariante Schaar bilden sollen. Von solcher Art giebt es aber nur eine einzige Schaar, welche (in übertragenem Sinne) die Ecken des Pentagon-Dodekaeders darstellt. Den 5 Kegelschnitten muss ersichtlich auch ein System von 5 (und nur 5) gleichberechtigten Untergruppen innerhalb der Ikosaedergruppe zugeordnet sein. Die einzigen diesbezüglichen Systeme sind aber bekanntlich 5 Tetraedergruppen oder die in diesen enthaltenen 5 ausgezeichneten Vierergruppen. Jene Tetraedergruppen sind nun der Art, dass die Ecken der zugehörigen Würfel paarweise in den 20 Ecken des Pentagon-Dodekaeders zusammenfallen**). Die 8 zu einer Tetraedergruppe gegehörigen Würfelecken zerlegen sich nun in die Ecken zweier Tetraeder, und man findet die 20 Ecken des Pentagon-Dodekaeders auf 2 Weisen in die Ecken von 5 Tetraedern zerlegt. Die Schnittpunkte der 5 oben besprochenen C_2 mit dem Fundamentalkegelschnitte kann man also auch auf 2 Weisen wählen. Da wir die Existenz der G_{360} schon früher kennen, können wir jetzt die Folgerung ziehen, dass *jede ebene Ikosaedergruppe als Untergruppe in* 2 *Collineationsgruppen* G_{360} *enthalten ist.* Nun ist bekanntlich die Ikosaedergruppe mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von 5 Dingen holoedrisch isomorph. Als diese 5 Dinge können wir ersichtlich die 5 erwähnten Kegelschnitte betrachten. Da aber diese 5 Kegelschnitte in der G_{360} mit dem Fundamentalkegelschnitte vertauschbar sind, erhalten wir bei dieser Gruppe 6 gleichberechtigte C_2, und bei der G_{360} erleiden offenbar diese Kegelschnitte alle möglichen geraden Vertauschungen. *Die* G_{360} *ist also mit der Gruppe der geraden Vertauschungen von* 6 *Dingen holoedrisch isomorph.*

Wir bezeichnen weiterhin jene C_2 als *ein System von* 6 *gleichberechtigten Ikosaederkegelschnitten.* Die gegenseitigen Verhältnisse dieser C_2 zu einander sind in vieler Hinsicht sehr merkwürdig. Je

*) Bezüglich der ternären Ikosaedergruppe verweisen wir auf Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder* II: 4 und Clebsch-Lindemann, *Vorlesungen über Geometrie* II: 1, S. 578.

**) Man sehe Klein a. a. O., S. 19.

zwei von ihnen schneiden einander in 4 Punkten, welche auf beiden die Verschwindungspunkte einer Tetraederform, mithin mit äquianharmonischem Doppelverhältnisse, liefern. Dies besagt in der Sprache der Invariantentheorie, dass *die simultanen Invarianten für jedes Paar der 6 Ikosaederkegelschnitte verschwinden**). Diese Eigenschaft reicht in der That hin, um das ganze System projectivisch zu definiren.

Betrachten wir zwei Ikosaederkegelschnitte, etwa 1 und 2, so haben wir erwähnt, dass jeder in sich bei einer Tetraedergruppe übergeht, welche den beiden Ikosaedergruppen 1 und 2 gemein ist. Vertauschen wir noch 1 und 2, so kommen wir zu einer jene Tetraedergruppe enthaltenden *Oktaedergruppe*, welche wir aus sofort verständlichem Grunde schon im 2. Paragraphen mit (1, 2) bezeichnet haben. Beziehen wir nun die Oktaedergruppe auf ein ausgezeichnetes Coordinatendreieck, so erhalten wir dieselbe durch die Combination der Zeichenwechsel und Vertauschungen der Coordinaten; bei der Tetraederuntergruppe tritt die Beschränkung hinzu, dass die Coordinatenaxen nur cyklisch vertauscht werden. Wir erhalten folglich bei der Oktaedergruppe einen invarianten Kegelschnitt

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0;$$

bei der Tetraedergruppe aber existiren noch deren zwei:

$$x^2 + jy^2 + j^2z^2 = 0, \quad x^2 + j^2y^2 + jz^2 = 0,$$

welche bei der Oktaedergruppe vertauscht werden. Nur diese 3 Kegelschnitte können bei der Tetraedergruppe in sich übergehen. Diese Gruppe enthält ja 4 G_3, bei deren jeder 3 Punkte der Ebene fest bleiben. Ein Kegelschnitt muss aber bei jeder Collineation in sich 2 feste Punkte besitzen. Jene 12 Fixpunkte bei den G_3 zerlegen sich in 3 bei der Tetraedergruppe sich geschlossen permutirende Systeme von je 4. Die 3 invarianten Kegelschnitte gehen durch je 2 von diesen Systemen. Man kann so von der Tetraedergruppe zu 3 Oktaedergruppen hinaufsteigen, bei denen je ein System von 4 Punkten geschlossen bleibt, die beiden anderen aber sich vertauschen lassen. In dem oben erwähnten Falle enthält der Ikosaederkegelschnitt 1 acht von jenen Fixpunkten, welche wir als Dodekaederecken bezeichneten; der Ikosaederkegelschnitt 2 geht durch 4 von diesen und noch 4 andere, die Pole der Verbindungsgeraden zu derselben G_3 gehöriger Dodekaederecken in Bezug auf 1. Durch letztere Punkte und die 4 anderen Dodekaederecken geht der Oktaederkegelschnitt (1, 2). Man ersieht hieraus, dass, wenn die Ikosaedergruppe 1 gegeben ist, man auf völlig bestimmte Weise die Ikosaederkegelschnitte 2, . . ., 6 und die Oktaederkegelschnitte (1, 2), . . ., (1, 6) herleitet, dass aber diese Systeme nicht

*) Man sehe Salmon-Fiedler, *Analytische Geometrie der Kegelschnitte*, 5. Aufl. S. 668.

wesentlich verschieden sind. *Vielmehr liefern bei der anderen* G_{360}, *welche die Ikosaedergruppe* 1 *enthält*, (1, 2), ..., (1, 6) *Ikosaederkegelschnitte und* 2, ..., 6 *Oktaederkegelschnitte.*

Haben wir somit gefunden, dass jeder Ikosaederkegelschnitt zu 5 Oktaederkegelschnitten des zugehörigen Systems die Beziehung hat, dass die simultanen Invarianten verschwinden, so tritt hierzu der nicht minder merkwürdige Satz, dass *der Ikosaederkegelschnitt von den* 10 *anderen Oktaederkegelschnitten doppelt berührt wird.* In der That wird jener Kegelschnitt von diesen in 40 Punkten geschnitten, und es giebt auf jenem kein anderes bei der Ikosaedergruppe invariantes System von 40 Punkten als die Dodekaederecken, doppelt gezählt. Die besprochene Thatsache erläutern wir am besten durch das folgende Beispiel. Die Ikosaedergruppe 1 und die Oktaedergruppe (2, 3) haben mit einander eine cyklische G_3 gemein, bei welcher die Kegelschnitte 1, 2, 3 fest bleiben, und die Kegelschnitte 4, 5, 6 cyklisch vertauscht werden. Bei dieser G_3 bleiben also die Kegelschnitte 1, 2, 3, (1, 2), (1, 3), (2, 3) invariant. Jeder von diesen muss durch 2 von den 3 Fixpunkten bei der G_3 gehen, wobei die Tangenten den 3. Fixpunkt enthalten. Je 2 von den 6 Kegelschnitten sollen also einander doppelt berühren. Die einzige mögliche Zuordnung in dieser Hinsicht ist: 1, (2, 3); 2, (1, 3) und 3, (1, 2), was auch daraus ersichtlich wird, dass z. B. die Gruppen 1 und (2, 3) noch 3 Operationen von der Periode 2 gemein haben, bei welchen die Kegelschnitte 2 und 3 und auch die beiden gemeinsamen Fixpunkte bei der G_3 permutirt werden.

In den bisherigen Erörterungen spielen die 60 Schnittpunkte der Ikosaederkegelschnitte 1, ..., 6 eine ausgezeichnete Rolle. Dieselben erhalten wir als Fixpunkte derjenigen cyklischen G_3, bei denen 3 Kegelschnitte fest bleiben, und die 3 anderen sich cyklisch vertauschen. Nun giebt es in der Gruppe der geraden Vertauschungen von 6 Dingen auch ein anderes System von 20 G_3; bei diesen permutiren sich die die 6 Dinge cyklisch zu je drei, und keine bleiben fest. Letzteres G_3-System steht aber in genau derselben Beziehung zu dem anderen System von Ikosaedergruppen und Oktaedergruppen, welches in der G_{360} enthalten ist.

Zwei Ikosaederkegelschnitte, welche verschiedenen Systemen angehören, berühren einander doppelt. Die einzigen Systeme von 6 gleichberechtigten Untergruppen innerhalb einer Ikosaedergruppe hat man nämlich in 6 G_5 oder in 6 diedrischen G_{10}; diese müssen also in der G_{360} den 6 Ikosaedergruppen des anderen Systems zugeordnet sein. Das einzige System von 4 invarianten Punkten bei einer solchen G_5 oder G_{10} erhält man in den doppelt gezählten Fixpunkten bei der G_5, welche wir (nach räumlichem Analogon) Ikosaederecken nennen. Daraus ergiebt sich unmittelbar der obige Satz, welchen wir dahin präcisiren können,

dass *ein Ikosaederkegelschnitt von den 6 Ikosaederkegelschnitten des anderen Systems in je 2 zu derselben* G_5 *gehörigen Ikosaederecken berührt wird.*

Ein leichtes Mittel, um die vorhergehenden Resultate zu bestätigen und neue abzuleiten, gewährt uns der 2. Paragraph. Wir haben nämlich dort die Ausdrücke X, Y, Z, welche, gleich Null gesetzt, die Axendreiecke der verschiedenen Oktaedergruppen definiren, zusammengestellt. Die zugehörigen Oktaederkegelschnitte werden nun durch die Gleichungen

$$X^2+Y^2+Z^2=0$$

bestimmt, und die Ikosaederkegelschnitte durch

$$X^2+jY^2+j^2Z^2=0, \qquad X^2+j^2Y^2+jZ^2=0,$$

wobei aber jeder Ikosaederkegelschnitt 6 Mal erhalten wird. Da wir also die Gleichungen der Kegelschnitte kennen, können wir folglich leicht ihre Beziehungen zu einander analytisch studiren.

Bei der ternären Ikosaedergruppe sind die invarianten Gebilde niedrigster Ordnung der Fundamentalkegelschnitt

(1) $$A=xy+z^2=0$$

und die Bring'sche Curve*)

(2) $$B=x^3y^3-z(x^5+y^5)-2z^2x^2y^2+8z^4xy=0,$$

wobei die Ecken des Coordinatendreiecks Fixpunkte bei einer cyklischen G_5 liefern. Statt (2) wählen wir das aus 6 Geraden (Verbindunglinien je zweier Ikosaederecken) bestehende Gebilde

(3) $$A^3-B=B_1=z(x^5+y^5+5zx^2y^2-5z^3xy+z^5)=0.$$

Wir fragen nun nach einem Gebilde

(4) $$A^3+\lambda B_1=0,$$

welches 360 Collineationen in sich gestattet. Zu dem Ende bemerken wir, dass es in der That 2 Gebilde dieser Art geben muss, weil, wie oben hervorgehoben wurde, man von der Ikosaedergruppe zu 2 Gruppen G_{360} aufsteigen kann. Weil aber in der G_{360} alle G_5 mit einander gleichberechtigt sind, müssen jene 2 Gebilde mit Beibehaltung des Coordinatendreiecks in einander übergeführt werden können. Wir sollen also λ_1 und λ_2 so bestimmen, dass die Form

$$x^3y^3+\lambda_1z(x^5+y^5)+(3+5\lambda_1)z^2x^2y^2+(3-5\lambda_1)z^4xy+(1+\lambda_1)z^6$$

durch eine Substitution

$$x'=\alpha x, \quad y'=\beta y, \quad z'=\gamma z$$

in die Form

$$x'^3y'^3+\lambda_2z'(x'^5+y'^5)+(3+5\lambda_2)z'^2x'^2y'^2+(3-5\lambda_2)z'^4x'y' \\ +(1+\lambda_2)z'^6$$

*) Vgl. Klein a. a. O., S. 217.

übergeführt wird. Setzen wir

$$\frac{\gamma^2}{\alpha\beta} = \delta,$$

so ergeben sich unmittelbar die Gleichungen:

$$(5)\qquad \begin{aligned} (3+5\lambda_2)\delta &= 3+5\lambda_1, \\ (3-5\lambda_2)\delta^2 &= 3-5\lambda_1, \\ (1+\lambda_2)\delta^3 &= 1+\lambda_1. \end{aligned}$$

Die Lösungen dieses Systems geben wir hier:

$$(6)\qquad \begin{aligned} \delta &= \frac{-7 \pm i\sqrt{15}}{8}, \\ \lambda_2 &= \frac{-9 \mp 3i\sqrt{15}}{20}, \\ \lambda_1 &= \frac{-9 \pm 3i\sqrt{15}}{20}. \end{aligned}$$

Alle übrigen Bedingungen finden wir erfüllt, wenn

$$\alpha = \beta = 1, \quad \gamma = \frac{\lambda_1}{\lambda_2},$$

weil eben

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \delta.$$

Haben wir nun in (4) $\lambda = \lambda_1$ oder λ_2, so können wir diese Gleichung durch die Substitution

$$(7)\qquad z' = \frac{10\lambda_1 z}{9} \quad \text{bez.} \quad \frac{10\lambda_2 z}{9}$$

auf eine Gestalt mit lauter reellen Coefficienten bringen. Wir ersetzen zunächst z' durch z und erhalten hiernach *die folgende Normalgleichung der* C_6 *mit* 360 *Collineationen in sich*

$$(8)\qquad 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45z^2x^2y^2 - 135z^4xy + 27z^6 = 0.$$

Betrachten wir nun die Gleichung (8), so ist es zunächst unbestimmt, durch welche der Substitutionen (7) man dieselbe erhalten habe. Gehen wir zu den inversen Substitutionen zurück, so erhält man 2 Fundamentalkegelschnitte (1)

$$100\lambda^2xy + 81z^2 = 0 \qquad (\lambda = \lambda_1, \lambda_2)$$

oder nach Einführung der durch (6) gegebenen λ-Werthe

$$(9)\qquad 6z^2 - (1 \pm i\sqrt{15})\,xy = 0.$$

Hier haben wir 2 Ikosaederkegelschnitte, welche innerhalb der G_{360} nicht gleichberechtigt sind. Die zugehörigen Ikosaedergruppen können wir (nach den zu Anfang dieses Paragraphen citirten Abhandlungen) direct aufschreiben, und sodann durch Combination derselben die ganze G_{360}.

Wir wünschen nun die obige Gleichung (8) auf die Form (8) des 2. Paragraphen zu reduciren. Zu dem Ende bemerken wir, dass die Gerade $x-y=0$ eine Symmetrieaxe und der Punkt $x+y=z=0$ das zugehörige Centrum für die Curve (8) liefern. Wir benutzen deshalb zuerst die Substitutionen:

$$2x'=x+y,\quad 2y'=x-y,\quad z'=z,$$

und erhalten darnach die Gleichung

$$\begin{aligned}(10)\quad &(2x'^2+6x'z'-3z'^2)(5x'^4-6x'^3z+3x'^2z'^2-18x'z'^3-9z'^4)\\ &+y'^2(-30x'^4+180x'^3z'+90x'^2z'^2+135z'^4)\\ &+y'^4(30x'^2+90x'z'-45z'^2)-10y'^6=0.\end{aligned}$$

Wir haben nun als neue Coordinatenecken auf $y'=0$ die Punkte $2x'^2+6x'z'-3z'^2=0$ zu wählen. Sodann bringt man die Gleichung der Curve auf die gewünschte Form (abgesehen von einem numerischen Factor) durch die Substitutionen:

$$(11)\quad \xi=\alpha[2x'+z'(3-\sqrt{15})],\quad \eta=\beta[2x'+z'(3+\sqrt{15})],\quad \zeta=y',$$

wobei die Bedingungen:

$$(12)\qquad \alpha^4=\frac{4+\sqrt{15}}{1600},\quad \beta^4=\frac{4-\sqrt{15}}{1600},\quad \alpha\beta=-\frac{1}{40},$$

gelten. Damit ist dann die Identität der auf völlig unabhängige Weisen abgeleiteten Gleichungen der C_6 mit 360 Collineationen in sich bestätigt.

§ 5.

Weitere Eigenschaften der zur G_{360} gehörigen Configuration.

Wir wollen hier die verschiedenen ausgezeichneten Punkt- oder Geraden-Systeme betrachten, welche bei der G_{360} auftreten. Im Allgemeinen permutiren sich 360 Punkte oder Gerade in der Ebene als ein geschlossenes System; solche Punkte aber, welche bei n Collineationen der G_{360} fest bleiben, geben zu einem System von $\frac{360}{n}$ n-fach gezählten Punkten Anlass, und ein Gleiches gilt natürlich für die Geraden. Um dergleichen Systeme zu ermitteln, suchen wir die Beschaffenheit der Fixpunkte bei den cyklischen Gruppen.

In der G_{360} treten 36 cyklische G_5 auf; es gehören nämlich deren 6 zu jeder Ikosaedergruppe, und zwei solche G_{60} desselben Systems haben keine G_5 gemein. Man erhält dieselben durch die cyklischen Vertauschungen von 5 unter den 6 Fundamentalkegelschnitten. Bei diesen 36 G_5 hat man insgesammt 108 Fixpunkte, welche zwei sich geschlossen permutirende Systeme von 72 bez. 36 Punkten bilden. Von den 3 Fixpunkten bei einer G_5 sind nämlich 2 gleichberechtigt und permutiren sich bei den symmetrischen Collineationen einer

diedrischen G_{10}. *Jene 72 Punkte bilden die Ikosaederecken der Fundamentalkegelschnitte. Dieselben sind auch nach Gl.* (8) *des vorigen Paragraphen Wendepunkte der Fundamentalen C_6, wobei stets je eine Tangente in 2 Wendepunkten berührt. Die C_6 besitzt folglich* 36 *doppelte stationäre Tangenten.* Man beweist auch leicht nach den Plücker'schen Formeln, dass eine C_6 ohne Punktsingularitäten genau 72 Wendepunkte besitzt.

Im geschlossenen System von 36 Punkten bleibt jeder bei einer diedrischen G_{10} fest. Jeder Ikosaedergruppe sind 6 von diesen Punkten zugeordnet, welche ein zehnfach Brianchon'sches Sechseck bilden. *Den beiden Systemen von je* 6 *Ikosaedergruppen entspricht die merkwürdige Eigenschaft, dass jene* 36 *Punkte auf zwei Weisen in sechs zehnfach Brianchon'sche Sechsecke zerlegt werden können. Dabei ist ein Punkt für je zwei zu verschiedenen Systemen gehörende Sechsecke gemein.* In ähnlicher Weise bilden die bei den G_5 festen Geraden 2 Systeme von 72 bez. 36 Geraden, welche sich gegenüber den 360 Collineationen geschlossen permutiren. Das System von 36 Linien besteht aus den oben erwähnten doppelten stationären Tangenten der C_6; dasselbe kann auf 2 Weisen in 6 zehnfach Pascal'sche Sechsseite zerlegt werden.

Die G_{360} enthält ferner 2 Systeme von je 20 cyklischen G_3. Jede G_3 ist innerhalb der G_{360} mit einer G_{18} vertauschbar, welche die Collineationsgruppe einer allgemeinen ebenen C_3 liefert. Man folgert leicht, dass die 60 festen Punkte oder Geraden, welche bei den einzelnen G_3 jedes Systems auftreten, alle mit einander gleichberechtigt sind. Wir haben hier sonach 2 *Systeme von je* 60 *bei der G_{360} sich geschlossen permutirenden Punkten oder Geraden.* Jeder von diesen Punkten (bez. Geraden) bleibt bei einer diedrischen G_6 fest. Man beweist leicht, dass die fraglichen Fixpunkte nicht auf der fundamentalen C_6 liegen. Von denselben befinden sich nämlich 20 (die Dodekaederecken) auf jedem Ikosaederkegelschnitte, und die C_6 kann aus diesem Kegelschnitte nur 12 Punkte (die Ikosaederecken) ausschneiden.

Endlich haben wir 45 Collineationen von der Periode 2. Die zugehörigen Perspectivitätscentren und Axen sind im 2. Paragraphen gegeben. Jede G_2 ist Untergruppe einer cyklischen G_4, bei welcher ausser dem Perspectivitätscentrum noch 2 Punkte auf der Perspectivitätsaxe fest bleiben. Wir haben ebenfalls im § 2 gefunden, dass letztere Punkte auf der fundamentalen C_6 liegen. Die 270 Punkte der C_6, welche auf den 45 Perspectivitätsaxen liegen, zerlegen sich also in zwei bei der G_{360} sich geschlossen permutirende Systeme. Das eine System besteht aus 180 *Punkten*, das andere aus 90 *Punkten*, welche letztere die Fixpunkte bei den cyklischen G_4 darstellen.

Nach Cayley liegen auf einer allgemeinen ebenen Curve n^{ter} Ord-

nung $n(12n-27)$ Punkte, in denen ein Kegelschnitt mit der C_n 6 consecutive Schnittpunkte haben kann*). Solcher Punkte, welche man auch *sextactische Punkte* nennt, giebt es also auf der C_6 270. Da die C_6 sich zu jeder Perspectivitätsaxe symmetrisch verhält, ist es leicht zu zeigen, dass die 270 auf diesen Axen liegenden Punkte sextactisch sind.

Durch die Operationen der nun aufgezählten cyklischen Gruppen zusammen mit der Identität ergiebt sich die Gesammtzahl der 360 Collineationen. Wir haben in der That für die Perioden 2, 3, 4, 5 die bezügliche Zahl der Collineationen: 45, 80, 90, 144.

Wir haben auch das Resultat gewonnen, dass *es auf der fundamentalen C_6 3 besonders ausgezeichnete Systeme von Punkten giebt, welche sich bei der G_{360} geschlossen permutiren. Dieselben bestehen aus den 72 Wendepunkten und aus 2 Systemen sextactischer Punkte, für deren Zahl wir soeben* 90 *und* 180 *gefunden haben.* Alle anderen der G_{360} gegenüber geschlossenen Punktsysteme der C_6 bestehen aus 360 getrennten Punkten.

An *Diedergruppen* giebt es innerhalb der G_{360} 36 G_{10}, zwei Systeme von je 60 G_6 und 45 G_8. Dazu kommen noch als Untergruppen dieser G_8 zwei Systeme von je 15 Vierergruppen. Um diese Zahlen aufzufinden, brauchen wir nur die cyklischen ausgezeichneten Untergruppen der fraglichen Diedergruppen zu betrachten. Von den 3 festen Punkten (oder Geraden) bei jenen cyklischen Gruppen müssen 2 bei der Diedergruppe vertauscht werden, der dritte aber muss fest bleiben. Wir haben die diedrischen G_{10} auf die 36 doppelten Wendetangenten der fundamentalen C_6 bezogen, und gleicherweise die diedrischen G_6 auf die 120 festen Geraden bei den G_3 und die diedrischen G_8 auf die 45 Perspectivitätsaxen. Die Collineationen innerhalb der fraglichen Diedergruppen, welche nicht jenen cyklischen Untergruppen angehören, sind von der Periode 2, und es ist sofort geometrisch einleuchtend, dass ihre Perspectivitätscentren auf der bei der bezüglichen Diedergruppe festen Geraden liegen müssen.

Man erhält nun den Satz, dass *die* 45 *Perspectivitätscentren so geordnet sind, dass jede Gerade, welche zwei Centren zusammenbindet, wenigstens ein drittes enthält.* Den Diedergruppen entsprechend haben wir ja 36 Gerade durch 5 Centren, 120 durch 3 und 45 durch 4 Centren. Diese müssen

$$10 \cdot 36 + 3 \cdot 120 + 6 \cdot 45 = \frac{44 \cdot 45}{2}$$

Verbindungsgerade je zweier Centren liefern. Das ist aber auch die Gesammtzahl solcher Geraden. Der dualistisch entsprechende Satz gilt natürlich für die Perspectivitätsaxen. Man erweist auch, dass durch jedes Perspectivitätscentrum 4 Gerade gehen, welche 4 andere

*) Philosophical Transactions 155 (1854), S. 545.

Centra enthalten, und gleicherweise 8 bez. 4 Gerade, welche durch 2 bez. 3 andere Centra gehen, oder dass jede G_2 als Untergruppe in 4 diedrischen G_{10} und 8 diedrischen G_6 und (nicht ausgezeichnet) in 4 Diedergruppen G_8 enthalten ist.

§ 6.

Die fundamentale C_6. Das System der Covarianten. Schlussbemerkungen.

Wir haben bereits verschiedentlich eine Curve der 6. Ordnung gefunden, welche bei der Gesammtheit der 360 Collineationen in sich übergeht. Da diese C_6 keine Doppelpunkte besitzt, ist ihr Geschlecht $p = 10$. Damit ist freilich noch nicht bewiesen, dass bei der G_{360} keine Curve von niedrigerem Geschlechte in sich übergeführt wird. Indessen lässt sich das fragliche Resultat vermittelst von Hrn. Hurwitz gegebener Beweismethoden leicht herleiten*). Wir können also den Satz aussprechen, dass *die Gruppe der* 360 *geraden Vertauschungen von* 6 *Dingen zum Geschlechte* $p = 10$ *gehört.*

Die Gleichung unserer C_6 haben wir im 4. Paragraphen durch

$$(1)\quad F_6 = 10x^3y^3 + 9z(x^5+y^5) - 45z^2x^2y^2 - 135z^4xy + 27z^6 = 0$$

gegeben. Wollen wir diese Curve mit Rücksicht auf die Realitätsverhältnisse untersuchen, so substituiren wir zunächst für x und y die Ausdrücke $x + iy$ bez. $x - iy$ und erhalten die Gleichung

$$(2)\quad \begin{aligned} 10(x^2+y^2)^3 + 18zx(x^4-10x^2y^2+5y^4) - 45z^2(x^2+y^2)^2 \\ - 135z^4(x^2+y^2) + 27z^6 = 0. \end{aligned}$$

Diese Curve besitzt zwei reelle Züge. Betrachten wir $z = 0$ als die unendlich ferne Gerade, so erhalten wir ein inneres fast kreisförmiges Oval und einen äusseren dasselbe umschliessenden Zug, zu welchem 5 gewöhnliche Doppeltangenten und 5 in je 2 Punkten stationär berührende Tangenten mit reellen Berührungspunkten gehören. Man erschliesst hieraus, dass die Gleichung (2) auf 5 Weisen durch *reelle* projectivische Transformation in die Form (1) übergeführt werden kann.

Die Form F_6 bleibt bei der ganzen Gruppe der 1080 homogenen Substitutionen von der Determinante 1 *schlechthin invariant*, d. h. erhält auch keinen hinzutretenden numerischen Factor. Wir wissen ja von vornherein, dass dieser Satz bei jeder in der Gesammtgruppe enthaltenen Oktaedergruppe oder Ikosaedergruppe gilt. Weil aber die G_{1080} durch Combination zweier solcher Gruppen erzeugt werden kann, muss der Satz allgemein wahr sein.

Natürlich muss nun auch jede Covariante der C_6 bei der Collineationsgruppe G_{360} unverändert erhalten bleiben. Eine solche Covariante

*) Man sehe Hurwitz, *Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich.* Math. Ann. Bd. 41.

ist erstlich die Hesse'sche Determinante der Form F_6, für welche wir die Bezeichnung einführen wollen:

$$(3)\qquad 20250\,H = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Lassen wir F_6 durch (1) gegeben sein, so erhalten wir in ausgerechneter Form:

$$\begin{aligned} (4)\quad H = {} & 38x^6y^6 + 468z^2x^5y^5 - 3375z^4x^4y^4 + 1080z^6x^3y^3 \\ & - 1215z^8x^2y^2 - 4374z^{10}xy - 729z^{12} \\ & + z(x^5+y^5)[-90x^3y^3 - 1080z^2x^2y^2 + 324z^4xy - 2916z^6] \\ & + (x^{10}+y^{10})[-6xy + 9z^2]. \end{aligned}$$

Die Hesse'sche Curve $H=0$ schneidet bekanntlich auf der C_6 die 72 Wendepunkte aus. Wir haben auch im vorigen Paragraphen gefunden, dass diese Punkte das einzige gegenüber der G_{360} invariante System von 72 Punkten auf der C_6 bilden. Man hat folglich keine andere unabhängige Covariante 12. Ordnung. Nun kennen wir ja schon in den beiden Systemen von je 6 Ikosaederkegelschnitten 2 derartige covariante Gebilde. Diese müssen wir also durch 2 Gleichungen von der Form

$$(5)\qquad H + \mu F_6^2 = 0$$

definiren können. Um die fraglichen μ Werthe zu bestimmen, bemerken wir, dass durch die Gleichung (9) des 4. Paragraphen

$$6z^2 - (1 \pm i\sqrt{15})\,xy = 0$$

ein Kegelschnitt jedes Systems gegeben ist. Damit einer von diesen Kegelschnitten in (5) enthalten sei, muss

$$(6)\qquad \mu = \frac{-3 \mp i\sqrt{15}}{36}$$

sein. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Für diese μ-Werthe enthält natürlich (5) auch die 5 anderen Kegelschnitte des bezüglichen Systems.

Wir bilden uns ferner die Covariante:

$$(7)\qquad \Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial H}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}, & \frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, & \frac{\partial H}{\partial z} \\ \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{\partial H}{\partial z}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Der Complicirtheit halber geben wir diese Covariante nicht in ausgerechneter Form. Jedenfalls überzeugt man sich leicht, dass $\Phi = 0$ nicht durch den Punkt $x = z = 0$ geht, und dass also Φ nicht als eine Function von F und H ausgedrückt werden kann. Die Curve $\Phi = 0$ ist von der 30. Ordnung und muss demnach die fundamentale C_6 in einem gegenüber der G_{360} invarianten System von 180 Punkten schneiden. Von derartigen Punktsystemen kennen wir aber zwei, nämlich das System von 180 sextactischen Punkten und das doppelt gezählte System von 90 sextactischen Punkten. Weil die sextactischen Punkte auf den Perspectivitätsaxen belegen sind, muss ersichtlich jede bei der G_{360} invariante Curve, welche auf der C_6 ein System von sextactischen Punkten ausschneidet, in diesen Punkten entweder Doppelpunkte besitzen oder auch die Tangente durch das bezügliche Perspectivitätscentrum schicken, es sei denn, dass die fragliche Curve alle 45 Perspectivitätsaxen enthält. Da Letzteres offenbar hier nicht der Fall sein kann, so ersehen wir, dass *die Curve* $\Phi = 0$ *die* C_6 *im System von* 90 *sextactischen Punkten berühren* (oder auch dortselbst Doppelpunkte besitzen) muss.

Eine neue Covariante finden wir in der Functionaldeterminante von F, H und Φ:

$$(8) \qquad \Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial H}{\partial x}, & \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial H}{\partial y}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z}, & \frac{\partial H}{\partial z}, & \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{vmatrix}.$$

Die Curve $\Psi = 0$ *stellt die* 45 *Perspectivitätsaxen dar.* Dies folgt einfach daraus, dass die zu den Curven des Netzes

$$\alpha F^{10} + \beta H^5 + \gamma \Phi^2 = 0$$

gehörigen Tangenten, deren Berührungspunkte auf jenen Axen liegen, stets durch die zugehörigen Perspectivitätscentren gehen.

Wir behaupten nun, *dass durch* F, H, Φ *und* Ψ *das vollständige System der Covarianten gegeben sei.* Man kann ersichtlich die Constante λ so bestimmen, dass die Curve

$$(9) \qquad H^5 + \lambda \Phi^2 = 0$$

ein beliebiges gegenüber der G_{360} sich geschlossen permutirendes System von 360 Punkten auf der C_6 ausschneidet. Wir können nun einer beliebigen covarianten Curve $\Omega = 0$ ein Aggregat von der Form

$$(10) \qquad \sum = H^{\alpha} \Phi^{\beta} \Psi^{\gamma} \prod_{i=1}^{i=r} (H_i^5 + \lambda_i \Phi^2)^{k_i} = 0$$

zuordnen, welches dieselben Schnittpunkte mit der C_6 besitzt. Darauf bestimmen wir die Constante μ in der Weise, dass die Curve

$$(11) \qquad \Omega - \mu \Sigma = 0$$

noch einen weiteren Schnittpunkt mit der C_6 erhält. Weil aber das System der Schnittpunkte schon vorher vollständig gegeben war, muss die C_6 in irgend welcher Multiplicität einen Bestandtheil der Curve (11) bilden. Wir erhalten demnach

$$(12) \qquad \Omega = \mu \Sigma + F_6^{\delta} \Omega_1 .$$

In ähnlicher Weise können wir jetzt die Form Ω_1 zerlegen. Fahren wir fort, so müssen wir schliesslich die Form Ω durch F, H, Φ und Ψ ausgedrückt erhalten. Hiermit ist aber auch die behauptete Vollständigkeit des Formensystems erwiesen.

Für einen gewissen Werth von λ, sagen wir $\lambda = \lambda_1$, berührt die Curve (9) die C_6 im System der 180 sextactischen Punkte. Unter Beibehaltung der obigen Beweismethode können wir nun Ψ^2 durch F, H und Φ ausdrücken. Dabei ist das von F unabhängige Glied von der Form;

$$\mu_1 \Phi (H^5 + \lambda_1 \Phi^2).$$

Zwischen den vier Formen des vollständigen Systems besteht also eine identische Relation, welche Ψ^2 *durch die* 3 *anderen ausdrückt.*

Durch die innerhalb der G_{360} auftretenden gleichberechtigten Untergruppen von je 6 Ikosaedergruppen, 10 G_{36} und je 15 Oktaedergruppen wird die Aufmerksamkeit auf gewisse Normalgleichungen von der 6., 10. und 15. Ordnung hingelenkt. Weil aber die Aufstellung der betreffenden Gleichungen nicht ohne Schwierigkeit zu sein scheint, und überdies verschiedene interessante Fragestellungen hinzukommen, wollen wir dieselben erst in späteren Untersuchungen behandeln.

Lund, November 1895.

Notiz über die Discontinuität gewisser Collineationsgruppen.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

Es giebt bekanntlich ∞^3 reelle Collineationen einer eintheiligen nicht-zerfallenden Curve zweiten Grades C_2 in sich. Diese Collineationen bilden eine Gruppe, und die in letzterer enthaltenen discontinuirlichen Untergruppen ohne infinitesimale Substitutionen liefern, in andere Gestalt umgesetzt, die in der Theorie der eindeutigen automorphen Functionen auftretenden Hauptkreisgruppen. Diese Gestaltsänderung der Gruppen kommt darauf hinaus, dass die Collineationen der Curve C_2 in sich in linear-gebrochene Substitutionen einer complexen Variabelen ζ umgesetzt werden.

Für gewöhnlich stellt man nun die nähere Untersuchung der Gruppe in der ζ-Ebene an. Es ist aber für die Discussion gruppentheoretisch-geometrischer Fragen fast überall zweckmässiger, die Ebene der C_2 beizubehalten. Diese Ebene wird durch die C_2 in zwei Theile zerlegt, das Innere der C_2 (von wo aus keine reellen Tangenten an die C_2 gezogen werden können) und den ausserhalb der C_2 gelegenen Theil. Es ist zweckmässig, hierbei der Curve C_2 die Gestalt einer Ellipse zu geben. Ist nun eine Gruppe Γ unserer Art ohne infinitesimale Substitutionen vorgelegt, so ist dieselbe bekanntlich im Innern der C_2 eigentlich discontinuirlich, d. h. sie besitzt dort einen endlichen Discontinuitätsbereich. Es war aber bislang eine offene Frage, in wie weit der gleiche Charakter der Gruppe ausserhalb der C_2 gewahrt bleibt. Die hier eintretenden Verhältnisse sollen in den folgenden Zeilen entwickelt werden. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Gruppe sogenannte Collineationen zweiter Art (d. i. solche, bei denen eine Umlegung der Winkel in der Ebene der C_2 stattfindet) nicht enthält.

Man hat nun zu unterscheiden, ob die Gruppe Γ auf der Curve C_2 selber eigentlich oder uneigentlich discontinuirlich ist. In letzterem

Falle ist die C_2 allenthalben dicht von Fixpunkten hyperbolischer Substitutionen von Γ bedeckt, und man kann leicht zeigen, dass dasselbe von dem gesammten ausserhalb der C_2 verlaufenden Theile der Ebene gilt. *Die Gruppe ist demnach ausserhalb der C_2 nirgends eigentlich continuirlich.*

Ist die Gruppe auf der C_2 selber eigentlich discontinuirlich, so sind die hier eintretenden Verhältnisse die folgenden. Der Discontinuitätsbereich von Γ auf der C_2 besteht aus n Segmenten $s_1, s_2, \ldots, s_n$, wo n jede beliebige positive ganze Zahl > 0 sein kann. Das einzelne dieser Segmente s_k besitzt endliche Bogenlänge und seine beiden Endpunkte sind durch eine hyperbolische Substitution V_k der Gruppe auf einander bezogen. Indem wir auf s_k sowohl V_k wie V_k^{-1} unbegrenzt oft ausüben, entspringt eine zusammenhängende Kette von beiderseits unendlich vielen mit s_k äquivalenten Segmenten, welche ein grösseres Segment S_k auf C_2 bilden; die Endpunkte von S_k sind hyperbolische Fixpunkte, nämlich die zu V_k gehörenden. Wir denken uns in entsprechender Weise von $s_1, s_2, \ldots, s_n$ aus die n Segmente $S_1, S_2, \ldots, S_n$ gebildet.

Denken wir nun auf $s_1, \ldots, s_n$ oder sogleich auf $S_1, \ldots, S_n$ die gesammten Substitutionen der Gruppe angewandt, so erscheint die Ellipse C_2 allenthalben von Segmenten S bedeckt, von denen zugleich keine zwei über einander greifen. Haben wir die Gruppenerzeugenden nur erst eine endliche Anzahl von Malen ausgeübt, so liegen die bis dahin erreichten Segmente $S_1, \ldots, S_n, S_{n+1}, \ldots, S_m$ durchgängig isolirt, so dass zwischen ihnen noch m Intervalle frei bleiben, in welchen die weiter folgenden Segmente Platz finden. Wie man sieht, wächst bei Fortführung des Processes die Anzahl der noch frei bleibenden Lücken ins Unendliche, wobei die einzelne Lücke unbegrenzt kleine Bogenlänge bekommt. Die Grenze, dem das System der Lücken schliesslich zustrebt, bildet solcherweise ein eigenartiges Punktsystem auf der C_2, welches wir als das *System der Grenzpunkte* der Gruppe Γ bezeichnen. Man kann sagen, dass dieses System aus *allen hyperbolischen Fixpunkten auf C_2 und deren Häufungsstellen* besteht. Nirgends kommt es vor, dass Grenzpunkte von Γ auf C_2 ein endlich ausgedehntes, wenn auch noch so kleines Bogenstück überall dicht bedecken.

Ist S_i irgend eines der unendlich vielen Segmente S und gehört zu diesem Segment die hyperbolische Substitution V_i, so werden die beiden Endpunkte P und Q von S_i als Fixpunkte von V_i zum System der Grenzpunkte gehören. Ausserhalb S_i finden sich hart an P (bez. Q) in jedem noch so kleinen Bogenstücke von C_2 unbegrenzt viele weitere Segmente S, welche daher gegen P (bez. Q) hin unendlich klein werden. Man bemerkt dies leicht, indem man auf endlich entfernte Segmente S die Substitution V_i (bez. V_i^{-1}) immer wieder ausübt.

Auf das Verhalten der Gruppe ausserhalb des Kegelschnitts C_2 schliessen wir nun vermöge der Polarreciprocität. Einem Punktepaar auf C_2 oder auch der beide Punkte verbindenden Sehne lassen wir den ausserhalb C_2 gelegenen Pol entsprechen. Doch müssen wir diese Vorstellung noch ein wenig ausgestalten. Wir versehen vor allem die Sehne mit einem gewissen Richtungssinn, den wir etwa durch einen Pfeil andeuten; die Sehne bekommt solcherart einen Anfangspunkt A und einen Endpunkt B (cf. Fig. 1). Wir bezeichnen den Richtungssinn als positiv, wenn (wie in Fig. 1) sich ein Strahl, der vom Mittelpunkt O der Ellipse nach einem die Sehne in der Pfeilrichtung durchlaufenden Punkt hinzieht, um O entgegengesetzt dem Sinne des Uhrzeigers dreht. Im andern Falle heisst der Richtungssinn der Sehne negativ. Für die durch den Mittelpunkt O selbst hindurchziehenden Sehnen wird diese Festsetzung unbestimmt. Wir können auch sagen, dass die Sehnen durch den Mittelpunkt den continuirlichen Grenzübergang darstellen zwischen den Sehnen von positivem Richtungssinn und denjenigen von negativem. Um nun beim Uebergang zum Ellipsenäusseren dieser Maassnahme gerecht zu werden, fassen wir die Ebene als eine *doppelseitige* Fläche auf. Indem wir die Ebene etwa horizontal gelegen denken, mögen den Sehnen mit positiver Pfeilrichtung die Punkte der oberen Seite entsprechen, während die Punkte der unteren Seite von den Sehnen mit negativem Richtungssinn geliefert werden. Beide Belegungen der Ebene hängen dabei längs der unendlich fernen Geraden der Ebene mit einander zusammen und bilden solchergestalt ein Continuum*). Indem wir also z. B. längs einer geraden Linie die unendlich ferne Gerade überschreiten, gelangen wir von der einen Seite der Ebene zur andern; erst nach zweimaligem Ueberschreiten der unendlich fernen Geraden können wir die fragliche Linie zu einer geschlossenen ausgestalten.

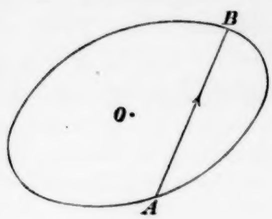


Fig. 1.

Es sind nun erstlich einige Entwicklungen zu geben, welche für beide Belegungen der Ebene gleichmässig gelten, und bei denen wir demnach nicht zwischen den beiden Seiten der Ebene zu unterscheiden brauchen. Wir markiren auf der Ellipse C_2 m Segmente $S_1, S_2, \ldots, S_m$ von Γ und können dabei (wie eine eingehende Betrachtung zeigt) m

*) Die hiermit beschriebene Auffassung der Ebene der projectiven Geometrie als einer Doppelfläche ist auch für viele andere Untersuchungen von principieller Bedeutung. Der Verf. verdankt diese Auffassung einer brieflichen Mittheilung von Hrn. Klein; siehe auch dessen Darlegungen in Bd. 7 der Mathem. Annalen pag. 550 (1874).

so gross annehmen, dass die zwischen den Segmenten noch frei bleibenden Lücken in Summa eine beliebig kleine Bogenlänge besitzen. Aus jenen m Segmenten greifen wir nun zwei, S_i und S_k, auf und bilden alle ∞^2 Sehnen, welche Punkte von S_i mit solchen von S_k verbinden. Die zugehörigen ∞^2 Pole erfüllen ausserhalb C_2 einen leicht anzugebenden Bereich. Ist nämlich erstens $k = i$, d. h. sind beide Segmente S_i und S_k identisch, so erfüllen die Pole eine etwa durch E_i zu bezeichnende *Ecke*, welche durch S_i und die beiden Tangenten in den Endpunkten von S_i eingegrenzt ist. Ist hingegen $i \gtrless k$, so stellen jene ∞^2 Pole die sämmtlichen Punkte eines Vierecks T_{ik} dar, welches in

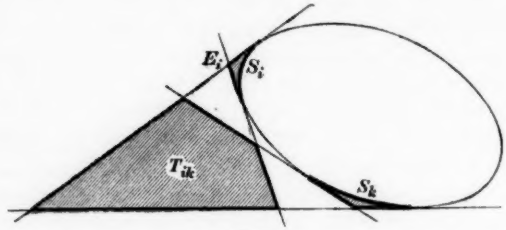


Fig. 2.

der durch Figur 2 angezeigten Weise aus den Tangenten in den Endpunkten von S_i und S_k eingegrenzt ist.

Den m Segmenten $S_1, \ldots, S_m$ entsprechen nun m Ecken E_i und $\frac{m(m-1)}{2}$ Vierecke T_{ik}. *Diese* $\frac{m(m+1)}{2}$ *Bereiche verlaufen durchaus isolirt, indem rings um den einzelnen herum ein Intervall frei bleibt;* dies folgt ohne weiteres aus den früheren Angaben über die Abfolge der Segmente S auf der C_2. *Aber wir können m so gross annehmen, dass der ausserhalb der C_2, jedoch im Endlichen verlaufende Theil der Ebene, welcher noch frei von den* $\frac{m(m+1)}{2}$ *Bereichen E_i, T_{ik} bleibt, beliebig kleinen Gesammtinhalt bekommt.*

Die merkwürdige hiermit gewonnene Viereckstheilung wolle man nun noch etwas mehr ins einzelne verfolgen. Wir denken dabei m über alle Grenzen wachsend, so dass der ausserhalb C_2 verlaufende Theil der Ebene von unendlich vielen Bereichen E_i, T_{ik} bedeckt ist, die nicht mit einander collidiren, aber auch kein endliches Intervall zwischen sich frei lassen. Geht man über irgend eine Seite eines Vierecks T_{ik} hinaus, so kommt dies darauf hinaus, dass wir bei festgehaltenen S_i an Stelle von S_k benachbarte Segmente treten lassen. Die obigen Angaben über das Aussehen der Segmenttheilung von C_2 hart an der Grenze eines einzelnen Segmentes S liefern hierbei die

folgenden Sätze: *Bei Ueberschreiten einer Seite von* T_{ik} *treffen wir in jeder Nähe auf weitere Vierecke, welche die Verlängerungen der beiden anliegenden Seiten von* T_{ik} *wieder zu Gegenseiten haben; in unmittelbarer Nachbarschaft von* T_{ik} *werden diese sich anschliessenden Vierecke sämmtlich unendlich schmal, und es liegen ihrer immer unendlich viele in einem endlichen am Rande von* T_{ik} *eingegrenzten Streifen.* Diese Verhältnisse kehren für jedes in endlichem Processe erreichbare Viereck unserer Eintheilung und für jede seiner Seiten wieder. Noch unmittelbarer ergiebt sich übrigens die Lage der Ecken $E_1, E_2, \ldots$ aus der Lage der Segmente $S_1, S_2, \ldots$ auf C_2.

Mit Hülfe der vorstehenden Entwicklungen ist es leicht, endgültige Angaben über die Lage der hyperbolischen Fixpunkte der Gruppe zu machen. *Zuvörderst stellen die ausserhalb* C_2 *gelegenen Eckpunkte der Ecken* $E_1, E_2, \ldots$ *unendlich viele hyperbolische Fixpunkte dar, welche sich, den* n *Segmenten* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *entsprechend, in* n *Classen anordnen.* Aber hiermit sind in keiner Weise die gesammten hyperbolischen Fixpunkte der Gruppe erschöpft; betreffs der noch fehlenden Punkte dieser Art ergiebt sich aus der Eigenart der Segmenttheilung von C_2 folgendes:

Das Innere jedes Vierecks E_{ik} *sowie auch jeder von dessen Eckpunkten endlich entfernte Randpunkt ist frei von hyperbolischen Fixpunkten und von solchen endlich entfernt; in jeder noch so kleinen Umgebung jedes Eckpunktes eines Vierecks finden sich unbegrenzt viele hyperbolische Fixpunkte.*

Es fragt sich nun, was wir als System der Grenzpunkte oder kurz als Grenzmannigfaltigkeit unserer Gruppe ausserhalb der Curve C_2 anzusehen haben. Indem wir auf die Segmente $S_1, \ldots, S_n$ die Gruppenerzeugenden immer wieder erneut anwenden und für die so entspringenden Segmente S die Ecken E sowie auf alle Weisen die Vierecke T bilden, wird der ausserhalb der C_2 verlaufende Theil der Ebene immer mehr mit Bereichen bedeckt. Jeder Punkt des Ellipsenäusseren, der hierbei durch „keine endliche" Fortsetzung des Processes erreicht werden kann, ist als zur Grenzmannigfaltigkeit gehörig anzusehen. Doch werden wir dieser Mannigfaltigkeit auch die gesammten Randpunkte der Vierecke T und der geradlinigen Grenzen der Ecken E zurechnen. *Die Grenzmannigfaltigkeit wird somit von den Tangenten in den Endpunkten der gesammten Segmente* $S_1, S_2, \ldots$, *sowie von den Häufungsstellen dieser Tangenten gebildet.*

Diese Auffassung erscheint um so mehr geboten, wenn wir auf die ursprünglichen Segmente $s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}, \ldots$ selbst wieder zurückgehen und für sie genau nach der früheren Vorschrift sowohl Ecken e_i als auch Vierecke t_{ik} construiren. Wie man leicht überblicken wird, *erscheint nun der einzelne Bereich* E *von unendlich vielen Ecken* e *erfüllt, welche gegen die beiden geradlinigen Grenzen von* E *unendlich*

schmal werden; andrerseits ist das einzelne Viereck T in ∞^2 kleinere Vierecke t getheilt, welche gegen den Rand von T hin unendlich schmal werden. Uebrigens ist es bei den discontinuirlichen Gruppen linearer Substitutionen einer Variabelen ζ eine sehr gewöhnliche Erscheinung, dass die Grenzmannigfaltigkeit die ζ-Ebene (analog unseren Bereichen E und T) in unendlich viele Bereiche zerlegt.

Es ist nun ein Leichtes die Frage nach dem *Discontinuitätsbereich* unserer Gruppe ausserhalb C_2 zu beantworten. Wir gehen zu diesem Ende auf die beiden Belegungen der Ebene zurück und denken insbesondere die Grenzmannigfaltigkeit beiderseits markirt. In üblicher Weise werden wir nur für den von dieser Mannigfaltigkeit freien Theil des Ellipsenäusseren den Discontinuitätsbereich construiren. Sei demnach P ein beliebiger nicht zur Grenzmannigfaltigkeit gehörender Punkt ausserhalb C_2, so werden wir natürlich ausdrücklich festsetzen, ob er der oberen oder unteren Belegung angehört. Hiernach regelt sich die Pfeilrichtung der zu P als Polare gehörenden Ellipsensehne $\overline{AB}$ (cf. Fig. 1). Sowohl der Anfangspunkt A, wie der Endpunkt B der Sehne liegt in je einem Segment aus der unendlichen Reihe der Segmente s. Es giebt eine und nur eine Substitution der Gruppe, welche das Segment des Anfangspunktes A in eines der n ersten Segmente $s_1, s_2, \ldots, s_n$ transformirt.

Auf Grund dieser Ueberlegung construiren wir die Pole aller Sehnen, welche auf einem einzelnen der n Segmente $s_1, \ldots, s_n$, etwa auf s_i, ihren Anfangspunkt haben. Diese Pole erfüllen vollständig den in Fig. 3 angedeuteten Bereich, der die Gestalt eines Zweiecks Z_i mit den Ecken p und q darbietet. Z_i ist sowohl in der oberen wie unteren Belegung durch s_i, ausserdem aber durch die Tangenten in den Endpunkten p und q von s_i begrenzt. Man muss sich vorstellen, dass Z_i durch das Unendliche hindurch zur anderen Belegung hinüberzieht; dabei greift der Bereich Z_i mit zwei Spitzen bei p und q über sich selbst hinüber, natürlich ohne daselbst zusammenzuhängen.

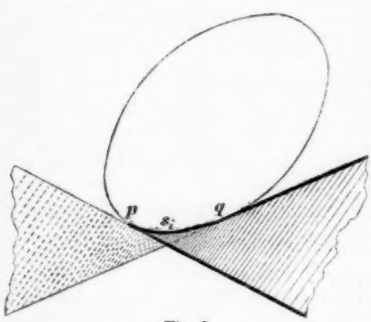


Fig. 3.

Indem wir für alle n Segmente $s_1, \ldots, s_n$ gerade so verfahren, entspringen n Zweiecke $Z_1, \ldots, Z_n$, die übrigens durchaus von einander getrennt verlaufen. *Nehmen wir aus den Zweiecken $Z_1, \ldots, Z_n$ die in ihnen enthaltenen Punkte der Grenzmannigfaltigkeit heraus, so*

bildet das Uebrigbleibende einen Discontinuitätsbereich der Gruppe ausserhalb C_2. Da hierbei aus dem einzelnen Zweieck nur isolirt liegende Gerade (die sich freilich in mannigfacher Weise häufen) herausgenommen sind, so können wir folgenden Satz aussprechen: *Ueben wir auf die* n *Zweiecke* $Z_1, \ldots, Z_n$ *die gesammten Substitutionen der Gruppe aus, so erscheinen die beiden Belegungen des Ellipsenäusseren durchweg einfach und ohne endliche Lücke von Zweiecken bedeckt.*

Braunschweig, am 6. August 1895.

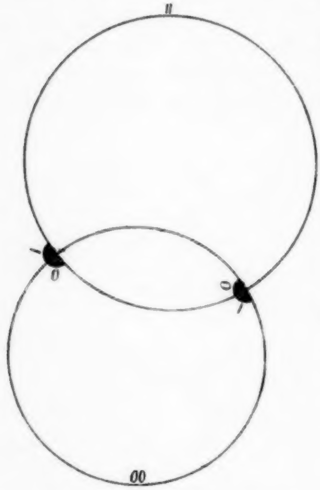
Ueber eine merkwürdige Kreisfigur.

Von

W. GODT in Lübeck.

---

1. Ein Kreis kann in zwei entgegengesetzten Richtungen durchlaufen werden. Insofern er als in einer ganz bestimmten Richtung zu durchlaufen vorgestellt wird, möge er kurz ein Kreis mit Sinn heissen. Ein Kreis theilt die Ebene in zwei Gebiete, ein Kreis mit Sinn insbesondere theilt die Ebene in ein rechtes und ein linkes Gebiet.



2. Zwei Kreise mit Sinn mögen sich in zwei Punkten schneiden. Ich benenne den einen Schnittpunkt mit 0 0, den einen Kreis mit 0 1, den andern mit 1 0, den anderen Schnittpunkt mit 1 1. Den Winkel, um den sich ein im Punkte 0 0 aufgestellter Beobachter in einem beliebig aber fest gewählten Sinne, etwa linksum, drehen muss um aus der Richtung von 0 1 daselbst in die Richtung von 1 0 zu kommen, bezeichne ich mit $\left\{\begin{matrix} 0\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{matrix}\right\}$. Dann ist der Werth eines solchen Symbols bis auf Vielfache von 2π völlig bestimmt und es ist ersichtlich

$$\left\{\begin{matrix} 0\,0 \\ 0\,1 \\ 1\,0 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0\,0 \\ 1\,0 \\ 0\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0,$$

wenn das Zeichen $\equiv$ die Congruenz mod. 2π ausdrückt. Man kann dann auch schreiben

$$\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\equiv-\begin{Bmatrix}0\,0\\1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}.$$

Vergleicht man die Winkel an den beiden Schnittpunkten mit einander, so erhellt

$$\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\equiv-\begin{Bmatrix}1\,1\\0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\quad\text{oder}\quad\begin{Bmatrix}0\,0\\0\,1\\1\,0\end{Bmatrix}\equiv\begin{Bmatrix}1\,1\\1\,0\\0\,1\end{Bmatrix}.$$

3. Es mögen 3 Kreise mit Sinn durch einen Punkt gehen. Man benenne den Punkt mit 0 0 0, die Kreise mit 1 0 0, 0 1 0 und 0 0 1, ihre drei weiteren Schnittpunkte bez. mit 1 1 0, 0 1 1, und 1 0 1. Dann ist nach Nr. 2

$$\begin{Bmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{Bmatrix}\equiv-\begin{Bmatrix}0\,0\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{Bmatrix},\quad\begin{Bmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\\0\,0\,1\end{Bmatrix}\equiv-\begin{Bmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\\0\,0\,1\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\\1\,0\,0\end{Bmatrix}\equiv-\begin{Bmatrix}0\,0\,0\\0\,0\,1\\1\,0\,0\end{Bmatrix}.$$

Da die Summe der drei rechts stehenden Winkel augenscheinlich $\equiv 0$ ist, so auch die Summe der drei links stehenden. Man lasse nun etwa den Kreis 0 0 1 sich stetig verändern, während die beiden Punkte 0 1 1 und 1 0 1 fest bleiben; dann nehmen die beiden Winkel an diesen Punkten gleichzeitig um den gleichen Betrag α zu oder ab und der Kreis geht nicht anders durch den Punkt 0 0 0, als wenn α ein Vielfaches von π wird. Also:

Drei Kreise mit Sinn 1 0 0, 0 1 0 und 0 0 1 mit den Schnittpunkten bez. 1 1 0, 0 1 1 und 1 0 1 haben ausserdem einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt oder nicht jenachdem

$$\begin{Bmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\\0\,0\,1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\\1\,0\,0\end{Bmatrix}\equiv 0$$

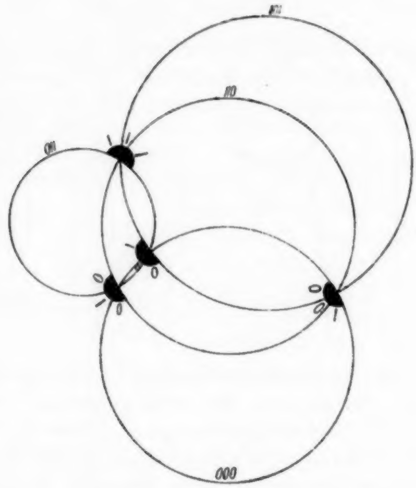
ist oder nicht.

4. Durch den Punkt 0 0 0 gehen die Kreise mit Sinn 1 0 0, 0 1 0 und 0 0 1 mit den weiteren Schnittpunkten 1 1 0, 0 1 1 und 1 0 1. Durch die letzteren geht ein Kreis und heisse in beliebigem Sinne genommen x. Dann folgt aus Nr. 3

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\x\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\,1\,0\\x\\0\,1\,0\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}0\,1\,1\\0\,1\,0\\x\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}0\,1\,1\\x\\0\,0\,1\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\,0\,1\\0\,0\,1\\x\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}1\,0\,1\\x\\1\,0\,0\end{matrix}\right\}\equiv 0.$$

Nach (2) ist aber von diesen sechs Winkeln der zweite dem dritten, der vierte dem fünften, der sechste dem ersten gleich. Ersetzt man demgemäss, so wird:

$$2\cdot\left\{\begin{matrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{matrix}\right\}+2\left\{\begin{matrix}0\,1\,1\\x\\0\,0\,1\end{matrix}\right\}\equiv 0.$$



Der Sinn von x lässt sich daher so wählen, dass auch

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{matrix}\right\}+\left\{\begin{matrix}0\,1\,1\\x\\0\,0\,1\end{matrix}\right\}\equiv 0$$

und werde bei solcher Wahl als 1 1 1 bezeichnet. Man kann dann schreiben:

$$\left\{\begin{matrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{matrix}\right\}\equiv\left\{\begin{matrix}0\,1\,1\\0\,0\,1\\1\,1\,1\end{matrix}\right\}.$$

Bei der hier benutzten, freilich etwas weitläufigen, Bezeichnungsweise geht jeder Kreis durch diejenigen Punkte, deren Benennung durch Veränderung je eines Index aus seiner Benennung entsteht und

ebenso gehen durch jeden Punkt diejenigen Kreise, deren Benennung durch Veränderung je eines Index aus seiner Benennung entsteht. Man erhält dabei den folgenden Satz:

Gehen drei Kreise durch einen Punkt, wird durch ihre weiteren Schnittpunkte ein vierter Kreis gelegt, werden die drei ersten Kreise in beliebigem, der vierte im geeigneten Sinne genommen und werden dann die Kreise mit Sinn und Punkte in der vorgeschriebenen Weise durch je drei Indices bezeichnet, *so ändert ein Winkelsymbol seinen Werth nicht, wenn die Indices zweier Columnen verändert werden*, z. B.

$$\begin{Bmatrix}1\,1\,0\\1\,0\,0\\0\,1\,0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\,0\,0\\0\,1\,0\\1\,0\,0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\,1\,1\\0\,0\,1\\1\,1\,1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1\,0\,1\\1\,1\,1\\0\,0\,1\end{Bmatrix}.$$

Kürzer und anschaulicher, aber nicht ebenso vollständig, kann man sagen: die Tangenten der Kreise in ihren Schnittpunkten bilden vier congruente Büschel. Der Satz ist, wenn man will, auch aufzufassen als Verallgemeinerung des Peripheriewinkelsatzes der Elemente nach der Methode der reciproken Radien.

5. Durch einen Punkt 0 0 0 mögen vier Kreise mit Sinn gehen. Man benenne sie mit

$$1000,\quad 0100,\quad 0010,\quad 0001.$$

Ihre sechs weiteren Schnittpunkte benenne man bezüglich mit

$$1100,\quad 1010,\quad 1001,\quad 0110,\quad 0101,\quad 0011.$$

Durch je drei von diesen, die in einem Index 0 an gleicher Stelle übereinstimmen, lege man nach Nr. 4 einen Kreis mit Sinn und erhält:

$$1110,\quad 1101,\quad 1011,\quad 0111.$$

Ob drei von diesen Kreisen, etwa die ersten drei, durch einen Punkt gehen, wird nach Nr. 3 ersehen aus der Summe:

$$S=\begin{Bmatrix}1\,1\,0\,0\\1\,1\,1\,0\\1\,1\,0\,1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,0\,1\\1\,1\,0\,1\\1\,0\,1\,1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,1\,0\\1\,0\,1\,1\\1\,1\,1\,0\end{Bmatrix}.$$

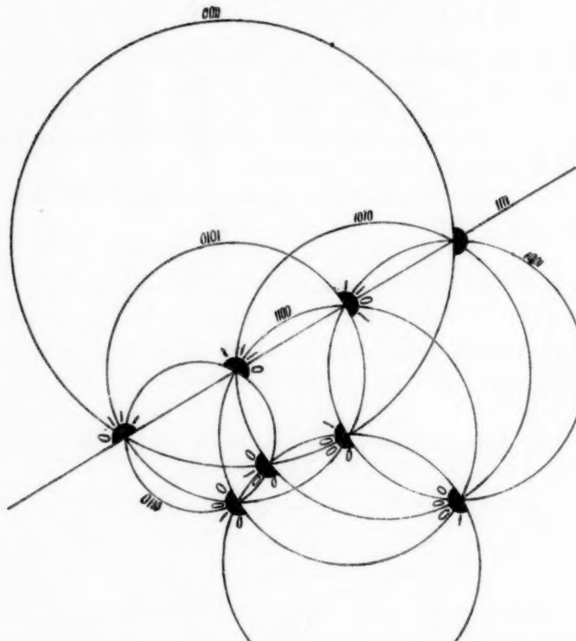
Dieselbe lässt sich aber unter Hinzuziehung des Kreises 1 0 0 0, der durch die Scheitel aller drei Winkel geht, zerlegen in:

$$S=\begin{Bmatrix}1\,1\,0\,0\\1\,1\,1\,0\\1\,0\,0\,0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,1\,0\,0\\1\,0\,0\,0\\1\,1\,0\,1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,0\,1\\1\,1\,0\,1\\1\,0\,0\,0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,0\,1\\1\,0\,0\,0\\1\,0\,1\,1\end{Bmatrix}$$

$$+\begin{Bmatrix}1\,0\,1\,0\\1\,0\,1\,1\\1\,0\,0\,0\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\,0\,1\,0\\1\,0\,0\,0\\1\,1\,1\,0\end{Bmatrix}.$$

Jetzt enthält jedes Symbol eine Columne, in der nur der Index 0 vorkommt, und es ist einleuchtend, dass für die übrigen Columnen der Satz in Nr. 4 gültig ist. Daher hat man:

$$S = \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \end{Bmatrix}$$
$$+ \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0\,0\,0\,0 \\ 0\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,1\,0 \end{Bmatrix}$$



oder $S \equiv 0$. Es gehen also die drei Kreise 1 1 1 0, 1 1 0 1 und 1 0 1 1 durch einen Punkt. Die ganze Schlussweise bleibt aber bestehen, wenn man durchweg zwei Columnen mit einander vertauscht. Daher gehen alle vier Kreise 1 1 1 0, 1 1 0 1, 1 0 1 1 und 0 1 1 1 durch einen und denselben Punkt, den man nun mit 1 1 1 1 benennen mag.

Nachdem die Existenz des Punktes 1 1 1 1 nachgewiesen, gilt der Satz vom Winkelsymbol auch für ihn mit.

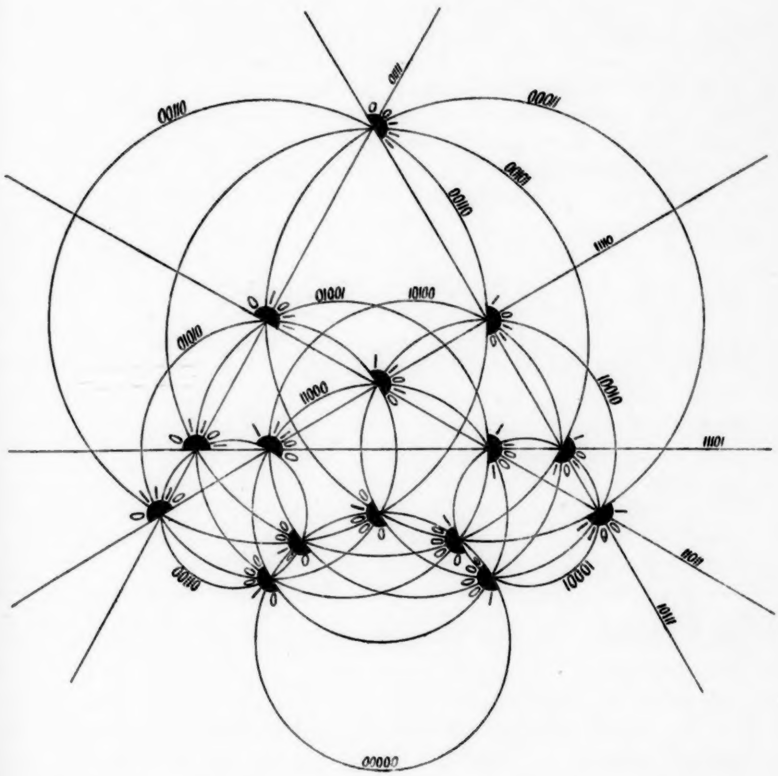
6. Es mögen nun durch einen Punkt n Kreise mit Sinn gehen. Man bezeichne den Punkt durch n Indices 0, die Kreise aber mit

1000..., 0100..., 0010... u. s. w.

Je zwei Kreise bestimmen einen weiteren Schnittpunkt, man bezeichne sie mit

1100..., 1010..., 0110... u. s. w.

Je drei von diesen Punkten bestimmen einen Kreis mit Sinn, dessen Benennung an drei Stellen den Index 1 aufweist.



Je vier von diesen Kreisen gehen durch einen Punkt, der an vier Stellen den Index 1 hat.

Alle Winkelsymbole, die mit den bisherigen Benennungen gebildet werden können, ändern ihren Werth nicht, wenn man in zwei Columnen gleichzeitig alle Indices verändert.

Nun lässt sich zeigen, dass die Punkte mit vier Indices 1 zu je fünf auf einem Kreis liegen, dem man an fünf Stellen den Index 1 beizulegen hat. Für welche fünf Stellen man den Beweis führen will, ist gleichgültig; wir wählen die fünf ersten und lassen alle andern, da sie nicht mitspielen, fort.

Durch die Punkte 0 1 1 1 1, 1 0 1 1 1, 1 1 0 1 1 geht ein Kreis, wir nennen ihn in beliebigem Sinn genommen x. Es ist

$$\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0$$

nach Nr. 3. Ziehen wir den Kreis mit Sinn x hinzu, so ergiebt sich

$$\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ x \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ x \\ 0\,1\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \\ x \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ x \\ 1\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\}$$
$$+ \left\{\begin{matrix} 1\,0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,0\,1\,1 \\ x \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,0\,1\,1\,1 \\ x \\ 0\,0\,1\,1\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0.$$

Hier sind aber die Glieder paarweise gleich nach Nr. 2. Daher haben wir:

$$2\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ x \end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ x \\ 0\,1\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ x \\ 1\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0$$

oder

$$2\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + 2\left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ x \\ 1\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0,$$

und wir können x in demjenigen Sinne genommen denken, worin auch

$$\left\{\begin{matrix} 0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 1\,1\,0\,1\,1 \\ x \\ 1\,0\,0\,1\,1 \end{matrix}\right\} \equiv 0,$$

während wir bei dem anderen Sinn erhalten würden $\equiv \pi$.

In ähnlicher Weise geht ein Kreis mit Sinn y durch die Punkte 1 0 1 1 1, 1 1 0 1 1 und 1 1 1 0 1 und liefert:

$$\begin{Bmatrix} 11101 \\ 10101 \\ 11001 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 11011 \\ y \\ 10011 \end{Bmatrix} \equiv 0$$

wo nur x mit y und Columne 1 mit Columne 4 vertauscht ist. Die in den beiden letzten Congruenzen links stehenden Symbole sind, wie vorhin unter Nr. 6 bemerkt, congruent, also ist auch

$$\begin{Bmatrix} 11011 \\ x \\ 10011 \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} 11011 \\ y \\ 10011 \end{Bmatrix}$$

oder, da eine gleiche Schlussweise für irgend drei Stellen in den Symbolen gilt, die Kreise mit Sinn x und y sind identisch, die fünf Punkte 0 1 1 1 1, 1 0 1 1 1, 1 1 0 1 1, 1 1 1 0 1 und 1 1 1 1 0 liegen in einem und demselben Kreis, der nun in bestimmtem Sinn mit 1 1 1 1 1 bezeichnet werden darf, und der Satz, dass ein Winkelsymbol seinen Werth nicht ändert, wenn man gleichzeitig in zwei Columnen die Indices verändert, erstreckt sich auch über diesen Punkt mit.

Die bisher angewandte Schlussweise lässt sich weiter fortsetzen und liefert folgende eigenthümliche Kreisconfiguration:

> 2^n Kreise K und 2^n Punkte P können so liegen, dass jeder Kreis K durch $n+1$ Punkte P hindurchgeht und jeder Punkt P Schnittpunkt von $n+1$ Kreisen K ist; dabei sind $n+1$ Kreise, die durch einen Punkt gehen, beliebig, während aus ihnen alle übrigen Punkte und Kreise folgen. Nimmt man diese $n+1$ ersten Kreise jeden in willkürlichem Sinne, alle übrigen in geeignetem Sinne, so kann man jeden der Punkte und Kreise durch eine Variation von $n+1$ Elementen 0 oder 1 so bezeichnen, dass durch jeden Punkt die Kreise gehen und jeder Kreis durch die Punkte geht, deren Bezeichnung aus seiner Bezeichnung durch Aenderung je eines Elementes hervorgeht. Bezeichnet man die von den Kreisen an den Punkten gebildeten Winkel in der oben benutzten Weise, so ändert ein Winkelsymbol seinen Werth nicht, wenn gleichzeitig in zwei Columnen alle Indices geändert werden, oder die Kreise bilden an allen Punkten congruente Büschel von gleichem Sinn.

Keiner der Punkte und keiner der Kreise ist, was im Beweise nicht so hervortrat, vor irgend einem anderen ausgezeichnet. Anstatt der Indices 0 1 kann man selbstverständlich irgend welche andere, ja für jede Stelle ein besonderes Paar wählen.

Besondere Fälle der Configuration von acht Punkten und acht Kreisen sind von J. Steiner betrachtet und benutzt, siehe J. Steiner Ges. Werke Bd. I, pag. 223 und Bd. II, pag. 689.

Die ganze Betrachtung gilt vollkommen unverändert auf der Kugelfläche.

Die beifolgenden Figuren geben ein anschauliches Bild von der schrittweisen Entstehung der Configuration. Die Benennungen der Kreise sind immer an das linke Ufer gesetzt und in der dadurch bestimmten Richtung zu lesen. Die Benennungen der Punkte sind linksum zu lesen. Die schwarzen Halbkreise bedecken entsprechende Winkel und stehen auf einem linken Ufer.

Lübeck, im September 1895.

Ueber Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln.

Von

S. Kempinski in Krakau.

§ 1.

Die folgende Note bezieht sich auf die Existenzfrage derjenigen eindeutigen Functionen zweier Variabeln, welche von Herrn Fuchs, vor etlichen Jahren*), auf Grund zweier Lösungen einer linearen, homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten in ganz analoger Weise definirt worden sind, wie die Abel'schen Functionen auf Grund der algebraischen gebildet werden.

Es seien nämlich y_1, y_2 zwei Fundamentallösungen der Differentialgleichung:

$$(1)\qquad \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dy}{dz}\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{1-k_i'-k_i''}{z-e_i}$$
$$+y\left[\sum_{i=1}^{i=n-1}\frac{k_i'k_i''(e_i-e_1)\dots(e_i-e_{n-1})}{z-e_i}+k_n'k_n''z^{n-3}+Az^{n-4}+\dots+N\right]$$

wo

$$\sum_{i=1}^{i=n}k_i'+k_i''=n-1$$

ist. Wenn man dann die Ausdrücke:

$$(2)\qquad \begin{aligned}\int_{\zeta_1}^{z_1}y_1\,dz+\int_{\zeta_2}^{z_2}y_1\,dz&=u_1,\\ \int_{\zeta_1}^{z_1}y_2\,dz+\int_{\zeta_2}^{z_2}y_2\,dz&=u_2.\end{aligned}$$

*) Vgl. a) die erste der zwei Noten, enthalten in den Nachrichten der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1880: „Ueber eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Integrale etc. entstehen"; b) Abhandlung: „Ueber eine Classe von Functionen etc." (Crelle's J. Bd. 89, 1881), welche ich der Kürze wegen (*F*, 1) nenne: und c) kurze Note in Crelle's Journ. Bd. 90, p. 71—73.

aufstellt, in denen die unteren Grenzen ζ_1, ζ_2 constant sind und die oberen z_1, z_2, als Functionen von u_1, u_2 betrachtet, so stellen die symmetrischen Verbindungen:

$$(3) \qquad z_1 + z_2 = F_1(u_1, u_2), \quad z_1 z_2 = F_2(u_1, u_2)$$

diejenigen Functionen vor, welche Gegenstand der Fuchs'schen Betrachtungen waren. Diese Functionen nenne ich schlechtweg Fuchs'sche Functionen zweier Variabeln im Gegensatze zu Poincaré's Fuchs'schen Functionen (einer Variabeln), welche nach der von Herrn Klein gebrauchten Terminologie ein specieller Fall der allgemeinen automorphen Functionen einer Variabeln sind.

Diese Functionen F_1, F_2 sind von Herrn Fuchs in der Abhandlung*): „Ueber Functionen zweier Variabeln welche etc." noch verallgemeinert worden, insofern anstatt der Lösungen der Differentialgleichung (1), allgemeinere (l. c. näher definirte) Functionen y_1, y_2 zu Grunde gelegt sind.

In den erwähnten Arbeiten sucht Herr Fuchs die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Functionen y_1, y_2 anzugeben, damit die Functionen F_1, F_2 eindeutig seien, nämlich:

a) Der Exponent der niedrigsten Potenz in der Entwickelung der Function $ay_1 + by_2$ (a, b sind Constanten) hat in einem endlichen singulären Punkte die Form: $\frac{-n-k+1}{n}$, wo $k = 0$, oder eine ganze positive Zahl ist; im Punkte $z = \infty$ ist der Exponent von der Form $\frac{n+1-k}{n}$.

b) Die Function $z = \varphi(\eta)$ wo $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ ist, kann nicht mehr als zweideutig sein, woraus folgt, dass die Exponentendifferenzen $k_i' - k_i'' = \frac{1}{n}$, oder $= \frac{2}{n}$ sein können.

c) Indem man die Variable η in die Integrale (2) einführt, bekommt man die Integrale $\int^{\eta} \sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta$, $\int^{\eta} \eta\sqrt{\psi(\eta)}\, d\eta$, wo $\psi(\eta)$

α) eine eindeutige Function ist.

β) Die nicht wesentlich singulären Punkte von $z = \varphi(\eta)$ sind auch nicht wesentlich singulär für $\varphi(\eta)$; wenn dabei $\eta = \infty$ ein nicht wesentlich singulärer Punkt für $\varphi(\eta)$ ist, so ist $\eta^3\sqrt{\psi(\eta)}$, oder $\eta^{\frac{5}{2}}\sqrt{\psi(\eta)}$**) für $\eta = \infty$ eindeutig, endlich und von Null verschieden.

---

*) Abh. der k. Gesellschaft der W. zu Göttingen, Bd. 27, 1881. Diese Abhandlung, welche man als gründlichste in diesem Gegenstande ansehen muss, bezeichne ich im Folgenden (F, 2). Derselben entnehme ich die unten angeführten Sätze.

**) Je nachdem $z = \varphi(\eta)$ in $\eta = \infty$ ein- oder zweiwerthig ist.

Nun hat Herr Lohnstein in seiner Inauguraldissertation*) bewiesen, dass, im Falle y_1, y_2 Lösungen der Differentialgleichung (1) sind, auch

γ) für wesentlich singuläre Punkte von $z = \varphi(\eta)$ die Function $\psi(\eta)$ nur bestimmt unendlich grosse Werthe annehmen darf, woraus folgt, dass $\frac{1}{\psi(\eta)} = G(\eta)$ eine ganze rationale Function ist**);

δ) wenn solche wesentlich singuläre Punkte wirklich vorhanden sind, $G(\eta)$ höchstens 3ten Grades sein kann, im anderen Falle aber 5ten oder 6ten Grades; im letzteren Falle sind die Differentialgleichungen (1) algebraisch integrirbar***).

Der Hauptzweck der citirten Dissertation ist eben, diese Differentialgleichungen anzugeben, welche algebraisch integrirbar sind und zugleich den obigen Bedingungen genügen. Es werden aber in den ersten Capiteln nebenbei auch die in Betracht kommenden nicht algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen erörtert. Bei der Feststellung dieser letzteren Gleichungen schliesst nun Herr Lohnstein die Annahme $k_i' - k_i'' = \frac{2}{n}$ [v. (1)] von der Analysis gänzlich aus. Indem er dementsprechend annimmt, dass die Exponentendifferenz $k_i' - k_i'' = \frac{1}{n}$ sein soll, folgert er, dass dann $z = \varphi(\eta)$ eine eindeutige Function ist (cff. l. c. p. 15), was bekanntlich nur dann der Fall ist, wenn die Anzahl der singulären Punkte der Differentialgleichung (1) gleich 3 ist†).

Indem man diese Ungenauigkeit und die erwähnte Voraussetzung beachtet, scheint es nicht unwerth zu sein, die Untersuchung noch einmal aufzunehmen, um den Umfang der betr. Fuchs'schen Functionen genau festzustellen.

§ 2.

Indem wir die algebraisch integrirbaren Differentialgleichungen (wo also $G(\eta)$ des 5ten oder 6ten Grades ist) von der Betrachtung ausschliessen, machen wir gleich die Annahme, dass $z = \varphi(\eta)$ wenigstens einen wesentlich singulären Punkt besitzt. Dann ist nach δ)

$$G(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3.$$

---

*) „Ueber lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung etc." Berlin 1890.

**) S. l. c. p. 12, 13.

***) l. c. p. 22.

†) Dieselbe Ungenauigkeit findet sich schon bei Herrn Fuchs in (F. 1); sie ist nachher von Herrn Poincaré und Herrn Klein hervorgehoben und neuerdings auch von Herrn Picard zur Sprache gebracht worden (Acta Mathematica XVII, p. 297 ff.).

Aber auch umgekehrt folgert man aus δ) und γ), dass, wenn $G(\eta)$ nicht 5ten oder 6ter Grades ist, die Function $z = \varphi(\eta)$ wenigstens einen wesentlich singulären Punkt besitzt.

Entsprechend den Werthen, welche die Coefficienten α, β, γ, δ der Function $G(\eta)$ annehmen können, unterscheiden wir sieben Fälle

1) $G(\eta) = \alpha$;

2) $G(\eta) = \alpha + \beta(\eta)$;

3) $G(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2$, $(4\gamma\alpha - \beta^2) \gtrless 0$;

4) $G(\eta) = (a + b\eta)^2$;

5) $G(\eta) = \alpha + \beta\eta + \gamma\eta^2 + \delta\eta^3$;

6) $G(\eta) = (a + b\eta)(c + d\eta)^2$;

7) $G(\eta) = (a + b\eta)^3$.

Nun bemerken wir, dass zwischen den Lösungen der Differentialgleichung (1) folgende Relation*) besteht:

$$y_1^6 G\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = R(z)^{\frac{1}{r}}, \tag{4}$$

wo $R(z)$ eine rationale Function von z und r eine ganze Zahl ist.

Von anderer Seite ist aber für solche Relationen folgender Satz**) von Herrn Fuchs bekannt: *Ist eine aus einem Fundamentalsysteme* y_1, y_2 *gebildete Form höheren als zweiten Grades Wurzel einer rationalen Function, so hat die Differentialgleichung* (1) *ein algebraisches Integral.*

Dies findet nun wirklich in den Fällen 2, 3, 4, 5, 6 statt, in denen die bezügliche Relation der Reihe nach folgende Formen besitzt:

2′) $y_1^5(ay_1 + by_2) = R(z)^{\frac{1}{r}}$,

3′) $y_1^4(\alpha y_1^2 + \beta y_1 y_2 + \gamma y_2^2) = R(z)^{\frac{1}{r}}$,

4′) $y_1^2(ay_1 + by_2) = R(z)^{\frac{1}{2r}}$,

5′) $y_1^3(\alpha y_1^3 + \beta y_1^2 y_2 + \gamma y_1 y_2^2 + \delta y_2^3) = R(z)^{\frac{1}{r}}$,

6′) $y_1^3(ay_1 + by_2)(cy_1 + dy_2)^2 = R(z)^{\frac{1}{r}}$.

---

*) Vgl. Lohnstein p. 8.

**) Crelle's J. Bd. 81, p. 127.

Die hierher gehörenden Differentialgleichungen werden demnach ein algebraisches Integral besitzen. Dies widerspricht aber unserer Annahme, dass die Function $z = \varphi(\eta)$ wenigstens einen wesentlich singulären Punkt besitzen soll. Es ist also nur noch ein Schluss möglich:

In den Fällen 2, 3, 4, 5, 6 *existiren keine Differentialgleichungen, welche den Fuchs'schen Bedingungen (in F,* 2) *genug thun. Mit anderen Worten, in diesen Fällen existirt kein eindeutiges Umkehrproblem.*

Was die Fälle 1) und 7) anbelangt, so reducirt sich in ihnen die Relation 4) bezw. auf:

$$1') \quad y_1 = R(z)^{\frac{1}{6r}},$$

$$7') \quad y_1(ay_1 + by_2) = R(z)^{\frac{1}{3r}}.$$

Nach dem oben angegebenen Satze von Herrn Fuchs und seiner Umkehrung besitzt dann die Differentialgleichung (1) ein nicht algebraisches Integral.

Und in der That, wenn man die Gleichung (4) benutzt, kann man in beiden Fällen mit leichter Mühe diese rationale Function $R(z)$ finden. Nimmt man noch den Ausdruck für $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ als Function von z, so erhält man die allgemeine Form der Integrale y_1, y_2 *). Nachher construirt man die zugehörigen Differentialgleichungen.

Dabei zeigt sich, dass alle diese Differentialgleichungen mit Ausnahme eines Falles, schon von Herrn Fuchs als Beispiele angegeben worden sind**), und das zugehörige Umkehrproblem durch Heranziehung der doppeltperiodischen Functionen gelöst werden kann.

Der Fall, welcher von den beiden Autoren bei Seite gelassen wurde, ist darum wichtig, weil er das einzige Beispiel für solche Differentialgleichungen liefert, in denen $z = \varphi(\eta)$ zweideutig ist und die Functionen F_1, F_2 doch eindeutig ausfallen. Und in der That, man kann sich leicht überzeugen, dass die bei Lohnstein vorkommende Constante c_2 (l. c. p. 24, 25) nicht nur den Werth $c_2 = \frac{\pi i}{\omega}$ (wo 2ω eine Periode einer doppeltperiodischen Function ist, sondern auch den Werth $\frac{2\pi i}{\omega}$ erhalten kann. Dann ist, wie gesagt, $z = \varphi(\eta)$ zweideutig und trotzdem kann man die F_1, F_2 vermittelst einer doppeltperiodischen Function in Reihen nach ganzen Potenzen von u_1, u_2 entwickeln.

---

*) S. Lohnstein l. c. §§ 2, 3.

**) Note II in den Nachrichten der k. G. der Wiss. zu Göttingen, 1880.

Die vorhergehenden Betrachtungen resumiren wir in folgendem Satze: *Die Bedingungen von Herrn Fuchs, welche sich auf Functionen zweier Variabeln beziehen, die ihre Entstehung den Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten verdanken, sind nothwendig und hinreichend. Es existiren aber nur einige Fälle solcher Differentialgleichungen, welche alle durch Heranziehung der doppeltperiodischen Functionen erledigt werden und bis auf einen Fall (in welchem $z = \varphi(\eta)$ zweideutig ist) schon von Herrn Fuchs in der zweiten Note der Göttinger Abhandlungen angeführt worden sind.*

Krakau, November 1895.

Nouvelles applications des fractions continues.

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Dans ma thèse „Sur quelques applications des fractions continues algébriques“, publiée en russe (année 1884), je m'occupais à la détermination des valeurs limites des certaines intégrales dépendantes d'une fonction $f(y)$, laquelle n'est assujettie qu'à des conditions suivantes:

1) $f(y) > 0$ pour $a < y < b$;

2) les intégrales

$$\int_a^b f(y)\,dy, \quad \int_a^b y f(y)\,dy, \ldots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy$$

doivent avoir des valeurs données.

La question sur ces valeurs limites est soulevée par Tchebychef dans sa note*) „Sur les valeurs limites des intégrales.“

Nous devons aussi à Tchebychef les inégalités importantes, qui demontrées et généralisées**) par moi sont la base des recherches sur les questions de ce genre.

Maintenant nous allons considérer les questions semblables aux précédentes, en remplaçant seulement l'inégalité

$$f(y) > 0$$

par les deux suivantes:

$$L > f(y) > 0.$$

*) Journal de Liouville, 2 série. XIX.

**) Mathematische Annalen, Band XXIV, p. 172. Voir aussi: C. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg, 1886.

§ 1.

Commençons par la question suivante:

Etant données les valeurs des intégrales

$$(1)\quad \int_a^b f(y)\,dy = \alpha_0,\ \int_a^b y f(y)\,dy = \alpha_1, \ldots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy = \alpha_{i-1},$$

il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

à la condition

$$(2)\qquad L > f(y) > 0.$$

En abordant la solution de notre question, posons, que $f(y)$ est une fonction quelconque satisfaisante aux conditions (1) et (2).

Entre a et b nous prenons $i+1$ nombres

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_i,\ \xi_{i+1}$$

et dans le voisinage de ces nombre les éléments d'une même longueur σ infiniment petite.

Or sur ces éléments nous donnerons à la fonction $f(y)$ les accroissements (positifs ou négatifs) constants

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_i,\ \delta_{i+1},$$

qui ne contreviennent pas aux conditions (1) et (2).

En supposant les éléments σ infiniment petits, nous supposerons en même temps, que sur chacun d'eux, séparément, la fonction $f(y)$ ne peut atteindre que l'une de ses valeurs extrêmes 0 et L.

Si sur quelque élément σ la fonction n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes 0 et L, l'accroissement δ correspondant peut être aussi bien positif comme négatif, pourvue qu'il soit assez petit numériquement.

Cet accroissement δ doit être negatif, si sur l'élément σ correspondant la fonction $f(y)$ a la valeur extrême L, et au contraire δ doit être positif, si sur l'élément σ correspondant la fonction $f(y)$ a la valeur 0. Ainsi les valeurs δ sont bornées par la condition (2)

Quant à la condition (1) elle nous donne les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{i+1} = 0,\\
&\delta_1 \xi_1 + \delta_2 \xi_2 + \cdots + \delta_{i+1} \xi_{i+1} = 0,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&\delta_1 \xi_1^{i-1} + \delta_2 \xi_2^{i-1} + \cdots + \delta_{i+1} \xi_{i+1}^{i-1} = 0,
\end{aligned}$$

d'où on trouve

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_1)},\ \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_2)},\ \ldots,\ \delta_{i+1} = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_{i+1})},$$

en posant

$$\Theta(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2)\ldots(y - \xi_{i+1}),$$

ε étant un nombre arbitraire.

Or les valeurs trouvées de

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots,\ \delta_{i+1}$$

ont les mêmes signes que les produits

$$(-1)^i\varepsilon,\ (-1)^{i-1}\varepsilon,\ldots,\ \varepsilon;$$

nous supposons

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{i+1}.$$

Donc la variation considérée de la fonction $f(y)$ est possible toutes les fois, que les signes de

$$(-1)^i\varepsilon,\ (-1)^{i-1}\varepsilon,\ldots,\ \varepsilon$$

sont conformes aux remarques précédentes sur les signes de δ.

L'accroissement correspondant de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

est égale à

$$\sigma(\delta_1\xi_1^i + \delta_2\xi_2^i + \cdots + \delta_{i+1}\xi_{i+1}^i) = \sigma\varepsilon\left\{\frac{\xi_1^i}{\Theta'(\xi_1)} + \cdots + \frac{\xi_{i+1}^i}{\Theta'(\xi_{i+1})}\right\} = \sigma\varepsilon.$$

et par conséquent il a le même signe que ε.

De tout ceci on peut tirer les conclusion suivantes.

I. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes, si dans une partie de l'intervalle, de $y = a$ jusqu'à $y = b$, la fonction $f(y)$ n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes 0 et L.

II. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

n'atteint pas son maximum, si l'on peut indiquer entre a et b, dans l'ordre des valeurs croissantes de y, les $i + 1$ intervalles, où la fonction $f(y)$ est égale alternativement 0 et L, étant

$$f(y) = 0$$

dans le dernier de ces intervalles.

III. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

n'attient pas son minimum, si l'on peut indiquer entre a et b, dans l'ordre des valeurs croissantes de y, les $i+1$ intervalles. où la fonction $f(y)$ est égale alternativement 0 et L, étant

$$f(y) = L$$

dans le dernier de ces intervalles

Donc les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

correspondent aux telles fonction $f(y)$, pour lesquelles l'intervalle de $y=a$ jusqu'à $y=b$ se divise en $i+1$ parties, dans lesquelles alternativement $f(y)=0$ et $f(y)=L$, au moins que les divisions semblables en plus petit nombre des parties soient impossibles.

Or dans la dernière des $i+1$ parties précédentes on doit avoir $f(y)=L$ pour le maximum et $f(y)=0$ pour le minimum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy.$$

§ 2.

Supposons maintenant, que par les valeurs de $f(y)$ l'intervalle de $y=a$ jusqu'à $y=b$ se divise effectivement en $i+1$ parties de sorte qu'on a

$$\begin{array}{llll}
f(y) = \frac{1+(-1)^i}{2}L & \text{ou} \quad \frac{1-(-1)^i}{2}L & \text{pour} & a < y < y_1, \\
f(y) = \frac{1+(-1)^{i-1}}{2}L & \text{ou} \quad \frac{1-(-1)^{i-1}}{2}L & \text{pour} & y_1 < y < y_2, \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f(y) = 0 & \text{ou} \quad L & \text{pour} & y_{i-1} < y < y_i, \\
f(y) = L & \text{ou} \quad 0 & \text{pour} & y_i < y < b.
\end{array}$$

Soit de même $F(y)$ une autre fonction, satisfaisante aussi aux conditions (1) et (2):

$$\int_a^b F(y)dy = \alpha_0, \int_a^b yF(y)\,dy = \alpha_1, \ldots, \int_a^b y^{i-1}F(y)dy = \alpha_{i-1},$$

$$L > F(y) > 0.$$

Ceci posé, nous aurons

$$\int_a^b \Omega(y)\, f(y)\, dy = \int_a^b \Omega(y)\, F(y)\, dy$$

pour chaque fonction entière $\Omega(y)$ de degré inférieur à i.

Or la différence

$$y^i - (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)$$

est une fonction entière de y de degré inférieur à i.

Il en résulte que la différence

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy - \int_a^b y^i F(y)\, dy$$

est égale à

$$\int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i) f(y)\, dy - \int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i) F(y)\, dy,$$

ce qui revient à l'intégrale

$$\int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i)\,\{f(y) - F(y)\}\, dy,$$

dont tous les éléments sont positifs ou négatifs, selon que

$$f(y) = L \quad \text{ou} \quad 0, \quad \text{pour} \quad y_i < y < b.$$

Par conséquent la différence

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy - \int_a^b y^i F(y)\, dy$$

est assurément positive dans le cas de

$$f(y) = L \quad \text{pour} \quad y_i < y < b,$$

et négative dans le cas de

$$f(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y_i < y < b.$$

De cette manière nous vérifions notre solution et démontrons sa unicité, en excluant seulement les cas, où par les valeurs uniques 0 et L d'une fonction $f(y)$, satisfaisante aux conditions (1) et (2), tout l'intervalle de $y = a$ jusqu'à $y = b$ se divise en nombre des parties plus petit que $i + 1$.

Mais il est facile de se convaincre, que ces cas exclusifs sont impossibles, si les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ sont donnés par les égalités

$$(3) \quad \alpha_0 = \int_a^b F(y)\, dy, \quad \alpha_1 = \int_a^b y F(y)\, dy, \ldots, \quad \alpha_{i-1} = \int_a^b y^{i-1} F(y)\, dy,$$

$F(y)$ étant une fonction donnée, dont les valeurs satisfont à la condition

$$L > F(y) > 0 \quad (\text{pour } a < y < b)$$

et ne sont pas toutes égales à 0 et L.

§ 3.

Désignons par

$$f_{\min} \quad \text{et} \quad f_{\max}$$

les fonctions $f(y)$ satisfaisantes à nos conditions et correspondantes aux maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy.$$

Soient encore

$$\xi', \ \xi'', \ \eta', \ \eta''$$

ces valeurs de y, pour lesquelles les fonctions $f_{\min}$ et $f_{\max}$ changent leurs valeurs 0 et L, de sorte qu'on aura:

$$\begin{array}{ll}
f_{\min} = 0 \text{ pour } y = \xi' - \varepsilon, & f_{\min} = L \text{ pour } y = \xi' + \varepsilon, \\
f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \xi'' - \varepsilon, & f_{\max} = L \text{ pour } y = \xi'' + \varepsilon, \\
f_{\min} = L \text{ pour } y = \eta' - \varepsilon, & f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \eta' + \varepsilon, \\
f_{\max} = L \text{ pour } y = \eta'' - \varepsilon, & f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \eta'' + \varepsilon,
\end{array}$$

ε étant infiniment petit et positif.

Enfin nous désignerons par

$V_i^{(\prime)}(z)$	le	produit	de	tous	les	facteurs	$z - \xi'$,
$V_i^{(\prime\prime)}(z)$	„	„	„	„	„	„	$z - \xi''$,
$U_i^{(\prime)}(z)$	„	„	„	„	„	„	$z - \eta'$,
$U_i^{(\prime\prime)}(z)$	„	„	„	„	„	„	$z - \eta''$.

Après ces désignations la condition (1) pour les fonctions $f_{\min}$ et $f_{\max}$ se ramène aux équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sum\eta' - \sum\xi' - \lambda a = \frac{\alpha_0}{L} = b + \sum\eta'' - \sum\xi'' - \mu a, \\
\sum\eta'^2 - \sum\xi'^2 - \lambda a^2 = \frac{2\alpha_1}{L} = b^2 + \sum\eta''^2 - \sum\xi''^2 - \mu a^2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum\eta'^i - \sum\xi'^i - \lambda a^i = \frac{i\alpha_{i-1}}{L} = b^i + \sum\eta''^i - \sum\xi''^i - \mu a^i, \\
\qquad \lambda = \frac{1-(-1)^i}{2}, \qquad \mu = \frac{1+(-1)^i}{2},
\end{array}\right.$$

Σ étant le signe d'une somme.

Quant aux minimum et maximum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

ils seront

$$(5)\quad \begin{aligned} h_i' &= \int_a^b y^i f_{\min}\,dy = L\left\{\sum \frac{\eta'^{\,i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi'^{\,i+1}}{i+1} - \frac{\lambda a^{i+1}}{i+1}\right\},\\ h_i'' &= \int_a^b y^i f_{\max}\,dy = L\left\{\frac{b^{i+1}-\mu a^{i+1}}{i+1} + \sum \frac{\eta''^{\,i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi''^{\,i+1}}{i+1}\right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas de i pair $= 2n$, nous avons les $4n$ inconnus

$$\xi_1' < \eta_1' < \xi_2' < \eta_2' < \cdots < \xi_n' < \eta_n',$$
$$\eta_1'' < \xi_1'' < \eta_2'' < \xi_2'' < \cdots < \eta_n'' < \xi_n''$$

et nous pouvons remplacer les équations (4) par ces formules

$$\sum \frac{L}{z-\eta'} - \sum \frac{L}{z-\xi'} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \cdots + \frac{2n\,\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h_{2n}'}{z^{2n+2}} + \cdots,$$

$$\frac{L}{z-b} - \frac{L}{z-a} + \sum \frac{L}{z-\eta''} - \sum \frac{L}{z-\xi''} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \cdots + \frac{2n\,\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h_{2n}''}{z^{2n+2}} + \cdots$$

d'où, en intégrant par rapport à z, on tire

$$\frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \cdots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h_{2n}'}{Lz^{2n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{(z-a)\,V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{(z-b)\,U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \cdots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h_{2n}''}{Lz^{2n+1}} + \cdots$$

et par conséquent

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h_{2n}' - \alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \cdots, \\[2ex] \dfrac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = \dfrac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h_{2n}'' - \alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \cdots \end{cases}$$

si l'on détermine tous les nombres α par les égalités (3).

De même manière on trouvera

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{(z-a)\,V^{(\prime)}_{2n-1}(z)}{U^{(\prime)}_{2n-1}(z)} = e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h'_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{(z-b)\,V^{(\prime)}_{2n-1}(z)}{U^{(\prime)}_{2n-1}(z)} = \dfrac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h'_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{V^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)}{(z-b)\,U^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)} = e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{V^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)}{(z-a)\,U^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)} = \dfrac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L z^{2n}} + \cdots.
\end{cases}
$$

Nous parvenons ainsi au théorème suivant:

Théorème I.

Si la fonction $F(y)$ satisfait à la condition

$$L > F(y) > 0,$$

les développements suivants)*

$$
(8)\qquad e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{z-a - \cfrac{c_2}{1 - \cfrac{c_3}{z-a-\ddots}}}},
$$

$$
(9)\qquad e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = 1 + \cfrac{\gamma_1}{z-b + \cfrac{\gamma_2}{1 + \cfrac{\gamma_3}{z-b + \cfrac{\gamma_4}{1+\ddots}}}},
$$

$$
(10)\qquad \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = 1 - \cfrac{\partial_1}{z-a - \cfrac{\partial_2}{1 - \cfrac{\partial_3}{z-a - \cfrac{\partial_4}{1-\ddots}}}},
$$

---

*) Ce genre des fractions continues était employé déjà par Stieltjes dans ses „Recherches sur les fractions continues".

$$(11)\qquad \frac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+}\,\frac{\delta_2}{1+}\,\frac{\delta_3}{z-b+\cdots},$$

sont possibles, les nombres c, γ, ∂, δ étant positifs.

Or ces développements sont liés avec nos fonctions U et V par les formules

$$(12)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1-}\,\frac{c_1}{z-a-}\,\frac{c_2}{1-\cdots}\cdots-\frac{c_{2n-1}}{z-a-c_{2n}},$$

$$(13)\qquad \frac{(z-a)V_{2n-1}^{(\prime)}(z)}{U_{2n-1}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1-}\,\frac{c_1}{z-a-\cdots}\cdots-\frac{c_{2n-2}}{1-}\,\frac{c_{2n-1}}{z-a},$$

$$(14)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = 1-\frac{\partial_1}{z-a-}\,\frac{\partial_2}{1-\cdots}\cdots-\frac{\partial_{2n-1}}{z-a-\partial_{2n}},$$

$$(15)\qquad \frac{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)}{(z-a)U_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)} = 1-\frac{\partial_1}{z-a-\cdots}\cdots-\frac{\partial_{2n-2}}{1-}\,\frac{\partial_{2n-1}}{z-a},$$

$$(16)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = 1+\frac{\gamma_1}{z-b+}\,\frac{\gamma_2}{1+\cdots}\cdots+\frac{\gamma_{2n-1}}{z-b+\gamma_{2n}},$$

$$(17)\qquad \frac{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)}{(z-b)U_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)} = 1+\frac{\gamma_1}{z-b+\cdots}\cdots+\frac{\gamma_{2n-2}}{1+}\,\frac{\gamma_{2n-1}}{z-b},$$

$$(18)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+}\,\frac{\delta_2}{1+\cdots}\cdots+\frac{\delta_{2n-1}}{z-b+\delta_{2n}},$$

$$(19)\qquad \frac{(z-b)V_{2n-1}^{(\prime)}(z)}{U_{2n-1}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+\cdots}\cdots+\frac{\delta_{2n-2}}{1+}\,\frac{\delta_{2n-1}}{z-b}.$$

D'après les propriétés connues des fractions continues on a

$$(20)\quad \begin{cases} c_1 = \gamma_1 = \frac{\alpha_0}{L}, & \partial_1 = \delta_1 = b - a - \frac{\alpha_0}{L}, \\ c_1 c_2 \dots c_i = \frac{\alpha_{i-1} - h'_{i-1}}{L}, & \partial_1 \partial_2 \dots \partial_i = \frac{h''_{i-1} - \alpha_{i-1}}{L}, \\ \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n-1} = \frac{\alpha_{2n-2} - h'_{2n-2}}{L}, & \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2n-1} = \frac{h''_{2n-2} - \alpha_{2n-2}}{L}, \\ \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_{2n} = \frac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L}, & \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{2n} = \frac{\alpha_{2n-1} - h'_{2n-1}}{L}. \end{cases}$$

Il est important aussi de remarquer la proposition suivante:

La fraction ordinaire irréductible $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ étant égale à

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{e_1}{x - \cfrac{e_2}{1 - \cfrac{e_3}{x - \cdot_{\cdot_{\cdot}} - \cfrac{e_i}{x^{\frac{1-(-1)^i}{2}}}}}}}$$

et les nombres $e_1, e_2, e_3, \dots, e_i$ étant positifs, toutes les racines des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0$$

sont réelles positives et distinctes; de plus les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ séparent celles de l'équation $\psi(x) = 0$.

Ayant égard à cette proposition et aux formules trouvées, il est facile de vérifier en ordre inverse nos conclusions, fondées sur l'existence de maximum et de minimum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy.$$

§ 5.

Nous allons établir maintenant, que les fonctions trouvées $f_{\min}$ et $f_{\max}$ donnent aussi la solution de cette question générale.

Etant donnés

$$\int_a^b f(y)\, dy = \alpha_0, \int_a^b y f(y)\, dy = \alpha_1, \dots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\, dy = \alpha_{i-1}$$

et la condition

$$L > f(y) > 0,$$

il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^b \Phi(y)\, f(y)\, dy$$

pour chaque fonction $\Phi(y)$ *donnée, dont la derivée*

$$\frac{d^i \Phi(y)}{dy^i} = \Phi^i(y),$$

de l'ordre i, *ne change pas son signe entre* $y = a$ *et* $y = b$,

A cet effet en conservant les désignations de § 2 et en posant

$$\Omega(y) = \Phi(y_1)\frac{(y-y_2)\cdots(y-y_i)}{(y_1-y_2)\cdots(y_1-y_i)} + \cdots + \Phi(y_i)\frac{(y-y_1)\cdots(y-y_{i-1})}{(y_i-y_1)\cdots(y_i-y_{i-1})}$$

nous relevons les égalités

$$\int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy - \int_a^b \Phi(y)\, f(y)\, dy = \int_a^b \{\Phi(y) - \Omega(y)\}\{F(y) - f(y)\}\, dy$$

et

$$\Phi(y) - \Omega(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\cdots(y-y_i)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i}\,\Phi^i(y_0),$$

d'où l'on tire

$$(21)\qquad \int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy = \int_a^b \Phi(y)\, f(y)\, dy + \Phi^i(\zeta)\int_a^b \frac{\{F(y) - f(y)\}\,\omega(y)\, dy}{1\,.\,2\,.\,3\ldots i},$$

en posant

$$\omega(y) = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i),$$

y_0 et ζ étant quelques nombres intermédiaires entre a et b.

La formule (21) s'applique à chaque fonction $\Phi(y)$.

Or dans le cas, où l'on a constamment

$$\Phi^i(y) > 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b,$$

il en résultent les inégalités

$$\int_a^b \Phi(y) f_{\min}\, dy < \int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy < \int_a^b \Phi(y) f_{\max}\, dy,$$

quelque soit la fonction $F(y)$ satisfaisante à nos conditions.

De même dans le cas, où l'on a constamment

$$\Phi^i(y) < 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b,$$

la formule (21) donne

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\min}\, dy > \int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy > \int_a^b \Phi(y)\, f_{\max}\, dy.$$

En appliquant ce résultat à la fonction

$$\Phi(y) = \frac{1}{z - y}$$

et en posant pour fixer les idées

$$z > b$$

on obtient le théorème suivant:

Théorème II.

Si l'on a

$$L > F(y) > 0 \quad \text{et} \quad z > b$$

et si l'on développe les expressions

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}}$$

en fractions continues

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{c_1}{z - a - \cfrac{c_2}{1 - \cfrac{c_3}{z - a - \cdots}}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{1 - \cfrac{\partial_1}{z - a - \cfrac{\partial_2}{1 - \cfrac{\partial_3}{z - a - \cdots}}}}$$

toutes les fractions réduites de ces développements seront plus petites que les expressions correspondantes.

Or si aux conditions précedentes

$$L > F(y) > 0 \quad \text{et} \quad z > b$$

on développe les mêmes expressions

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}}$$

en fractions continues

$$1 + \cfrac{\gamma_1}{z - b + \cfrac{\gamma_2}{1 + \cfrac{\gamma_3}{z - b + \cdots}}} \quad \text{et} \quad 1 + \cfrac{\delta_1}{z - b + \cfrac{\delta_2}{1 + \cfrac{\delta_3}{z - b + \cdots}}},$$

les fractions réduites de ces développements seront alternativement plus petites et plus grandes que les expressions correspondantes.

§ 6.

En conservant nos conditions (1), (2) et (3), passons aux valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

x étant un nombre donné compris entre a et b.

Or préalablement nous devons établir cette proposition simple. Etant

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots < \xi_\kappa < \xi_{\kappa+1} < \cdots < \xi_i < \xi_{i+1}$$

et

$$\Theta(z) = (z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_i)(z-\xi_{i+1}),$$

la somme

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_\kappa)}$$

a le même signe ($\pm$) que son terme dernier

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_\kappa)}.$$

En effet pour chaque fonction entière $\Omega(y)$, de degré plus petit que i, on a

$$\frac{\Omega(\xi_1)}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{\Omega(\xi_2)}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{\Omega(\xi_{i+1})}{\Theta'(\xi_{i+1})} = 0$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_\kappa)} + \frac{\Omega(\xi_{k+1})}{\Theta'(\xi_{k+1})} = 0,$$

si les coefficients de la fonction $\Omega(y)$ sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned} \Omega(\xi_1) &= \Omega(\xi_2) = \cdots = \Omega(\xi_\kappa) = 1, \\ \Omega(\xi_{\kappa+2}) &= \Omega(\xi_{\kappa+3}) = \cdots = \Omega(\xi_{i+1}) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part il est facile de voir, que la dérivée $\Omega'(y)$ doit être constamment négative dans l'intervalle de $y = y_\kappa$ jusqu'à $y = y_{\kappa+2}$, la fonction $\Omega(y)$ étant déterminée par les conditions que nous venons d'établir.

Il en résultent les inégalités

$$0 < \Omega(\xi_{\kappa+1}) < 1.$$

Donc la somme

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_\kappa)},$$

étant comprise entre

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\Theta'(\xi_{\kappa+1})},$$

a le même signe que $\frac{1}{\Theta'(\xi_k)}$.

Rappelons maintenant la variation à laquelle était soumise la fonction $f(y)$ en § 1, en posant $\xi_\varkappa < x < \xi_{\varkappa+1}$.

D'après les résultats précédentes cette variation de $f(y)$ augmentera ou diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

selon que

$$\delta_\varkappa = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_\varkappa)}$$

sera positif ou negatif.

Célà étant, il n'est pas difficile d'établir pour la fonction $f(y)$, correspondante au maximum ou au minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

les conditions suivantes:

1) $f(y)$ n'a pas d'autres valeurs que 0 et L;
2) l'intervalle, de $y=a$ jusqu'à $y=b$, se divise en $i+2$ parties, dans lesquelles $f(y)$ est alternativement égale à 0 et à L;
3) $f(x-\varepsilon')=L$ et $f(x+\varepsilon')=0$ dans le cas maximum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

$f(x-\varepsilon')=0$ et $f(x+\varepsilon')=L$ dans le cas de minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

ε' étant infiniment petit positif.

Or ces conditions déterminent tout a fait la fonction cherchée $f(y)$, ce que nous allons démontrer:

Soient

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_\varkappa < x < y_{\varkappa+1} < y_{\varkappa+2} < \cdots < y_{i-1} < y_i$$

les valeurs de y, qui séparent les valeurs 0 et L de la fonction $f(y)$.

Soit encore $F(y)$ une autre fonction satisfaisante aussi aux conditions (1) et (2).

En posant

$$(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)=\Theta(y)$$

et

$$\Omega(y)=\frac{\Theta(y)}{(y-y_1)\Theta'(y_0)}+\frac{\Theta(y)}{(y-y_2)\Theta'(y_2)}+\cdots+\frac{\Theta(y)}{(y-y_\varkappa)\Theta'(y_\varkappa)},$$

on aura

$$\Omega(y_1) = \Omega(y_2) = \cdots = \Omega(y_x) = 1,$$

et

$$\Omega(y_{x+1}) = \Omega(y_{x+2}) = \cdots = \Omega(y_i) = 0$$

$$\int_a^b \{f(y) - F(y)\}\,\Omega(y)\,dy = 0.$$

Or on peut écrire

$$\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x F(y)\,dy = \int_a^b \{f(y) - F(y)\}\,\omega(y)\,dy,$$

en déterminant $\omega(y)$ par les égalités

$$\omega(y) = 1 \quad \text{pour} \quad a < y < x$$

et

$$\omega(y) = 0 \quad \text{pour} \quad x < y < b.$$

Il en résulte que la différence

$$\int_a^x f(y)\,dy - \int_a^x F(y)\,dy$$

est égale à l'intégrale

$$\int_a^b \{f(y) - F(y)\}\,\{\omega(y) - \Omega(y)\}\,dy,$$

dont tous les éléments ont un même signe, car les différences

$$f(y) - F(y) \quad \text{et} \quad \omega(y) - \Omega(y)$$

changent de signe simultanément.

Donc notre fonction $f(y)$ donne le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy.$$

Enfin pour s'assurer que le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

correspondent respectivement au cas de $f(x-\varepsilon') = L$ et au cas de $f(x-\varepsilon') = 0$, ε' étant infiniment petit et positif, il reste à remarquer, que pour $y_x < y < x$ la différence

$$\omega(y) - \Omega(y)$$

est positive.

§ 7.

Nous nous bornerons ici à examiner en détail la solution de la question sur le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

dans le cas de i pair, $i = 2n$.

Il faut pour cette recherche de distinguer deux hypothèses par rapport aux valeurs de y, qui séparent les valeurs 0 et L de la fonction $f(y)$.

Dans la première hypothèse nous avons

$$\begin{array}{llll}
f(y) = 0 \text{ pour } a < y < \xi_1\,, & f(y) = L \text{ pour } \xi_1 < y < \eta_1\,, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_1 < y < \xi_2\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_2 < y < \eta_2\,, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\kappa-2} < y < \xi_{\kappa-1}, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{\kappa-1} < y < \eta_{\kappa-1}, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\kappa-1} < y < x\,, & f(y) = L \quad ,, \quad x < y < \eta_\kappa\,, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_\kappa < y < \xi_\kappa\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_\kappa < y < \eta_{\kappa+1}, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_n < y < \xi_n\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_n < y < b
\end{array}$$

et dans la seconde hypothèse

$$\begin{array}{llll}
f(y) = L \text{ pour } a < y < \eta_1\,, & f(y) = 0 \text{ pour } \eta_1 < y < \xi_1, \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_1 < y < \eta_2\,, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_2 < y < \xi_2, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{\kappa-1} < y < \eta_\kappa\,, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_\kappa < y < x\,, \\
f(y) = L \quad ,, \quad x < y < \eta_{\kappa+1}, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\kappa+1} < y < \xi_\kappa, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{n-1} < y < \eta_{n+1}, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{n+1} < y < b\,.
\end{array}$$

En considérant séparément ces hypothèses et en ajoutant aux désignations de § 3 celles ci

$$P(z) = \text{le produit de tous les facteurs } z - \xi,$$
$$Q(z) = \;,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad z - \eta,$$

on trouvera, par des calculs semblables à ceux de § 3, les formules

$$\frac{(z-x)P(z)}{(z-b)\,Q(z)} = 1 + \cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\ddots+\cfrac{\gamma_{2n}}{1+\cfrac{\gamma}{z-b}}}},$$

$$\gamma = \frac{(b-x)\,V_{2n}^{(\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(x)},$$

$$\frac{(z-x)P(z)}{(z-a)\,Q(z)} = 1 - \cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\ddots-\cfrac{\partial_{2n}}{1-\cfrac{\partial}{z-a}}}},$$

$$\partial = \frac{(x-a)\,V_{2n}^{(\prime\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(x)},$$

$$L\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n}\gamma + L\,\partial_1\partial_2\ldots\partial_{2n}\partial = h_{2n}'' - h_{2n}'$$

dans la première hypothèse, et les formules

$$\frac{(z-a)(z-x)P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\ddots-\cfrac{c_{2n}}{1-\cfrac{c}{z-a}}}}},$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime)}(x)},$$

$$\frac{(z-b)(z-x)P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\ddots+\cfrac{\delta_{2n}}{1+\cfrac{\delta}{z-b}}}}},$$

$$\delta = -\frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime)}(x)},$$

$$L\,c_1c_2\ldots c_{2n}c + L\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2n}\delta = h_{2n}'' - h_{2n}'$$

dans la seconde hypothèse.

De ces formules il est facile de conclure que nous devons nous arrêter à la première hypothèse dans le cas de

$$V_{2n}^{(\prime)}(x)\;V_{2n}^{(\prime\prime)}(x) > 0$$

et à la seconde dans le cas de

$$V_{2n}^{(\prime)}(x)\;V_{2n}^{(\prime\prime)}(x) < 0.$$

Quant au minimum cherché de l'intégrale, il s'exprime par

$$L\{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_{\varkappa-1}-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{\varkappa-1}\}$$

dans la première hypothèse, et par

$$L\{\eta_1+\eta_2+\cdots+\eta_\varkappa-\xi_1-\xi_2-\cdots-\xi_{\varkappa-1}-a\},$$

si la seconde hypothèse a lieu.

§ 8.

En terminant nous allons remarquer une méthode de calcul approximatif des intégrales, qui découle des recherches précédentes.

Cette méthode est basée sur ce qu'on remplace l'intégrale proposée

$$\int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy$$

par l'intégrale

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\min}\, dy$$

ou

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\max}\, dy,$$

qui se réduit à la somme des intégrales de ces formes

$$L\int_a^\eta \Phi(y)\, dy, \quad L\int_\xi^\eta \Phi(y)\, dy, \quad L\int_\xi^b \Phi(y)\, dy.$$

Nous retenons ici les désignations du § 3, en réunissant seulement ξ', ξ'' en un signe ξ, et η', η'' en un signe η.

Or en posant

$$\Phi(y) = \varphi'(y) \quad \text{et} \quad F'(y) = g(y)$$

et ayant égard à l'égalité

$$\int_a^b g(y)\,\varphi(y)\, dy = F(b)\,\varphi(b) - F(a)\,\varphi(a) - \int_a^b F(y)\,\Phi(y)\, dy,$$

on transformera la formule, que nous venons d'indiquer, en celle ci

$$\int_a^b g(y)\,\varphi(y)\,dy = L'\varphi(b) - L''\varphi(a) + L\,\Sigma\varphi(\xi) - L\,\Sigma\varphi(\eta) + K\varphi^{i+1}(\zeta)$$

K étant un nombre constant, ζ un nombre compris entre a et b,

$$L' = F(b) \quad \text{ou} \quad F(b) - L,$$
$$L'' = F(a) \quad \text{ou} \quad F(a) - L.$$

On ne doit pas oublier, que notre formule suppose

$$L > F(y) > 0.$$

Les nombres L' et L'', en général, sont différents de 0 et de $\pm L$.

En examinant les conditions aux quelles L' et L'' deviennent égales à 0 ou à $\pm L$, on parviendra à ces deux cas:

1. cas:

$$\int_a^b g(y)\,dy = 0,$$

$$F(y) = \int_a^y g(y)\,dy \geqq 0;$$

2. cas:

$$L = \int_a^b g(y)\,dy \geqq F(y) = \int_a^y g(y)\,dy \geqq 0$$

Dans ces deux cas et dans les cas, qui n'en diffèrent, que par le signe de $g(y)$, notre formule sera conforme à celle, que Tchebychef a traité dans les derniers paragraphes de son mémoire*) „Sur les quadratures“ La différence consiste seulement dans la valeur du facteur L.

Pourtant grace au changement de ce facteur nous pouvons assurer, que tous les nombres de nos calculs seront réels, et ensuite nous pouvons donner la formule approchée avec son terme complémentaire.

*) Journal de Liouville, 2 série, XIX.

Sur l'équation de Lamé.

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

(Extrait d'une lettre adressée à Mr. Klein).

Dans la note „Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung" Vous avez indiqué*), par deux figures, les lois de la distribution des racines réelles de l'équation

$$F(x, B) = 0,$$

$F(x, B)$ étant la fonction entière de M. Hermite déterminée par les équations

$$F(x, B) = y_1 y_2,$$
$$2\varphi y_1'' + \varphi' y_1' - 2(Ax+B) y_1 = 0,$$
$$2\varphi y_2'' + \varphi' y_2' - 2(Ax+B) y_2 = 0,$$
$$\varphi = \varphi(x) = 4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3), \quad A = n(n+1), \quad e_1 < e_2 < e_3.$$

Quant à la démonstration de ces lois, Vous avez renvoyé les lecteurs à Vos leçons.

A mon regret je n'avais pas l'occasion de connaître Vos leçons et je ne posséde que Vos deux notes intitulées „Autographirte Vorlesungshefte"**).

Mais de ces notes je conclus que Vôtre démonstration est fondée sur des considérations géométriques; c'est pourquoi je suppose que la démonstration suivante diffère de la Vôtre et ne sera pas sans intérêt.

On sait que la fonction $F(x, B)$ satisfait à l'équation linéaire du troisième ordre

$$2\varphi F''' + 3\varphi' F'' + \varphi'' F' - 8(Ax+B)F' - 4AF = 0$$

et aussi à l'équation du second ordre

$$(F'F' - 2FF'')\varphi - FF'\varphi' + 4(Ax+B)FF = \Phi(B),$$

$\Phi(B)$ étant une fonction entière de B, du degré $2n+1$, et le coefficient de B^{2n+1} dans cette fonction $\Phi(B)$ étant positif.

---

*) Mathematische Annalen, Bd. 40.

**) Mathematische Annalen, Bd. 45 u. 46.

Pour les valeurs de B satisfaisantes à l'équation

$$\Phi(B) = 0$$

la fonction $F(x, B)$ se réduit au carré d'une fonction de Lamé.

Dans ces cas l'équation

$$F(x, B) = 0$$

aura les racines doubles; dans tous les autres cas toutes les racines de l'équation

$$F(x, B) = 0$$

sont simples.

Quant aux fonctions de Lamé je ne supposerai connus que les théorèmes suivants:

1) ces fonctions correspondent aux $2n+1$ valeurs de B réelles et distinctes

$$B_{2n+1} < B_{2n} < B_{2n-1} < \cdots < B_3 < B_2 < B_1;$$

2) on a

$$F(x, B_i) = (x - e_1)^{\varepsilon_1^{(i)}} (x - e_2)^{\varepsilon_2^{(i)}} (x - e_3)^{\varepsilon_3^{(i)}} [f_i(x)]^2,$$

$f_i(x)$ étant la fonction entière et les nombres $\varepsilon_1^{(i)}$, $\varepsilon_2^{(i)}$, $\varepsilon_3^{(i)}$ étant égals à l'unitè ou à zéro.

3) les racines de l'équation

$$f_i(x) = 0$$

sont réelles, distinctes et comprises dans les intervalles

$$(e_1, e_2) \quad \text{et} \quad (e_2, e_3) \; .$$

Nous allons considérer les changements de la distribution des racines réelles de l'équation

$$F(x, B) = 0$$

par les intervalles

$$(-\infty, e_1), (e_1, e_2), (e_2, e_3), (e_3, +\infty),$$

quand B croit de $-\infty$ jusqu'à $+\infty$.

Or cette distribution ne varie que dans les cas, où B passe par les valeurs

$$B_{2n+1}, B_{2n}, \ldots, B_2, B_1.$$

Par conséquent il suffit, pour notre but, de considérer les valeurs de B voisines à

$$B_{2n+1}, B_{2n}, \ldots, B_i, \ldots, B_2, B_1$$

et les racines correspondantes de l'équation

$$F(x, B) = 0.$$

En posant, conformément à celà, les différences

$$x - \xi_i \quad \text{et} \quad B - B_i$$

infiniment petites et en désignant par ξ_i une racine quelconque de l'équation

$$f_i(x) = 0,$$

on peut réduire l'équation

$$F(x, B) = 0$$

à la forme très simple

$$(x - \xi_i)^2 F''(\xi_i, B_i) + 2(B - B_i)\left(\frac{\partial F(\xi_i, B)}{\partial B}\right)_{B = B_i} = 0.$$

D'autre part en différentiant l'équation

$$(F'F' - 2FF'')\varphi - FF'\varphi' + 4(Ax + B)FF = \Phi(B)$$

par rapport à B et en posant

$$x = \xi_i, \quad B = B_i.$$

on trouvera

$$-2\varphi(\xi_i) F''(\xi_i, B_i)\left(\frac{\partial F(\xi_i, B_i)}{\partial B}\right)_{B = B_i} = \Phi'(B_i).$$

Il en résulte, que le carré

$$(x - \xi_i)^2$$

et le produit

$$(-1)^{i-1}(B - B_i)$$

doivent être de même signe, si ξ_i est compris dans l'intervalle (e_1, e_2).

Dans l'autre cas, où l'on a

$$e_2 < \xi_i < e_3,$$

le signe de carré

$$(x - \xi_i)^2$$

est identique à celui de

$$(-1)^i(B - B_i).$$

Supposons maintenant

$$F(e, B_i) = 0,$$

en désignant e_1, e_2, e_3 par e.

Alors pour les valeurs infiniment petites des différences

$$x - e_i \quad \text{et} \quad B - B_i$$

l'équation

$$F(x, B) = 0$$

deviendra

$$(x - e)F'(e, B_i) + (B - B_i)\left(\frac{\partial F(e, B)}{\partial B}\right)_{B = B_i} = 0.$$

En même temps on trouvera

$$-F'(e, B_i)\left(\frac{\partial F(e, B)}{\partial B}\right)_{B = B_i}\varphi'(e) = \Phi'(B_i).$$

Par conséquent la différence

$$x - e$$

aura le même signe que

$$(-1)^{i-1}(B - B_i)$$

ou le signe contraire, selon que e soit égal à l'un des nombres e_1 et e_3 ou au nombre e_2.

En réunissant nos résultats, et en désignant par N_i' le nombre des racines de l'équation

$$f_i(x) = 0$$

dans l'intervalle (e_1, e_2), et par N_i'' le nombre des racines de la même équation dans l'intervalle (e_2, e_3), on parviendra à la table suivante.

Le nombre des racines de l'équation $F(x, B) = 0$.

Les limites de B	dans l'intervalle $(-\infty, e_1)$	dans l'intervalle (e_1, e_2)	dans l'intervalle (e_2, e_3)	dans l'intervalle $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_{2n+1}$	$\varepsilon_1^{(2n+1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2n+1)} + 2N''_{2n+1} + \varepsilon_3^{(2n+1)}$	0
$B_{2n+1} < B < B_{2n}$	0	$\varepsilon_1^{(2n+1)} + 2N'_{2n+1} + \varepsilon_2^{(2n+1)}$ $= \varepsilon_1^{(2n)} + 2N'_{2n} + \varepsilon_2^{(2n)}$	0	$\varepsilon_3^{(2n+1)} = \varepsilon_3^{(2n)}$
$B_{2n} < B < B_{2n-1}$	$\varepsilon_1^{(2n)} = \varepsilon_1^{(2n-1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2n)} + 2N''_{2n} + \varepsilon_3^{(2n)}$ $= \varepsilon_2^{(2n-1)} + 2N'_{2n-1} + \varepsilon_3^{(2n-1)}$	0
$B_{2n-1} < B < B_{2n-2}$	0	$\varepsilon_1^{(2n-1)} + 2N'_{2n-1} + \varepsilon_2^{(2n-1)}$ $= \varepsilon_1^{(2n-2)} + 2N'_{2n-2} + \varepsilon_2^{(2n-2)}$	0	$\varepsilon_3^{(2n-1)} = \varepsilon_3^{(2n-2)}$
$B_2 < B < B_1$	$\varepsilon^{(2)} = \varepsilon_1^{(1)}$	0	$\varepsilon_2^{(2)} + 2N_2'' + \varepsilon_3^{(2)}$ $= \varepsilon_2^{(1)} + 2N_1'' + \varepsilon_3^{(1)}$	0
$B_1 < B < +\infty$	0	$\varepsilon_1^{(1)} + 2N_1' + \varepsilon_2^{(1)}$	0	$\varepsilon_3^{(1)}$

Aux égalités de cette table on peut joindre celles-ci:

$$N''_{2n+1} = N''_{2n},\ N'_{2n} = N'_{2n-1},\ N''_{2n-1} = N''_{2n-2},\ \ldots,\ N_3'' = N_2'',$$
$$N_2' = N_1'$$

car toutes les sommes

$$2N_i' + 2N_i'' + \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)}$$

doivent se réduire au même nombre n.

En comparant toutes ces égalités on obtiendra sans aucune difficulté l'égalité suivante:

$$2N'_{2n+1} + \varepsilon_1^{(2n+1)} + \varepsilon_2^{(2n+1)} - 2N_1' = \varepsilon_2^{(2n)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-3)}$$
$$+ \cdots + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(2)} + \varepsilon_1^{(2)}.$$

Or la forme des coefficients de la fonction $F(x, B)$ indique, que les modules des racines de l'équation

$$F(x, B) = 0$$

deviendront infiniment grands en même temps que B^2.

De là résultent les égalités

$$\varepsilon_2^{(2n+1)} = 0,\ \varepsilon_3^{(2n+1)} = 0,\ N''_{2n+1} = 0,\ 2N'_{2n+1} + \varepsilon_1^{(2n+1)} = n,$$
$$\varepsilon_1^{(1)} = \varepsilon_2^{(1)} = N_1' = 0$$

et ensuite

$$n = \varepsilon_2^{(2n)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \varepsilon_2^{(2n-2)} - \varepsilon_2^{(2n-1)} + \cdots + \varepsilon_2^{(4)} - \varepsilon_2^{(3)} + \varepsilon_2^{(2)}.$$

Donc nous parvenons aux équations

$$\varepsilon_2^{(2n)} = \varepsilon_2^{(2n-2)} = \cdots = \varepsilon_2^{(4)} = \varepsilon_2^{(2)} = 1,$$
$$\varepsilon_2^{(2n+1)} = \varepsilon_2^{(2n-1)} = \cdots = \varepsilon_2^{(2)} = \varepsilon_2^{(1)} = 0,$$

qui déterminent complétement les nombres $\varepsilon_2^{(i)}$.

Cela étant l'égalité

$$2N_{2n+1}^{(1)} + \varepsilon_1^{(2n+1)} = n$$

donne la formule

$$\varepsilon_1^{(2n+1)} = \frac{1-(-1)^n}{2} = \varepsilon$$

et de la table précédente on tirera successivement

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_1^{(2n+1)} = \varepsilon, & \varepsilon_2^{(2n+1)} = 0, & \varepsilon_3^{(2n+1)} = 0,\\
\varepsilon_1^{(2n)} = 1-\varepsilon, & \varepsilon_2^{(2n)} = 1, & \varepsilon_3^{(2n)} = 0,\\
\varepsilon_1^{(2n-1)} = 1-\varepsilon, & \varepsilon_2^{(2n-1)} = 0, & \varepsilon_3^{(2n-1)} = 1,\\
\varepsilon_1^{(2n-2)} = \varepsilon, & \varepsilon_2^{(2n-2)} = 1, & \varepsilon_3^{(2n-2)} = 1,\\
\varepsilon_1^{(2n-3)} = \varepsilon, & \varepsilon_1^{(2n-3)} = 0, & \varepsilon_3^{(2n-3)} = 0,
\end{array}$$

etc.

D'après ces résultats il est facile de réduire la table précédente à sa forme définitive.

Le nombre des racines de l'équation $F(x, B) = 0$.

Limites de B	dans l'intervalle $(-\infty, e_1)$	dans l'intervalle (e_1, e_2)	dans l'intervalle (e_2, e_3)	dans l'intervalle $(e_3, +\infty)$
$-\infty < B < B_{2n+1}$	ε	0	0	0
$B_{2n+1} < B < B_{2n}$	0	n	0	0
$B_{2n} < B < B_{2n-1}$	$1-\varepsilon$	0	1	0
$B_{2n-1} < B < B_{2n-3}$	0	$n-1$	0.	1
$B_{2n-3} < B < B_{2n-4}$	ε	0	2	0
$B_{2n-4} < B < B_{2n-5}$	0	$n-2$	0	0
. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
. . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	. . . . .
$B_5 < B < B_4$	0	2	0	ε
$B_4 < B < B_3$	1	0	$n-1$	0
$B_3 < B < B_2$	0	1	0	$1-\varepsilon$
$B_2 < B < B_1$	0	0	n	0
$B_1 < B < +\infty$	0	0	0	ε

A ce que je crois, cette table est équivalente à Vos figures.

J'ajoute, que dans mon mémoire „Sur la fonction entière

$$x^n F\left(\frac{-n-\Delta}{2}, \frac{2\varkappa-n+1-\Delta}{2}, 1-\Delta, \frac{1}{x}\right)\times$$
$$\times F\left(\frac{-n+\Delta}{2}, \frac{2\varkappa-n+1+\Delta}{2}, 1+\Delta, \frac{1}{x}\right)$$

et sur les fonctions d'un genre plus général", publié en russe*), Vous pouvez trouver une autre application des considérations semblables aux précédentes.

St. Pétersbourg, 1. Janvier 1896.

*) Mémoires de l'Académie des sciences de St. Pétersbourg. VII. Série Tome XLI, N. 2.

Das Additionstheorem der Function $\wp(u)$.

Von

PAUL STÄCKEL in Königsberg i. Pr.

Genügen die Grössen u_1, u_2, u_3 der Bedingung:

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + u_3 = 0,$$

so stellt der Quotient:

$$(2) \qquad \frac{\sigma(u+u_1)\,\sigma(u+u_2)\,\sigma(u+u_3)}{\sigma^3(u)} = f(u)$$

eine elliptische Function dritten Grades dar, die nur an den Stellen unendlich wird, welche congruent Null sind. Entwickelt man also $f(u)$ nach Potenzen von u, so muss der Coefficient von u^{-1} identisch verschwinden, und es ist daher:

$$(3) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & \sigma u_1\,\sigma u_2\,\sigma'' u_3 + \sigma u_2\,\sigma u_3\,\sigma'' u_1 + \sigma u_3\,\sigma u_1\,\sigma'' u_2 \\ & + 2\sigma u_1\,\sigma' u_2\,\sigma' u_3 + 2\sigma u_2\,\sigma' u_3\,\sigma' u_1 + 2\sigma u_3\,\sigma' u_1\,\sigma' u_2 \end{aligned}$$

oder nach leichter Umformung:

$$(4) \qquad \begin{aligned} 0 = {} & \frac{\sigma'' u_1}{\sigma u_1} - \left(\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1}\right)^2 + \frac{\sigma'' u_2}{\sigma u_2} - \left(\frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2}\right)^2 + \frac{\sigma'' u_3}{\sigma u_3} - \left(\frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2 \\ & + \left(\frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3}\right)^2. \end{aligned}$$

Nun bestehen aber die Gleichungen (H. A. Schwarz, Formeln und Lehrsätze, Artikel 9 (1), Artikel 11 (4)):

$$(5) \qquad \frac{\sigma'' u}{\sigma u} - \left(\frac{\sigma' u}{\sigma u}\right)^2 = -\wp(u),$$

$$(6) \qquad \frac{\sigma' u_1}{\sigma u_1} + \frac{\sigma' u_2}{\sigma u_2} + \frac{\sigma' u_3}{\sigma u_3} = -\frac{1}{2}\,\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2} \quad (u_1 + u_2 + u_3 = 0),$$

folglich ist die Relation (4) gleichbedeutend mit:

$$(7) \qquad \wp u_1 + \wp u_2 + \wp u_3 = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u_1 - \wp' u_2}{\wp u_1 - \wp u_2}\right)^2,$$

und das ist *das Additionstheorem der Function $\wp(u)$ in seiner classischen Gestalt.*

Königsberg i. Pr., December 1895.